

DOI: 10.11779/CJGE201507012

基于最小势能原理的加筋垫层与路堤桩土相互作用研究

上官士青¹, 杨敏¹, 陈飞², 郭俊东², 张俊峰³

(1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 华东电力设计院, 上海 200063; 3. 同济启明星科技发展有限公司, 上海 200092)

摘要: 桩承式加筋路堤由于涉及桩-桩间土-垫层-加筋体的相互作用问题而使其承载机理复杂, 适用于分层土的简化计算方法尚需要深入研究。在广义桩-广义土物理模型的基础上引入加筋垫层, 考虑桩土荷载传递及加筋体拉伸产生的弹性势能, 推导了整个系统的总势能方程, 并将其离散化, 建立了一个无约束非线性数学规划模型。该数学模型以总势能方程作为目标函数, 采用下降迭代算法求解总势能方程的最小值, 可求得桩、土、垫层垂直方向上的变形。通过一个未加筋的算例对数学规划模型进行了验证, 并结合某堆煤筒仓实际工程对该方法计算的加筋处理效果进行了讨论。

关键词: 桩承式路堤; 加筋垫层; 数学规划; 荷载传递法; 桩土相互作用

中图分类号: TU472 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2015)07-1264-07

作者简介: 上官士青(1989-), 山东临沂人, 博士研究生, 从事水平受力桩研究。E-mail: shangguansq@gmail.com。

Interaction of reinforced cushion and pile-soil system in embankments based on principle of minimum potential energy

SHANGGUAN Shi-qing¹, YANG Min¹, CHEN Fei², GUO Jun-dong², ZHANG Jun-feng³

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. East China Electric Power Design Institute, Shanghai 200063, China; 3. Tongji Qimstar Science and Technology Development Co., Ltd., Shanghai 200092, China)

Abstract: The bearing mechanism of piled embankments is complex as it involves the interaction of piles, soil columns, sand cushions and reinforced geogrids, and its simplified calculation method for layered soils still lacks researches. A mathematical model is proposed for a generalized pile-soil model with geogrids. Considering the potential energy generated by pile-soil load transfer and geotextile tensile, the potential energy equations for the whole system are derived and discretized. An unconstrained nonlinear mathematical optimization model is established, with the potential energy equation as an objective function. The minimum value of the total potential energy equation is obtained by a descent iterative algorithm, and in this way the deformations of piles, soils and sand cushions in the vertical direction are solved. The mathematical model for piled embankment and the solving method are validated through an example without geogrid. The effect of the geogrid interaction is discussed in another engineering example.

Key words: piled embankment; reinforced cushion; mathematical programming; load transfer method; pile-soil interaction

0 引言

桩承式加筋路堤是近年来软土地区常用的一种新型路堤, 一般由垫层、加筋体、桩(带托板)和桩间土四部分构成, 其本身是一种柔性基础下的复合地基。由于这种复合地基相比桩筏基础价格较低, 也常作为筒仓、堆煤场、油罐的基础, 应用较多。国内外学者提出了多种简化计算模型, 以计算加筋路堤分担比及变形等。Alamgir等^[1]假设桩土不产生相对滑移, 提出了整合桩土位移的位移函数, 称为单位元; 杨涛^[2]、李海芳^[3]根据这种模式进行了进一步的研究。沈伟等^[4]、傅景辉等^[5]将地基梁与预设摩擦形式的单桩摩擦解析结合, 提出了一种解析解法。陈仁朋等^[6-7]同样根据

预设摩擦形式的单桩摩擦解析解, 结合刘吉福^[8]提出的“沉降差与分担比”的理论公式, 给出了一种半解析解法。

在加筋垫层计算方面, 国内外多数学者将加筋体作为悬链线、圆弧、抛物线、双曲线等形式的抗拉杆件进行计算, 发展了许多计算方法。桩-土-垫层三者的相互作用计算多采用复杂的半解析解^[6]和多级迭代解法^[9]。由于算法的复杂性, 虽然加筋垫层变形与上提力关系的计算方法非常多, 但桩-土-垫层-加筋体四者相互作用的简化计算方法较少。徐立新^[10]

在半解析解的计算方法基础上加入了加筋垫层拉伸和抗弯的影响, 提出了相应的整体分析方法, 但该方法仅用于单层土。

本文尝试根据最小势能原理将加筋垫层引入桩-土-垫层模型进行相互作用分析。文献[9]提出了遍布大面积条件下, 一根桩与其处理范围的土柱进行荷载传递分析的方法, 在单桩荷载传递法的基础上考虑土体的压缩, 构建了广义桩和广义土物理模型。笔者在广义桩和广义土模型的基础上推导了整个模型的势能方程, 建立了一个非线性无约束数学规划模型, 可结合下降法进行迭代求解。通过额外计算加筋体受拉产生的应变能并修改广义势能方程, 可在模型中极为方便地考虑加筋体的影响。

