

DOI: 10.11779/CJGE201506020

# 层状饱和介质中瑞利波传播特性薄层分析方法

柴华友<sup>1</sup>, 张电吉<sup>1</sup>, 卢海林<sup>1</sup>, 杨典森<sup>2</sup>, 周春梅<sup>1</sup>

(1. 武汉工程大学资源与土木工程学院, 湖北 武汉 430073; 2. 中国科学院武汉岩土力学研究所岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

**摘 要:** 层状饱和半无限体中瑞利波传播特性研究对工程物理勘探及土性参数反演很重要, 传统的层传递矩阵或刚度矩阵分析方法需在复数域搜索瑞利波频率方程根, 不仅耗时, 收敛性也差。根据研究波长范围, 在底部半无限体某一深度设置刚性边界, 将层状介质离散成薄层, 建立研究平面应变状态下层状饱和介质中瑞利波传播特性薄层法分析模型。依据该模型, 频率方程根搜索问题可转换成矩阵特征值问题。根据瑞利波沿深度衰减特性, 从一组计算的特征值中筛选出与瑞利波模式对应特征值, 由特征值及相应特征向量得到各模式频率特性以及孔隙压力、骨架位移随深度变化。通过与饱和半无限体瑞利波解析解比较, 验证该模型可行性, 由此研究几种层状介质中瑞利波各阶模式的频率特性。分析方法对开展动力本构模型更复杂的层状介质中瑞利波传播特性研究也具有指导意义。

**关键词:** 薄层法; 饱和介质; 瑞利波; 频散特性; 特征值

**中图分类号:** TU435; P631.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2015)06-1132-10

**作者简介:** 柴华友(1965-), 男, 博士, 特聘教授, 从事波动测试技术及方法的教学和科研。E-mail: chy\_rsm@hotmail.com。

## Behavior of Rayleigh waves in layered saturated porous media using thin-layer method

CHAI Hua-you<sup>1</sup>, ZHANG Dian-ji<sup>1</sup>, LU Hai-lin<sup>1</sup>, YANG Dian-sen<sup>2</sup>, ZHOU Chun-mei<sup>1</sup>

(1. School of Resource and Civil Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430073, China; 2. State Key Laboratory of

Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

**Abstract:** Frequency behavior of Rayleigh waves in layered saturated poroelastic media is important for engineering geophysical prospecting and inversion of soil properties. The frequency equation of Rayleigh waves can be solved using the root searching algorithms in the conventional analysis method of the transfer or stiffness matrix. However, these algorithms are time-consuming in the complex domain and the root convergence is often poor. In this study, a rigid base is set at a certain depth of the half space which is estimated from the interested wavelength and the layers are discretized into a group of thin layers. The thin-layer model is then established to study the propagation behavior of Rayleigh waves in saturated poroelastic layered media under the plane strain conditions. In this model, the root searching problem is converted into the eigenvalue and eigenvector problem of matrices. The eigenvalues corresponding to the modes of Rayleigh waves can be sifted out from the calculated ones according to the attenuation of Rayleigh waves along depth. The frequency behavior, pore pressure and skeleton displacements of Rayleigh waves along depth can be calculated from the sifted eigenvalues and eigenvectors. The model developed is validated by comparing the numerical and the analytical results in the saturated poroelastic half space. The model is then used to study the frequency behavior of Rayleigh waves in several layered saturated porous half spaces. The method also provides some guidelines for investigating Rayleigh waves in layered media with more complex dynamic constitutive models.

**Key words:** thin-layer method; saturated porous medium; Rayleigh wave; frequency behavior; eigenvalue

## 0 引 言

相对于层状弹性单相固体半无限体, 饱和多孔介质中瑞利波传播特性研究起步较晚, 但由于其在土壤力学、地震学、环境修复、地球物理等科学和工程领域应用前景, 倍受广泛关注<sup>[1-2]</sup>。基于Biot建立的流体饱和多孔介质波传播理论, Deresiewicz<sup>[3]</sup>研究饱和多孔半无限体中瑞利波传播特性。研究表明: 与单相弹

性固体半无限体中瑞利波相比, 饱和半无限体中瑞利波具有频散特性及衰减特性, 因而也被称之为伪瑞利波(Pseudo-Rayleigh waves)<sup>[4-5]</sup>(为了方便, 文中仍采用“瑞利波”术语)。夏唐代等<sup>[6]</sup>研究了瑞利波位

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(41474113, 51474159); 武汉大学人才专项经费项目

收稿日期: 2014-07-16

移和孔隙水压力沿深度分布情况。陈龙珠等<sup>[7]</sup>分析了半空间饱和土中瑞利波相速度和衰减系数随频率、土渗透系数变化规律。黄茂松等<sup>[8]</sup>总结了国内外在饱和和多孔介质土动力学理论及数值研究一些进展。此外, 孔隙排列方式会影响饱和介质边界透水性<sup>[9]</sup>, 边界透水性也会影响瑞利波传播特性<sup>[4-5]</sup>。这些研究表明, 饱和介质中瑞利波具有较复杂的传播特性。