1 物理模型

由单桩的荷载传递法进行扩展, 可得到该广义桩-广义土模型。首先考虑路堤填土中选取单根桩进行分析, 如图1所示。由图2(a)所示, 经典的荷载传递法将桩简化为可压缩的杆件, 通过非线性弹簧连接在位移固定的边界上。这些非线性弹簧一般用 $\tau-z$ 曲线来表示。显然这种适用于单桩计算的荷载传递法并不适用于桩承式加筋路堤的分析, 文献[9]将其扩展为广义桩-广义土模型, 见图2(b)。将桩和承台假设为一维弹性杆件1; 将桩间土假设为弹性杆件2; 根据桩帽面积将垫层分为垫层内土柱(桩帽以上部分)和外土柱(桩帽以外部分)两个部分。将桩帽以上的内外土柱假设为两根弹性杆件3和4; 杆1和杆3通过共用节点进行连接, 可称为广义桩; 杆2和杆4通过共用节点进行连接, 可称为广义土。杆1和杆2, 杆3和杆4通过非线性弹簧进行连接, 并假设该弹簧的摩擦力-位移关系符合 $\tau-z$ 曲线的形式, 见图2。杆2底端设置下卧层沉降弹簧对整个模型进行边界约束。模型不包含下卧层沉降算法, 可通过桩基规范方法求得下卧层沉降后, 反算下卧层沉降弹簧的刚度。如只进行桩-土-垫层的相互作用研究, 可以采用杆2底端节点全约束作为边界条件。该简化模型由于考虑分层土, 因此存在变刚度的情况。合理地选取垫层内外土柱非线性弹簧的 $\tau-z$ 曲线可模拟垫层内的土拱效应。这种由杆件弹簧和质点组成的物理系统, 可用于计算路堤中心或堆载场中心的垫层与桩土的相互作用。

本文模型由能量原理推导, 其基本假定表述为:

- ①取一根桩、桩帽、垫层及桩间距范围(等效)内的土柱进行研究, 如图1所示。②根据桩帽面积将垫层分为内外两个土柱。垫层内土柱、垫层外土柱、桩和桩间土体仅考虑其弹性一维压缩产生的应变能。垫层

内土柱、外土柱和桩间土体不发生剪切, 在同一水平面内应力相等。③桩与桩间土界面上的剪切应变能通过 $\tau-z$ 非线性弹簧做功近似的表述。为了便于考虑垫层内节点自重对其剪切变形的影响, 采用文献[9]的物理模型, 将垫层的剪切变形简化为垫层内土柱、垫层外土柱界面上的摩擦剪切, 即垫层内的剪切应变能通过 $\tau-z$ 非线性弹簧做功近似的表述。④考虑加筋体拉伸产生的应变能, 不考虑加筋体上下表面的摩擦力。⑤不考虑桩帽底部的土体对桩帽的支撑力。

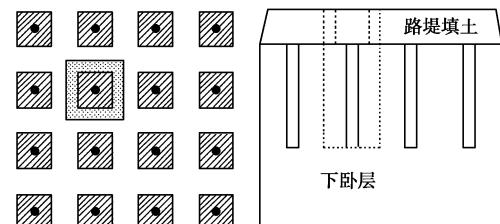


图1 简化计算模型

Fig. 1 Simplified model

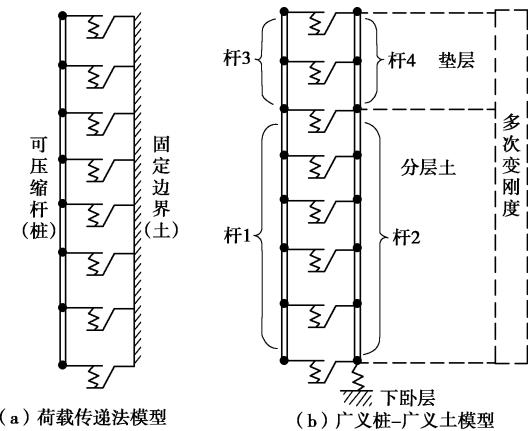


图2 物理模型

Fig. 2 Physical models

在这种假设条件下, 桩身摩阻力的方向完全由位移的方向控制, 并不再需要假设出整个桩身的摩阻力分布形式。同时关于垫层中的等沉降面也完全由垫层中的非线性 $\tau-z$ 摩擦弹簧来进行控制, 不需要再根据等沉降面在垫层内或垫层外分情况讨论, 较为简洁。在文献[12]的物理模型中将下卧层的一部分也纳入了广义桩-广义土模型进行整体相互作用分析, 更为合理。考虑到计算的复杂性, 本文模型并没有在下卧层内也建立广义桩-广义土模型, 而是采用桩底非线性弹簧计算桩底反力。

2 数学模型表达

2.1 总势能方程

不同于文献[9]的荷载传递多级迭代法, 本文采用数学规划方法对整个物理模型进行计算。将桩自下而上每个单元编号为 $1 \sim n$, 同时将广义土自下而上每个单元编号为 $1 \sim n$, 节点编号同样自下而上。令 K_{pi} 、

K_{si} 分别为广义桩和广义土每个单元的抗压刚度 (EA (kN)), K_{wi} 为每根 $\tau - z$ 弹簧的刚度 (kN/m)。

设整个模型的待求未知量为土体和桩身单元应变行矩阵 $\boldsymbol{\varepsilon}_s$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{pi}$, 则自由度为 $2n$ 个, 行矩阵 $\boldsymbol{\varepsilon}_s$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{pi}$ 中的元素 ε_{pi} , ε_{si} 为每个桩、土单元的压缩应变。

构造路堤填土节点上的附加自重 \mathbf{G}_s , \mathbf{G}_p 两个行矩阵, 每个单元对应矩阵中的元素为 G_{si} , G_{pi} , 代表垫层单元的自重荷载, 对于桩和土层编号的单元该变量应为 0。

对于一维杆件不难直接写出任意单元的弹性势能, 将所有单元势能累加可得:

广义桩的总应变能为

$$E_p = \sum_1^n \left[\frac{K_{pi}}{2l_i} (l_i \varepsilon_{pi})^2 \right], \quad (1)$$

广义土的总应变能为

$$E_s = \sum_1^n \left[\frac{K_{si}}{2l_i} (l_i \varepsilon_{si})^2 \right], \quad (2a)$$

式中, $l_i \varepsilon_{pi}$ 为桩单元的压缩量, $l_i \varepsilon_{si}$ 为土单元压缩量, 求和符号的优先级与积分符号相同。

$$K_{pi} = \begin{cases} E_{mp} A_p & (i \in \text{桩身}), \\ E_{mcu} A_r & (i \in \text{垫层内土柱}), \end{cases}$$

$$K_{si} = \begin{cases} E_{ms1} A_s & (i \in \text{桩间土1}), \\ E_{ms2} A_s & (i \in \text{桩间土2}), \\ \dots & \dots, \\ E_{mcu} (A_A - A_r) & (i \in \text{垫层外土柱}) \end{cases},$$

式中, E_{mp} , E_{mcu} , E_{ms1} , E_{ms2} 分别为桩的弹性模量、垫层的压缩模量、分层土 1 和 2 的压缩模量, A_p , A_r , A_s , A_A 分别为桩截面积、桩帽截面积、研究范围内桩间土截面积、研究范围内总截面积。

对于非线性压缩的桩间土, 如指数形式的力 - 位移 (应力 - 应变) 关系 $F_{si} = a_{si} (l_i \varepsilon_{si})^{b_{si}}$, 可采用积分得到

$$E_s = \sum_1^n \left[\frac{a_{si} (l_i \varepsilon_{si})^{b_{si}+1}}{b_{si} + 1} \right], \quad (2b)$$

式中, a_{si} , b_{si} 为土性参数。岩土中常用的对数形式和双曲正切形式都可以通过积分获得其应变能表达式。

对于摩阻力弹簧, 由每个单元的应变量, 可计算得到编号为 j 的单元的相对滑移量为

$$\sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{si} - \sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{pi} - s_b, \quad (3)$$

式中, $\sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{si}$ 是编号为 j 的土单元节点位移, $\sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{pi} + s_b$ 是编号为 j 的桩节点位移, s_b 为桩底刺入量, 即桩底处桩节点与土节点的相对位移, 是一个待

求未知量。则所有非线性侧阻弹簧的势能可表示为

$$E_w = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n} \left[K_{wj} \left(\sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{si} - \sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{pi} - s_b \right)^2 \right]. \quad (4)$$

考虑到 K_{wi} (式 (4) 中为 K_{wj}) 不是定值, 在大于设定的阀值后应力应变关系变为塑性, K_{wi} 仅用于计算弹性部分的应变能。该阀值一般为 0.01 (m), 是已知常数。因此可根据梯形面积公式写出其弹簧单元弹性和塑性势能的显式, 在此不再列出。也可以采用等非线性模型式 (2b)。

引入外部荷载做功, 主要为堆填荷载, 可得

$$W = - \sum_{j=1}^{j=n} \left[G_{sj} \sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{si} \right] - \sum_{j=1}^{j=n} \left[G_{pj} \left(\sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{pi} + s_b \right) \right]. \quad (5)$$

为表述累加关系, 式中 G_{si} 改为 G_{sj} , G_{pi} 改为 G_{pj} 。可得整个系统势能为

$$E = \sum_1^n \left[\frac{K_{pi}}{2l_i} (l_i \varepsilon_{pi})^2 \right] + \sum_1^n \left[\frac{K_{si}}{2l_i} (l_i \varepsilon_{si})^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n} \left[K_{wj} \left(\sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{si} - \sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{pi} - s_b \right)^2 \right] - \sum_{j=1}^{j=n} \left[G_{sj} \sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{si} \right] - \sum_{j=1}^{j=n} \left[G_{pj} \left(\sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{pi} + s_b \right) \right]. \quad (6)$$

显然式 (6) 完整地描述了整个系统势能, 根据最小势能原理, 求解式 (6) 的最小值即可得到该问题的解答。数学规划模型可用于求解目标函数在等式及不等式约束条件下的极值问题, 由于在推导时已经将方程离散化, 式 (6) 可直接作为目标函数, 构建一个无约束条件的数学规划模型, 通过求解目标函数的最小值, 获得桩承式路堤的位移解。若采用迭代下降法求解, 可使模型适应非线性计算, 如非线性的土体压缩、指数或双曲正切的 $\tau - z$ 曲线等情况。