受地下水影响, 多孔半无限体容易形成干孔层+饱和半无限体这样的层状结构, 孔隙液体的低压缩性会导致干孔介质和下面的饱和介质间压缩性有较大差异。Philippacopoulos<sup>[10]</sup>用数值方法研究干沙厚度对瑞利波频率特性影响。Degrande等<sup>[11]</sup>用Powell混合法改进刚度矩阵行列式超越方程根搜索的速度及收敛性, 研究瑞利波在这种层状结构频率特性。夏唐代等<sup>[12]</sup>分析了弹性半无限体上饱和土透水系统与不透水系统间第一模态瑞利波频散曲线差别。

层状弹性介质瑞利波频散特性常用传递矩阵或其改进算法<sup>[13-14]</sup>。为了避免传递矩阵运算繁琐, 夏唐代等<sup>[15]</sup>用有限元法和解析法分析夹软层地基瑞利波频散特性。在饱和层状介质中, 瑞利波传播是衰减的, 即, 波数是复数。在这种情况下, 传递矩阵或其改进算法需要在复数域对矩阵行列式求解得到与瑞利波各模态对应的根。复数域的根搜索不仅计算耗时且收敛性难以保证<sup>[11]</sup>。为简化矩阵元素, Kausel等<sup>[16]</sup>在Lysmer和Waas研究基础上, 将弹性固体层离散。当划分的薄层厚度相对波长较小, 位移或应力参数在薄层内近似线性变化, 这样, 可以将矩阵中复杂的超越函数简化成代数。若层状介质具有刚性基或层底半空间用近轴波吸收边界来代替时, 还可将矩阵行列式求根的问题转换成求特征值问题<sup>[17-18]</sup>, 这种方法被用于层状或缓变弹性介质中瑞利波基阶、高阶模态波动特性及多模波场中模态间相互作用机理分析<sup>[19-24]</sup>。一些学者将薄层法应用到饱和介质动力分析<sup>[25-29]</sup>。相对各个方向离散的有限元法, 薄层法仅在深度方向离散, 具有较高的运算效率及精度。

为了避免传统层传递矩阵及刚度矩阵方法中矩阵元素为超越函数导致运算繁琐及在复数域对瑞利波频率方程的根搜索耗时及收敛性差缺点。本文开展如下5方面工作: ①基于Biot波动理论及虚功原理, 导出饱和和多孔介质薄层刚度矩阵; ②根据研究波长, 在底部半无限体某一深度位置设置人工刚性边界, 将根的搜索问题转换成求特征值问题; ③利用瑞利波在底部半无限体随深度衰减特性, 从计算的一组特征值、特征向量中筛选出与瑞利波对应的特征值、特征向量, 进而得到瑞利波的频率特性; ④与饱和半无限体瑞利

波频率特性的解析解比较, 验证薄层法研究饱和介质中瑞利波频率特性的可行性; ⑤在工程地球物理勘探使用的频率范围内(数Hz至数千Hz), 将薄层法应用于层状饱和介质各阶模态频率特性研究。这些研究有助于建立反演层状饱和介质土性参数数学模型及反演算法。

## 1 饱和介质薄层刚度矩阵

### 1.1 Biot波动理论

Biot本构方程<sup>[11]</sup>为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \delta_{ij} \sigma^f = 2\mu^s \varepsilon_{ij} + \lambda^s \delta_{ij} e - \alpha \delta_{ij} p, \quad (1a)$$

$$p = -\alpha M e - M w_{i,i}, \quad (1b)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} e &= u_{i,i}^s, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j}^s + u_{j,i}^s), \\ w_i &= n(u_i^f - u_i^s). \end{aligned} \right\} \quad (1c)$$

上标s表示固体骨架, f表示流体,  $\mu^s$  和  $\lambda^s$  是骨架的Lamé常数,  $n$  为孔隙率。

运动方程张量形式为

$$\mu^s u_{i,jj}^s + (\lambda^s + \mu^s + \alpha^2 M) u_{j,ji}^s + \alpha M w_{j,ji} = \rho \ddot{u}_i^s + \rho_f \ddot{w}_i, \quad (2a)$$

$$\alpha M u_{j,ji}^s + M w_{j,ji} = \rho_f \ddot{u}_i^s + m \ddot{w}_i + b * F(t) \dot{w}_i, \quad (2b)$$

式中,

$$\rho = n \rho_f + (1-n) \rho_s, \quad (2c)$$

$\rho_s$  和  $\rho_f$  分别表示固体颗粒和液体密度, 符号\*表示卷积, 函数  $F(t)$  的谱  $\hat{F}(\omega)$  用于描述流体惯性影响随着频率变化<sup>[2,9]</sup>, Biot系数  $\alpha$ ,  $M$ ,  $b$ ,  $m$  可以从多孔介质骨架、固体介质及流体的材料特性得到。