对于加筋体的考虑, 多数学者的简化计算模型中, 仅考虑加筋体的拉伸模量。在传统的计算方法中, 需要计算加筋体的水平拉力与该拉力的水平角度, 并换算为向上的上提力 (垂直方向的分量), 将该力作为外力施加于桩顶节点。这是一种几何非线性, 即便采用线性弹簧来模拟土工加筋体的拉力, 仍避免不了各种复杂的上提力的算法。同时为了保证计算的稳定性, 可能需要采用增量法或者增加新的迭代过程, 比较保守的做法是在每一次更新和换算加筋体上提力的时候都要保证其他 $\tau - z$ 曲线连接的节点已经平衡, 显然这使迭代过程复杂化。在本文模型中, 将加筋体等效为水平方向弹簧, 直接施加在桩帽底广义桩广义土节点上, 计算加筋体的拉伸应变能, 构建新的广义势能方程。通过桩帽底两个节点的位移差值即可产生加筋体的变形势能, 无需计算角度加筋体的倾角。假设该加筋体是线性弹性的, 则加筋体产生的应变能为

$$E_{gd} = \frac{1}{2} K_{gd} [f_1(\varepsilon_s, \varepsilon_p, \lambda)]^2 , \quad (7)$$

式中, K_{gd} 代表加筋体抗拉刚度, f_1 为表示格栅弹簧拉伸长度的函数, 是桩身和土体应变的函数, 可按文献[11]中圆弧伸长长度估算。 f_1 也可以采用其他学者提出的函数:

$$f_1 = 4 \left(\frac{\Delta s}{b} \right)^2 , \quad (8)$$

式中, b 为土工栅格有效长度, 是桩间距和桩帽宽度的差, Δs 为土工栅格处广义桩-广义土的相对滑移。

由于单元自下而上进行编号, 假设加筋体铺设在编号为 m 的单元处, 可得

$$\Delta s = \sum_{i=1}^{i=m} l_i \varepsilon_{si} - \sum_{i=1}^{i=m} l_i \varepsilon_{pi} - s_b . \quad (9)$$

将加筋体势能与总势能叠加, 可得整个模型为

$$\begin{aligned} E = & \sum_{i=1}^n \left[\frac{K_{pi}}{2l_i} (l_i \varepsilon_{pi})^2 \right] + \sum_{i=1}^n \left[\frac{K_{si}}{2l_i} (l_i \varepsilon_{si})^2 \right] + \\ & \frac{8K_{gd}}{b^2} \left(\sum_{i=1}^{i=m} l_i \varepsilon_{si} - \sum_{i=1}^{i=m} l_i \varepsilon_{pi} - s_{in} \right)^4 + \\ & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n} \left[K_{wj} \left(\sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{si} - \sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{pi} - s_b \right)^2 \right] - \\ & \sum_{j=1}^{j=n} \left[G_{sj} \sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{si} \right] - \sum_{j=1}^{j=n} \left[G_{pj} \left(\sum_{i=1}^{i=j} l_i \varepsilon_{pi} + s_{bu} \right) \right] . \quad (10) \end{aligned}$$

可见, 考虑土工加筋体后, 模型仍为一个公式, 代表一个已经离散的无约束非线性规划问题, 极为简洁。

2.2 模型求解

由于该模型是一维问题, 自由度较少, 仅为几十个, 可采用 MATLAB 直接求解式(6)或式(10)的最小值。具体求解方法可采用下降法。这种计算方法是一种全量迭代法, 以梯度下降法为例, 其计算步骤为:

(1) 确定变量。约定 $x^{(i)}$ 含义为 x 变量第 i 次迭代的值。式(6)中, K_{pi} , K_{si} , K_{wi} , n , G_{si} , G_{pi} , l_i 为已知量, ε_{pi} , ε_{si} 为待求未知量。对未知量赋初始值后, 不难按式(6)求得初始时系统总势能 $E^{(0)}$ 。为方便建模, 也可以采用单元压缩量 $\varepsilon_{pi} l_i$, $\varepsilon_{si} l_i$ 作为未知量。

(2) 根据偏导数的定义式

$$\partial E / \partial \varepsilon_{pi} = \frac{E_1 - E_2}{\varepsilon_{pi1} - \varepsilon_{pi2}} , \quad (11)$$

利用当前计算点、附近的点或前后两次迭代的点, 对每个变量进行计算偏导数 $\partial E^{(0)} / \partial \varepsilon_{pi}^{(0)}$, 该偏导数组成的列阵即该点的梯度。式(11)中右标是采用数值法计算偏导数时区分两个计算点的编号。

(3) 按照求得的梯度, 对每个变量按式

$$\varepsilon_{pi}^{(i+1)} = \varepsilon_{pi}^{(i)} - a \partial E^{(i)} / \partial \varepsilon_{pi}^{(i)} . \quad (12)$$

更新 (ε_{si} 同理), 式中, a 为步长, 是一个足够小的值。 a 的取值涉及不同的收敛加速技术, 不在此讨论。如采用 line-search 方法获得 a 的大小则称为最速下降法。

(4) 根据新的 ε_{si} , ε_{pi} , 计算 $E^{(1)}$, 由于未知变量按式(12)沿着梯度的负方向更新数值, 因此 $E^{(1)} < E^{(0)}$ 。重复(2)~(4)步, 直至达到收敛条件。该方法使未知变量沿着其负梯度方向前进, 每一次迭代后 E 的值会减小, 逐步达到最小值。因此可选用 E 的差值作为收敛判据, 也可选用变量梯度作为判据。

除了采用负梯度作为下降方向外, 也可采用 DFP、BFGS 方向进行计算, 即采用拟牛顿法。这些算法是求解最小值问题的经典算法, 且精度可控, 一般不需要自行编写迭代过程, 如 MATLAB 的内置无约束非线性规划求解器即集成了上述多种算法。可见本文模型的实现是比较方便的。考虑到算法的效率, 建议单元划分的数量取 50~150。采用以上方法建立计算模型, 可将多种非线性因素整合在一个迭代过程中求解。

3 算例

3.1 算例 1

许峰^[12]进行了一组桩承式路堤的室内试验。试验采用了 90 mm 正方形板模拟桩帽, 桩采用直径 32.3 mm 铝合金管, 桩长为 0.9 m。桩间土有效重度为 15.6 kN/m³, 压缩模量为 12 MPa; 路堤高度为 0.45 m, 路堤土重度为 15.6 kN/m³, 其压缩模量为 12 MPa, 桩间距为 20~30 cm, 桩身模量为 71.4 GPa。沉降测量采用百分表。

τ - z 曲线采用理想弹塑形的形式。可通过极限侧摩阻力 τ_u 和极限位移 z_u 两个参数确定:

$$\tau = \begin{cases} \tau_u z / z_u & (z < z_u) \\ \tau_u & (z \geq z_u) \end{cases} . \quad (13)$$

由模型桩静载试验, 可估算得到本文模型所需要的 τ - z 曲线。单桩承载力试验测得该桩极限承载力为 400 N, 桩顶沉降 1.23 mm。可假设该桩在 1.23 mm 位移时桩侧与桩底反力弹簧同时进入完全塑性, 即 $z_u = 1.23$ mm。该桩长仅 0.9 m, 桩身自身的压缩量很小, 可以忽略, 因此桩底 $z_{ub} = 1.23$ mm。文献[12]中给出了路堤试验中桩间距 0.3 m 时中心桩的桩底轴力约为 80 N, 此时桩顶位移为 0.33 mm, 假设桩底弹簧在 1.23 mm 相对位移以内为线弹性, 则桩底反力弹簧的刚度为 242.4 N/mm, 在单桩承载力试验中桩顶 1.23 mm 达到极限承载力时, 桩底承担的荷载最多为 298 N, 因此桩底 $\tau_{ub} = 298$ N。根据单桩试验 400 N 的极限承载力, 此时桩身提供的摩阻力已达到极限值为 102 N。因此可以计算得到试验用砂土的 $\tau_u = 11$ kPa。由于上述

计算高估了桩底弹簧提供的承载力, 低估了桩侧土提供的承载力, 按桩基规范该类砂土的极限摩阻力为24~48 kPa, 考虑到该试验桩径很小, 本算例中桩侧极限摩阻力保守估值为15 kPa, 因此取 $\tau_u = 11$ 和15 kPa分别计算。其他参数按文献[12]取值。由于试验下卧层较薄, 计算时忽略下卧层压缩。垫层内外土柱界面的 $\tau - z$ 曲线取值方法与桩土界面 $\tau - z$ 曲线相同。

表1 算例1计算结果对照表

Table 1 Calculated results of Example 1

桩间距/cm	文献[12]		本文模型		
	比较项	试验值	计算值	砂土极限摩阻力15 kPa	砂土极限摩阻力11 kPa
20	分担比%	42.75	43.18	41.603	38.798
	桩顶位移/mm	0.24	0.26	0.23523	0.24721
	桩间土位移/mm	0.36	0.38	0.32313	0.33858
30	分担比%	24.44	23.10	22.988	20.828
	桩顶位移/mm	0.34	0.32	0.2915	0.30027
	桩间土位移/mm	0.46	0.45	0.41342	0.42446

笔者分别计算了桩侧土极限摩阻力11 kPa和15 kPa两种情况下的计算结果。据该文算例进行计算, 计算结果见表1。其中11 kPa是由桩底土弹簧按照线弹性反算得到的结果, 15 kPa是估值。可见在采用实测 $t-z$ 曲线的情况下, 本文模型计算结果与文献[11]的试验结果高度吻合, 且两种桩侧极限摩阻力情况下的计算结果差距较小。桩身轴力图由图3所示, 本文计算结果与试验值也较为吻合, 与试验值差距不超过20%。图4为垫层中的位移变化, 其中沉降差随着垫层中坐标高度的提高而急剧减小, 体现出了等沉面的概念。但是本文采用迭代算法, 很难将沉降差计算到绝对的0值。