对运动方程作Helmholtz分解, 可分析P1, P2、剪切波(S波)及瑞利波(R波)在饱和介质的传播特性<sup>[6]</sup>。为了便于后面分析, 这里给出自由透水表面饱和半无限体中瑞利波频率方程:

$$2\sqrt{1-\frac{c^2}{c_s^2}} \left[ \sqrt{1-\frac{c^2}{c_{p,2}^2}} \frac{\zeta_1}{c_{p,2}^2} - \sqrt{1-\frac{c^2}{c_{p,1}^2}} \right] = \left( 2 - \frac{c^2}{c_s^2} \right) \left\{ \left( \frac{c_{p,2}^2}{c_{p,1}^2} \frac{\zeta_1}{\zeta_2} - 1 \right) - \left[ \left( \frac{\lambda}{2\mu} + 1 \right) \frac{c^2}{c_{p,1}^2} \right] \left( \frac{\zeta_1}{\zeta_2} - 1 \right) \right\}, \quad (3)$$

$$\text{式中, } \zeta_j = \alpha + \frac{(c_{p,j}^2 \rho_f - \alpha M)}{[M + c_{p,j}^2 (ib\hat{F}/\omega - m)]} \quad (j=1,2). \quad c_{p,1}, \quad c_{p,2}$$

及  $c_s$  分别是P1、P2和S波的相速度。

当频率  $\omega \rightarrow 0$ , P2波不存在, P1波和S波低频渐近相速度  $c_{p0}$  及  $c_{s0}$  为

$$\left. \begin{aligned} c_{p0} &= \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu + \alpha^2 M)}{\rho}} \\ c_{s0} &= \sqrt{\frac{\mu}{(1-n)\rho_s + n\rho_f}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

这样, 在低频极限情况下, 瑞利波频率方程 (3) 类似于弹性半无限体:

$$4\sqrt{1 - \frac{c_{R0}^2}{c_{p0}^2}}\sqrt{1 - \frac{c_{R0}^2}{c_{s0}^2}} = \left(2 - \frac{c_{R0}^2}{c_{s0}^2}\right)^2 \quad (5)$$

瑞利波相速度  $c_{R0}$  与剪切波速  $c_{s0}$  回归关系表达式:

$$c_{R0} \approx \frac{0.87 + 1.12\tilde{\nu}}{1 + \tilde{\nu}} c_{s0} \quad (6)$$

式中,  $\tilde{\nu} = \frac{\beta - 2}{2(\beta - 1)}$ ,  $\beta = (c_{p0}/c_{s0})^2$ 。

## 1.2 薄层刚度矩阵

平面应变下饱和介质层刚度矩阵元素含超越函数<sup>[30]</sup>。下面将层离散, 并基于虚功原理建立薄层矩阵来简化矩阵元素。薄层位移向量共有4个分量: 骨架位移  $u_i^s$  及比流量  $w_i = n(u_i^f - u_i^s)$  ( $i=1, 2$  分别对应  $x, z$ ), 但层面广义应力向量却只有3个分量: 总应力  $\sigma_x, \sigma_z$  及孔隙液体压力  $p$ 。由薄层上、下层面广义应力向量, 只能确定6个未知参数, 这样, 广义位移向量有一个位移分量是不独立的。对式 (2a) 作傅里叶变换, 结合式 (1b), 经过一些代数运算,  $\hat{w}_i$  可用  $\hat{p}_i$  及  $\hat{u}_i^s$  表示:

$$\hat{w}_i = \frac{\hat{p}_i}{(m\omega^2 - ib\hat{F}\omega)} - 9\hat{u}_i^s = \frac{9\hat{p}_i}{\rho_f\omega^2} - 9\hat{u}_i^s \quad (7)$$

式中,  $9 = \frac{\rho_f\omega^2}{(m\omega^2 - i\omega b\hat{F})}$ , 上标“ $\wedge$ ”表示频率域变量,

$\hat{p}_i$  表示孔隙压力对变量 ( $i=1, 2$  分别对应  $x, z$ ) 导数。

利用式 (7), 运动微分方程可用  $\hat{p}_i$  及  $\hat{u}_i^s$  表示为

$$\hat{\sigma}_{ij,j} + 9\hat{p}_{,i} = \gamma\hat{u}_i^s \quad (j=1, 2 \text{ 分别对应 } x, z), \quad (8a)$$

$$\hat{p}_{,ii} + \frac{\rho_f\omega^2}{9M}\hat{p} + \frac{\rho_f\omega^2(\alpha - 9)}{9}\hat{u}_{i,i}^s = 0 \quad (8b)$$

式中,  $\gamma = \omega^2(9\rho_f - \rho)$ 。

在薄层法中, 用下标表示层编号, 为了避免下标表示混乱, 将比流量分量  $w_z$  用  $W$  表示, 骨架的位移  $u_x^s, u_z^s$  分别用  $u, w$  表示。取第  $i$  层面广义位移向量  $\hat{u}_i = [\hat{p}_i, \hat{u}_i, \hat{w}_i]^T$ , 层面相应的广义应力向量  $\hat{s}_i = [\hat{W}_i, \hat{\sigma}_{xz,i}, \hat{\sigma}_{z,i}]^T$ 。孔隙水压力取压为正, 位移、外力取与坐标方向一致为正。

将层离散成一组薄层 (表面编号1), 见图1。当薄层厚度相对研究波长很小时 (譬如  $1/8 \sim 1/10$  波长), 薄层内广义位移可以用薄层界面广义位移线性插值。经插值后, 运动偏微分方程及边界条件不能精确满足,