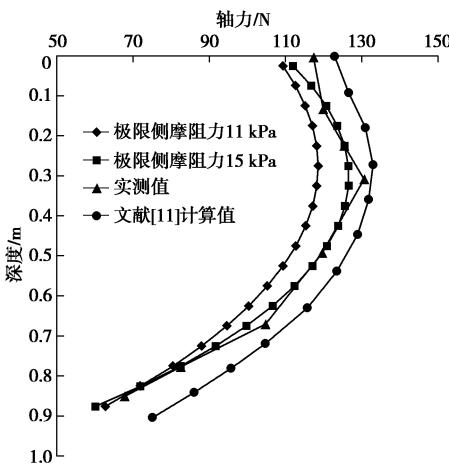


图3 算例1桩身轴力

Fig. 3 Axial forces of pile in Example 1

实际工程中常有桩未打穿软土层的情况。在上述计算的基础上, 直接调整桩底弹簧刚度, 分别模拟桩底存在硬土层和软弱土层的情况。计算结果见表2。

由表2可知, 在桩底反力弹簧刚度降低时, 桩顶的沉降量增大, 中性点上升, 说明负摩阻力的作用范

围减小了, 正摩阻力发挥的更多。其规律和文献[6]中未贯穿软土层时的规律一致。不同桩底反力情况下的轴力见图5, 随着桩底的承载能力减弱, 桩顶的轴力也减小了, 桩身摩擦提供的承载力明显增加。

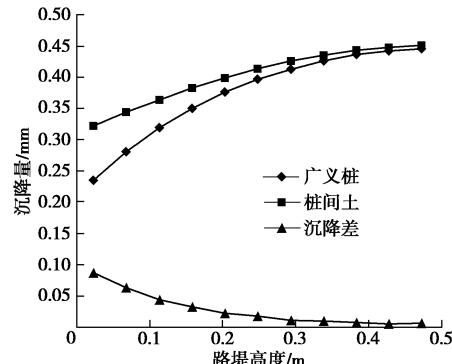


图4 极限摩阻力15 kPa下砂垫层内变形情况

Fig. 4 Deformations of sand cushion (ultimate friction resistance=15 kPa)

表2 不同桩底反力情况下的计算结果

Table 2 Results of different reaction conditions at pile bottom

桩底抗力弹簧极限阻力/N	分担比	中性点深度与桩长比值	桩顶沉降/mm	桩间土沉降/mm
600	0.44260	0.33080	0.192	0.2919
298	0.41946	0.25911	0.235	0.3230
150	0.39989	0.21936	0.266	0.3460
50	0.38532	0.18808	0.291	0.3650

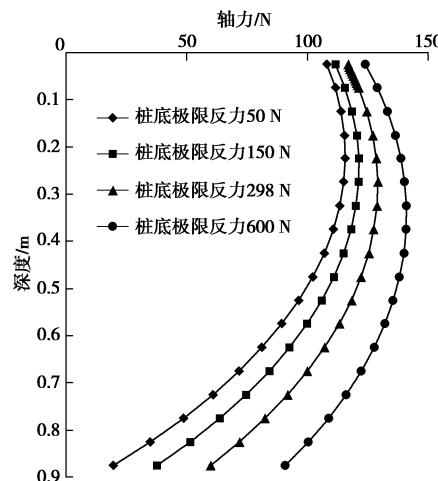


图5 不同桩底反力情况下的桩身轴力

Fig. 5 Axial forces of different reaction conditions at pile bottom (ultimate friction resistance=15 kPa)

由于采用理想弹塑性形状的 $\tau - z$ 曲线, 但未增量计算, 实际应用时是非线性弹性的, 因此本文模型描述了一个一维分段线弹性问题, 由弹性问题的叠加性和解的唯一性可知, 本文讨论的物理模型具有唯一的解(平衡状态)。因此理论上该数学规划模型具有一个解(平衡状态)。同时由模型的目标函数可知, 系统势能是正定的, 因此该最小值(极小值)即模型的解。由于本文模型只有垂直方向自由度, 因此该问题没有

物理模型的稳定问题, 上述解即模型的“稳定平衡状态”下的解。上述算例也表明本文方法是可行的。

3.2 算例 2

采用本文方法对某堆煤筒仓工程中的地基部分进行计算。该堆煤筒仓直径 120 m, 设计堆煤最大高度 32.9 m, 基础形式采用加筋的带承台刚性桩复合地基, 与常见的刚性桩桩承式路堤的基础相同。PHC 桩的直径 600 mm, 壁厚 110 mm, 折算成实心全截面后, 桩的模量为 16.7 GPa。桩间距 3 m, 桩帽(拖板)宽度 1.5 m, 桩长为 40 m。桩侧荷载传递弹簧全部采用弹性—理想塑性的 $\tau-z$ 曲线(式(13)), 根据土层极限侧摩阻力和极限位移确定 $\tau-z$ 曲线。计算采用参数见表 3, 其中 $z_u=1.0\sim1.5$ cm, τ_u 取勘察报告桩侧极限摩阻力标准值和 β 法计算结果中的小值。桩与土间的摩阻力系数取 0.3。垫层内外土柱界面的 $\tau-z$ 曲线取值方法按 β 法计算, β 值按内摩擦角计算。煤和垫层的压缩模量取 10 MPa, 黏聚力 0, 内摩擦角 38°。加筋体的抗拉杨氏模量按应变 0.01 时达到抗拉强度的 50% 确定。依照勘察报告, 计算采用的相关数据见表 2。其中第 7 层粉砂的桩底极限反力为 6000 kPa(预制桩)。桩底弹簧极限反力距离参考 API 规范^[13]砂土中取 0.1 倍的桩径, 即 $z_{ub}=0.06$ cm。

表 3 算例 2 土层参数

Table 3 Soil parameters of Example 2

层号	土层名称	层厚 /m	天然重度 /(kN·m ⁻³)	E_s /MPa	桩侧极限摩阻力标准值/kPa
1-1	吹填土(粉土)	0.84	18.0	5	15
1-2	吹填土(淤泥质粉质黏土)	1.51	18.0	5	15
2-1	灰黄色砂质粉土	1.28	19.8	10	15
3-1	灰色淤泥质粉质黏土	5.48	18.4	3	15
4-1	灰色淤泥质粉质黏土	7.60	17.4	3	25
5-2	灰色—灰黄色黏质粉土	8.47	18.9	8	45
6	暗绿色粉质黏土	2.15	20.1	12	65
7-1	灰色—灰黄色砂质粉土	8.73	19.9	25	80
7-2	灰色粉细砂	20.00	19.8	40	100

不同加筋强度下分担比的计算结果见图 6。随着堆煤高度增加, 桩基荷载分担比在逐步增加; 随着采用的加筋体抗拉强度增大, 桩基荷载分担比也在增加。对于堆煤高度 30 m 时, 如果不采用加筋处理, 桩荷载分担比为 74.8%。如果加筋强度为 100 kN/m, 桩顶荷载分担比增加了 5.1%; 加筋强度增加至 200 kN/m, 桩的分担比总共增加了 6.5%; 如果进一步增加加筋强度至 300 kN/m, 桩的分担比总共增加了 7.4%。但对于较低高度的堆载, 加筋后荷载分担比的提升非常有限。在相同的土层条件下, 对于填方不到 10 m 的路

堤工程, 计算结果中加筋垫层对桩分担比的提高可能较小。事实上常用的考虑加筋体的简化计算模型仅考虑加筋体因变形造成的水平拉力, 忽略加筋体上下表面摩阻力提供的水平拉力, 即没有计入加筋体因摩擦所做的功, 是一种保守的计算。

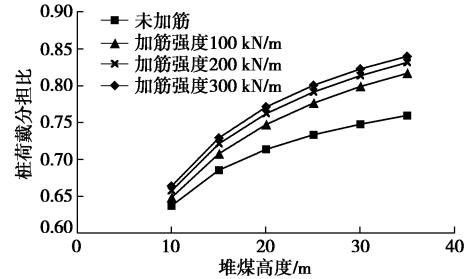


图 6 不同张拉强度下桩体荷载分担比随荷载的变化

Fig. 6 Pile efficacies under different tensile strengths of geogrid

不同加筋体张拉强度下桩身摩阻力分布及轴力图见图 7、8。可见, 本文在广义桩—广义土计算模型的基础上提出的考虑加筋垫层相互作用的计算方法是有效的, 随着加筋体抗拉强度的提高, 图 8 中桩顶轴力逐渐增大, 图 6 中桩身 -10~ -15 m 处的负摩阻力明显

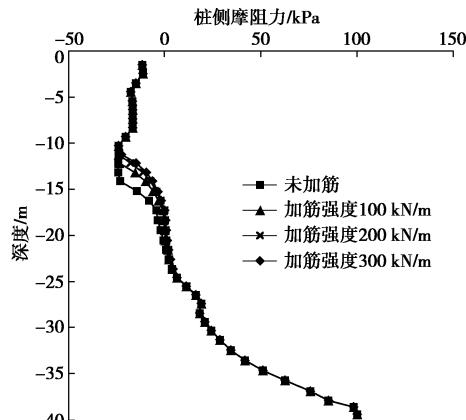


图 7 不同张拉强度下桩侧摩阻力分布情况(煤高 25 m)

Fig. 7 Pile frictions under different tensile strengths of geogrid

(coal height=25 m)

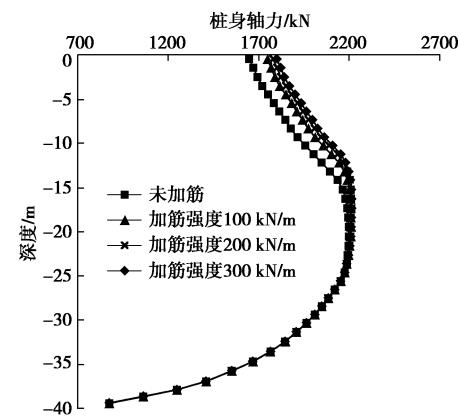


图 8 不同张拉强度下桩身轴力分布情况(煤高 25 m)

Fig. 8 Pile axial forces under different tensile strengths of geogrid (coal height=25 m)