存在残差。利用虚功原理, 薄层内残余应力

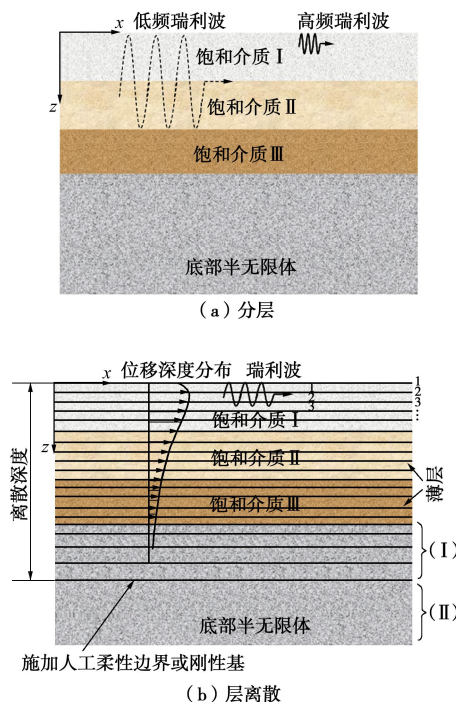


图1 层状饱和半无限体

Fig. 1 Layered porous half space

作的虚功为零。对第  $i$  薄层, 微分方程 (8a) 的弱形式可分别写成<sup>[29]</sup>

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} \delta \hat{u} \left( \frac{\partial \hat{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{xz}}{\partial z} + 9 \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} - \gamma \hat{u} \right) dz = 0 \quad (9a)$$

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} \delta \hat{w} \left( \frac{\partial \hat{\sigma}_z}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\tau}_{xz}}{\partial x} + 9 \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} - \gamma \hat{w} \right) dz = 0 \quad (9b)$$

式中,  $z_i$  及  $z_{i+1}$  分别表示第  $i$  薄层上、下层面位置。对式 (9a) 及 (9b) 作分部积分并利用应力 - 位移关系式 (1a) 可得

$$\begin{aligned} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left[ \delta \hat{u} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \delta \hat{u} \lambda \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x \partial z} - \alpha \delta \hat{u} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} - \mu \frac{\partial (\delta \hat{u})}{\partial z} \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} - \right. \\ \left. \mu \frac{\partial (\delta \hat{u})}{\partial z} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + 9 (\delta \hat{u}) \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} - \gamma \hat{u} (\delta \hat{u}) \right] dz = -(\delta \hat{u} \tau_{xz})|_{z_i}^{z_{i+1}}, \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left\{ -\frac{\partial (\delta \hat{w})}{\partial z} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right] + \alpha \frac{\partial (\delta \hat{w})}{\partial z} \hat{p} + \right. \\ \left. \delta \hat{w} \mu \left( \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} \right) + 9 (\delta \hat{w}) \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} - \gamma \hat{w} (\delta \hat{w}) \right\} dz = -(\delta \hat{w} \sigma_z)|_{z_i}^{z_{i+1}}. \end{aligned} \quad (10b)$$

右式是外力所做的虚功。式 (8b) 对变分  $\delta \hat{p}$  可得孔隙水压力弱形式, 考虑到比流量表达式 (7), 为了确保分部积分后出现变量  $\hat{W}$ , 将式 (8b) 两侧乘因子

$$\frac{9}{\rho_f \omega^2}, \text{ 分部积分后得}$$

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} \left[ \delta \hat{p} \frac{9}{\rho_f \omega^2} \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} - \frac{9}{\rho_f \omega^2} \frac{\partial (\delta \hat{p})}{\partial z} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \frac{1}{M} \delta \hat{p} \cdot \hat{p} + \right.$$

$$(\alpha - \beta)\delta\hat{p}\frac{\partial\hat{u}}{\partial x} + \alpha\delta\hat{p}\frac{\partial\hat{w}}{\partial z} + \beta\frac{\partial(\delta\hat{p})}{\partial z}\hat{w} \Big|_{z_i} dz = -(\delta\hat{p}\hat{W}) \Big|_{z_i}^{z_{i+1}}. \quad (10c)$$

右式是孔隙水压力发生相对位移后做的功。假设层内广义位移向量是层上下交界面的广义位移向量线性插值, 即假设

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_i \hat{\mathbf{U}}_i, \quad (11)$$

式中, 向量  $\hat{\mathbf{U}}_i = [\hat{\mathbf{u}}_i^T, \hat{\mathbf{u}}_{i+1}^T]^T$ , 线性插值形函数矩阵为

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \frac{z_{i+1}-z}{h_i} & 0 & 0 & \frac{z-z_i}{h_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z_{i+1}-z}{h_i} & 0 & 0 & \frac{z-z_i}{h_i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z_{i+1}-z}{h_i} & 0 & 0 & \frac{z-z_i}{h_i} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

式中,  $h_i = z_{i+1} - z_i$ 。

将式 (10a), (10b) 及 (10c) 用矩阵形式表示为

$$\left( \mathbf{A}_i \frac{d^2 \hat{\mathbf{U}}_i}{dx^2} + \mathbf{B}_i \frac{d \hat{\mathbf{U}}_i}{dx} - \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{U}}_i \right) = -\hat{\mathbf{P}}_i, \quad (13a)$$

式中, 广义外力向量  $\hat{\mathbf{P}}_i = [-\hat{\mathbf{s}}_i^T, \hat{\mathbf{s}}_{i+1}^T]^T$ 。

由水平向波传播一般表达式  $\hat{\mathbf{U}}(x, z) = \hat{\mathbf{U}}(z) \exp(-ikx)$ , 式 (13a) 可写成

$$(k^2 \mathbf{A}_i + ik \mathbf{B}_i + \mathbf{C}_i) \hat{\mathbf{U}}_i = \hat{\mathbf{P}}_i. \quad (13b)$$

第  $i$  薄层各子矩阵  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$  及  $\mathbf{C}_i$  见附录 (附录中子矩阵对应广义位移向量以自由度而非层面排序)。若将层面广义位移、应力向量改写成  $\hat{\mathbf{u}}_i = [\hat{p}_i, \hat{u}_i, \hat{w}_i]^T$ ,

$\hat{\mathbf{s}}_i = [i\hat{W}_i, \hat{\sigma}_{xz,i}, i\hat{\sigma}_{z,i}]^T$ , 式 (13b) 可重写为

$$(k^2 \mathbf{A}_i + k \bar{\mathbf{B}}_i + \mathbf{C}_i) \hat{\mathbf{U}}_i = \hat{\mathbf{P}}_i, \quad (14)$$

式中,  $\bar{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{B}_{12} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_{12}^T & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{23}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 。相较于元素含波数超越函数的层刚度矩阵, 薄层刚度矩阵简化成波数二次多项式, 系数矩阵仅是与层材料特性参数及频率有关的简单代数式。

## 2 总刚度矩阵构筑

在构筑总刚度矩阵时。利用透水自由表面边界条件、薄层交界面混合体积流量、位移、应力连续条件及底部半无限体刚度矩阵, 可得到总刚度矩阵若总刚度矩阵具有式 (14) 的形式, 求根问题可以转换成二次特征值问题, 特征值对应于波数, 特征向量对应模式的骨架位移及孔隙水压力。虽然薄层刚度矩阵具有波数二次多项式 (14), 但由于薄层下方半无限体随刚度矩阵元素含复杂的有理式, 总刚度矩阵仍不具有这种简洁的代数表达形式。由于瑞利波在底部半无限体随深度快速衰减, 当深度  $z_b$  相对波长达到一定值时,

瑞利波位移趋于零, 若在此处置人工边界, 人工边界对瑞利波传播特性影响可以忽略。将底部半无限体分成两部分 (I 和 II), 见图1 (b), 在 I 和 II 之间交界面  $z_b$  处设置人工刚性边界, 对 I 部分仍进行薄层离散。刚性边界条件为:  $\mathbf{u}|_{z=z_b} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{w}|_{z=z_b} = \mathbf{0}$ 。在透水自由表面及刚性基条件下, 层状介质总刚度矩阵可表示为

$$(k^2 \mathbf{A} + k \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{C}) \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{P}}, \quad (15a)$$

矩阵  $\mathbf{A}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\mathbf{C}$  是薄层矩阵  $\mathbf{A}_i$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_i$ ,  $\mathbf{C}_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ,  $N$  为薄层数) 集成, 集成后的总广义位移、外力向量:  $\hat{\mathbf{U}} = [0, \hat{u}_1, i\hat{w}_1, \hat{p}_2, \hat{u}_2, i\hat{w}_2, \dots, \hat{p}_N, \hat{u}_N, i\hat{w}_N, \hat{p}_{N+1}, 0, 0]^T$ ,  $\hat{\mathbf{P}} = [-i\hat{W}_1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, 0, (\hat{\sigma}_{xz})_{N+1}, i(\hat{\sigma}_z)_{N+1}]^T$ 。

删去总刚度矩阵第一行、列及最后两行、列后, 式 (15a) 简化为

$$(k^2 \mathbf{A} + k \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{C}) \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}. \quad (15c)$$

这样, 可将总刚度矩阵行列式根搜索的问题转换成二次特征值问题, 式 (15c) 中:

$$\hat{\mathbf{U}} = [\hat{u}_1, i\hat{w}_1, \hat{p}_2, \hat{u}_2, i\hat{w}_2, \dots, \hat{p}_N, \hat{u}_N, i\hat{w}_N, \hat{p}_{N+1}]^T. \quad (16a)$$

若将广义位移向量以自由度而非层面排序, 即

$$\hat{\mathbf{U}} = [\hat{p}_2, \hat{p}_3, \dots, \hat{p}_N, \hat{p}_{N+1}, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_{N-1}, \hat{u}_N, i\hat{w}_1, i\hat{w}_2, \dots, i\hat{w}_{N-1}, i\hat{w}_N]^T = [\hat{\mathbf{p}}^T, \hat{\mathbf{u}}^T, i\hat{\mathbf{w}}^T]^T. \quad (16b)$$

式 (15c) 二次特征值问题又可转换成标准的一次特征值问题:

$$(k^2 \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{C}}) \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad (17)$$

$$\text{式中: } \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_{12}^T & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{B}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & -\mathbf{B}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{13}^T & \mathbf{B}_{23}^T & \mathbf{C}_{33} \end{bmatrix}.$$