减小。可见本文模型的计算结果中，桩顶加筋仅影响桩身上半部分的轴力和摩阻力。对于复杂的分层土，存在大量的变刚度的情况，本文算法的计算结果与预设的分层土参数相一致，如图 7 中桩顶处的淤泥质粉质黏土已达到极限摩阻力 15 kPa，可见本文方法数值稳定性较好，适用于复杂的分层土地基。

4 结 论

(1) 本文在广义桩 - 广义土物理模型的基础上，根据最小势能原理，提出了计算桩承式路堤的无约束数学规划模型。其目标函数采用已离散的广义势能方程，可采用下降迭代法求解。通过算例验证，该模型用于计算桩承式路堤是可行的，且在采用实测 $t-z$ 曲线的情况下计算结果与试验值较吻合。

(2) 通过计算加筋体水平受拉产生的应变能，提出了考虑加筋作用的广义势能方程，以该方程作为数学规划模型的目标函数，得到了加筋桩承式路堤的计算模型。通过算例验证，该方法用于计算加筋体与桩承式路堤基础的相互作用是有效的，且在较高堆载下效果显著。本文方法通过拼装整个系统的广义势能，无需考虑加筋垫层水平力和上提力的方向换算问题，使得模型可以更方便地添加不同方向的杆件或摩擦弹簧，具有良好的扩展性，为建立更加合理的桩 - 土 - 垫层 - 加筋体相互作用模型提供了一种途径。

参考文献：

- [1] ALAMGIR M, MIURA N, POOROOSHAB H B, et al. Deformation analysis of soft ground reinforced by columnar inclusions[J]. Computers and Geotechnics, 1996, **18**(4): 267 - 290.
- [2] 杨 涛. 路堤荷载下柔性悬桩复合地基的沉降分析[J]. 岩土工程学报, 2000, **22**(6): 741 - 743. (YANG Tao. Settlement analysis of composite ground improved by flexible floating piles under road embankment[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, **22**(6): 741 - 743. (in Chinese))
- [3] 李海芳. 路堤荷载下复合地基沉降计算方法研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2004. (LI Hai-fang. Study of settlement computation method of composite foundation under embankment[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2004. (in Chinese))
- [4] 沈 伟, 池跃君, 宋二祥. 考虑桩、土、垫层协同作用的刚性桩复合地基沉降计算方法[J]. 工程力学, 2003, **20**(2): 36 - 42. (SHEN Wei, CHI Yue-jun, SONG Er-xiang. Settlement calculation of composite ground with rigid piles including pile-soil-cushion interaction[J]. Engineering Mechanics, 2003, **20**(2): 36 - 42. (in Chinese))
- [5] 傅景辉, 宋二祥. 刚性桩复合地基工作特性分析[J]. 岩土力学, 2000, **21**(4): 335 - 339. (FU Jing-hui, SONG Er-xiang. Analysis of rigid pile composite foundation's working performance [J]. Geotechnical Mechanic, 2000, **21**(4): 335 - 339. (in Chinese))
- [6] CHEN R P, CHEN Y M, HAN J, et al. A theoretical solution for pile-supported embankments on soft soils under one-dimensional compression[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2008, **45**(5): 611 - 623.
- [7] 陈仁朋, 许 峰, 陈云敏, 等. 软土地基上刚性桩一路堤共同作用分析[J]. 中国公路学报, 2005, **18**(3): 7 - 13. (CHEN Ren-peng, XU Feng, CHEN Yun-min, et al. Analysis of interaction between rigid pile and embankments[J]. China Journal of Highway and Transport, 2005, **18**(3): 7 - 13. (in Chinese))
- [8] 刘吉福. 路堤下复合地基桩、土应力比分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, **22**(4): 674 - 677. (LIU Ji-fu. Analysis on pile-soil stress ratio for composite ground under embankment[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, **22**(4): 674 - 677. (in Chinese))
- [9] 楼晓明, 孙晓峰, 陈 广. 大面积路堤荷载下带桩帽桩的荷载传递分析[J]. 土木工程学报, 2009, **42**(2): 98 - 104. (LOU Xiao-ming, SUN Xiao-feng, CHEN Guang. Analysis on load transfer for capped pile under large area embankment[J]. China Civil Engineering Journal, 2009, **42**(2): 98 - 104. (in Chinese))
- [10] 徐立新. 桩承式路堤的工作机理研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2007. (XU Li-xin. Study on design and computation method of geosynthetic reinforced pile-supported embankment[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2007. (in Chinese))
- [11] 马 强, 郑俊杰, 张 军. 考虑桩间土支撑的桩承式加筋路堤理论分析[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2011, **39**(3): 30 - 33. (MA Qiang, ZHENG Jun-jie, ZHANG Jun. Theoretical analysis of GRPS embankment with the consideration of the supporting effect of the soil between piles[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural science edition), 2011, **39**(3): 30 - 33. (in Chinese))
- [12] 许 峰. 桩承式路堤的工作机理研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2004. (XU Feng. On the mechanism of piled embankment[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2004. (in Chinese))
- [13] American Petroleum Institute. Recommended practice for planning, designing and constructing fixed offshore platforms - working stress design[M]. Washington D C: API Publishing Services, 2000.