矩阵中子矩阵是由薄层子矩阵集成。

若不考虑广义位移、外力向量与孔隙水压力有关的项, 上式退化成弹性介质的薄层刚度矩阵。由于广义位移中孔隙压力与位移有不同量纲, 与孔隙压力有关的子矩阵  $\mathbf{A}_{11}$ ,  $\mathbf{B}_{12}$ ,  $\mathbf{C}_{11}$ ,  $\mathbf{C}_{13}$  元素相对矩阵  $\mathbf{A}_{22}$ ,  $\mathbf{A}_{33}$ ,  $\mathbf{B}_{23}$ ,  $\mathbf{C}_{22}$ ,  $\mathbf{C}_{33}$  元素很小, 矩阵是病态的。矩阵元素小的扰动容易导致特征值及特征向量出现大的扰动。为了平衡矩阵元素量级差别, 由式 (7), 将广义位移向量改写为

$$\hat{\mathbf{U}} = \left[ \frac{i}{\eta} \tilde{\mathbf{p}}^T, k \tilde{\mathbf{u}}^T, i \tilde{\mathbf{w}}^T \right]^T, \quad (18)$$

式中,  $\eta = (m\omega^2 - i\omega b \hat{F})$ , 这样,  $\tilde{\mathbf{p}}^T / \eta$  与比流量分量具有相近量级。

## 3 薄层分析法验证

当人工刚性基在底部半无限体设置深度与瑞利波

波长之比  $z_b/\lambda_R \approx 2 \sim 5$ , 可确保刚性基对瑞利波频率特性影响很小。一般取层厚/波长之比小于1/10。由式(16b)可知有3N个自由度。由特征方程(17)可得6N个特征值, 其中一半代表中心向外传播波, 另一半代表远处向中心传播的波。其中一个(半无限体)或数个(层状半无限体)波位移在底层半无限体随深度快速衰减, 且在抵达底部人工边界处趋于零, 这些波对应于瑞利波, 筛选出这些特征值就计算出瑞利波的相速度及衰减。

以水饱和Mol砂土材料为例, 饱和介质材料特性参数  $\rho_s$  为2650 kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_f$  为1000 kg/m<sup>3</sup>,  $k_0$  为10.214  $\mu\text{m}^2$ ,  $\eta_d$  为0.001 Pa·s,  $\mu^s$  为111.86 MPa,  $\lambda^s$  为223.6 MPa,  $\nu^s$  为1/3,  $K_b$  为298.3 MPa,  $K_s$  为36.5 GPa,  $K_f$  为2.22 GPa,  $\alpha_\infty$  为1.789,  $n$  为0.388,  $\alpha$  为1,  $M$  为5.67 GPa<sup>[31]</sup>。其中,  $K_b$ ,  $K_s$  及  $K_f$  分别是骨架、固体颗粒及流体的体模量;  $\eta_d$  及  $k_0$  分别是动态流体黏性及渗透系数;  $\alpha_\infty$  是与孔隙几何有关的迂回度。

在复数域, 对方程(3)求根得到瑞利波相速度及衰减理论曲线。薄层计算结果与解析解比较见图2。在低频域, 误差很小, 精度很高, 随频率增加, 误差增加。这是由于低频波长较大, 相应的薄层厚度与瑞利波长比值较小, 薄层法线性插值精度高, 随着频率增加, 波长越小, 相应的薄层厚度与波长比值较大, 线性插值精度降低。降低薄层厚度可提高计算精度, 但薄层数量增加会相应增加计算量, 需兼顾计算精度及计算效率。

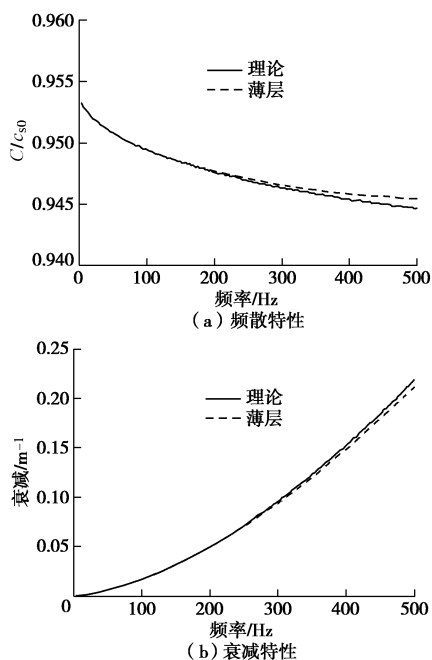


图2 饱和半无限体中瑞利波频率特性薄层法与解析法结果比较

Fig. 2 Comparison between numerical and analytical frequency behaviors of Rayleigh waves in saturated poroelastic half space

## 4 层状饱和介质

下面以层骨架参数及固体颗粒体模量变化, 其它参数不变为例, 用薄层法分析前几阶模态瑞利波频率特性及其渐近特征。

层状饱和介质层厚分别取为  $h_1=1\text{ m}$ ,  $h_2=4\text{ m}$ ,  $h_3=10\text{ m}$ ,  $h_4=\infty$ 。假设层材料特性参数  $\chi(=\mu^s, \lambda^s, K_s)$  成比例变化, 层其它参数同前。情形I层材料参数随层递增, 参数比  $\chi_1 : \chi_2 : \chi_3 : \chi_4 = 0.4 : 0.6 : 0.8 : 1.0$ 。由式(4)和(6)计算各层介质P1、S及R波相速度低频渐近, 这有助于分析层状介质瑞利波频散曲线渐近特征。层1, 2, 3及底部半无限体P1、S及R波相速度低频渐近分别为:  $c_{p_0}^1 = 1532\text{ m/s}$ ,  $c_{s_0}^1 = 149.2\text{ m/s}$ ,  $c_{R_0}^1 \approx 142.1\text{ m/s}$ ;  $c_{p_0}^2 = 1597\text{ m/s}$ ,  $c_{s_0}^2 = 182.7\text{ m/s}$ ,  $c_{R_0}^2 \approx 174\text{ m/s}$ ;  $c_{p_0}^3 = 1637\text{ m/s}$ ,  $c_{s_0}^3 = 217.3\text{ m/s}$ ,  $c_{R_0}^3 \approx 206.9\text{ m/s}$ ;  $c_{p_0}^4 = 1745\text{ m/s}$ ,  $c_{s_0}^4 = 235.9\text{ m/s}$ ,  $c_{R_0}^4 \approx 224.667\text{ m/s}$ 。上标表示层编号或底部半无限体。情形II浅部夹杂硬层, 层参数比  $\chi_1 : \chi_2 : \chi_3 : \chi_4 = 0.6 : 0.8 : 0.6 : 1.0$ 。情形III浅部夹杂软层, 层参数比  $\chi_1 : \chi_2 : \chi_3 : \chi_4 = 0.8 : 0.6 : 0.8 : 1.0$ 。对这3种不同分层情形, 在分析频率范围(0~500 Hz), 瑞利波有多个模态, 前四阶模态散曲线及衰减曲线见图3~5, 图中细点线为底部半无限体瑞利波频散。图6~8为3种情形下前四阶模态在100 Hz及200 Hz处归一化竖直向位移实部随深度变化(虚部具有类似的特征), 由此分析模态在各层能量对其频率特性的影响。由图6~8可以看出: 与饱和半无限体中瑞利波能量集中在一个波长范围不同, 层状介质中模态在各层能量分配与层刚度剖面及模态阶数有关。层中瑞利波能量越大, 该层材料特性对模态传播特性影响越大。一般来说, 频率越低, 波长越长, 模态能量分布越深, 高阶模态能量分布比低阶模态深。由于低频瑞利波波长较长, 其大部分能量集中在底部半无限体, 模态传播特性主要由底部半无限体材料特性参数决定, 瑞利波各模态相速度低频渐近于底部半无限体瑞利波相速度。对情形I, 随着频率增加, 瑞利波波长减小, 能量向浅部各层集中, 见图6, 浅部各层材料特性参数影响瑞利波传播。当波长相对表层厚度很小时, 表层对短波长波作用类似于半无限体, 模态相速度高频渐近于表层介质瑞利波速。由于基阶模态能量分布较高阶模态浅, 基阶模态最先渐近于表层介质瑞利波波速, 见图3(a)。对情形II, 随着频率增加, 基阶模态相速度渐近于172 m/s, 接近表层介质瑞利波速, 但高阶模态能量主要分布在第三层, 见图7, 高阶模态传播速度主要受第三层

介质材料特性参数影响, 模态相速度渐近于183 m/s, 接近该层剪切波速, 见图4(a)。由于高阶模态能量在表层很微弱, 这些模态在表面无法检测到。对情形III, 基阶模态能量主要集中于第二软层, 高阶模态能量也大部分分布在第二层, 见图8, 模态相速度趋于183 m/s, 接近该层的剪切波速, 见图5(a)。

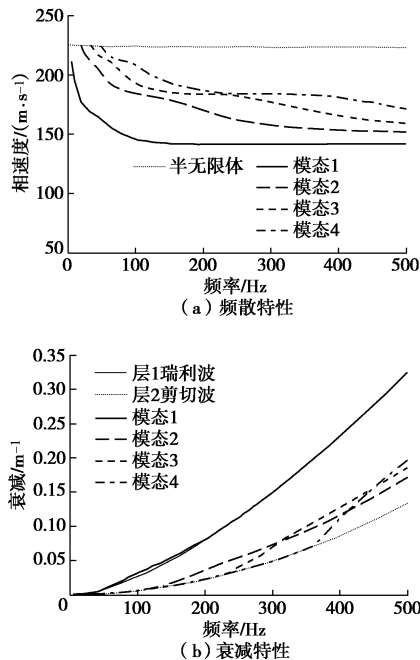


图3 情形I 瑞利波前四阶模态频率特性

Fig. 3 Frequency behaviors of first four modes of Rayleigh waves for Case I

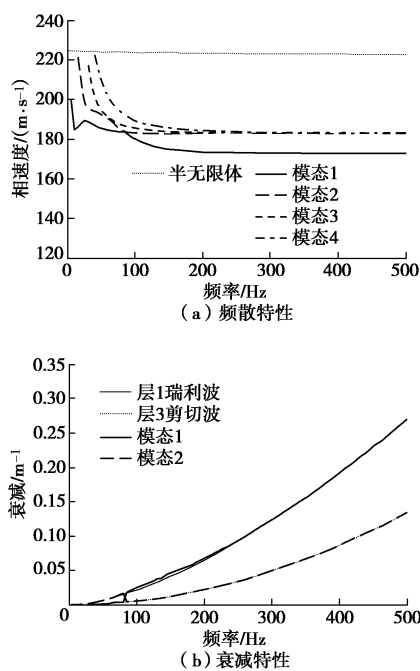


图4 情形II 瑞利波前四阶模态频率特性

Fig. 4 Frequency behaviors of first four modes of Rayleigh waves for Case II

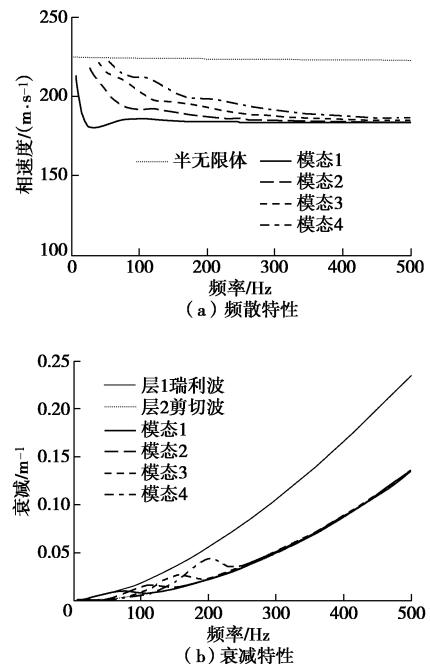


图5 情形III 瑞利波前四阶模态频率特性

Fig. 5 Frequency behaviors of first four modes of Rayleigh waves for Case III

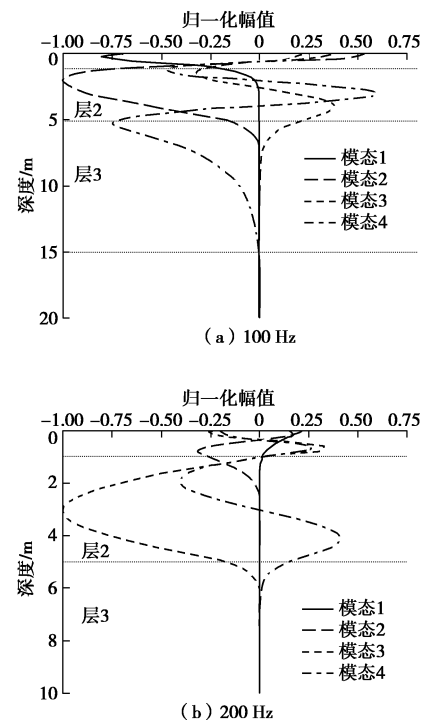


图6 情形I 瑞利波前四阶模态归一化竖向位移实部

Fig. 6 Normalized real vertical displacements of first four modes of Rayleigh waves for Case I

模态衰减特性也取决于模态能量在分层的分布。对情形I, 基阶模态(即模态1)能量分布较浅, 随着频率增加, 波长减小, 基阶模态衰减与表层介质瑞利波衰减基本重合, 见图3(b), 图中细实线为表层介质瑞利波衰减曲线, 细虚线为第二层介质S波衰减

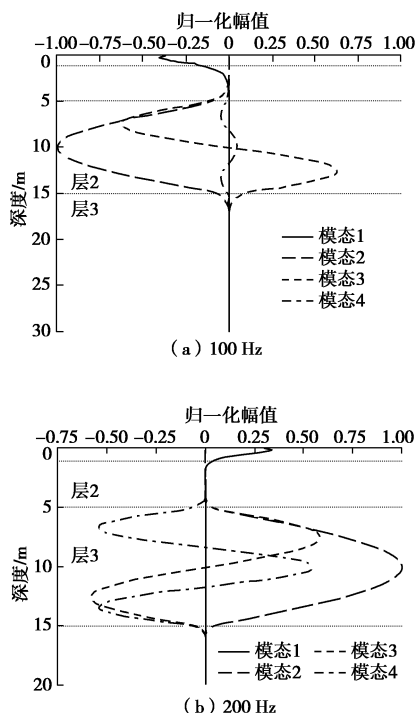


图 7 情形 II 中瑞利波前四阶模态归一化竖向位移实部  
Fig. 7 Normalized real vertical displacements of first four modes of Rayleigh waves for Case II

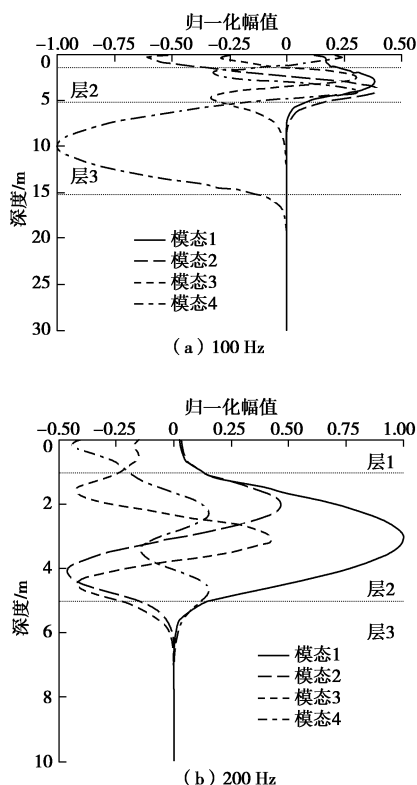


图 8 情形 III 瑞利波前四阶模态归一化竖向位移实部  
Fig. 8 Normalized real vertical displacements of first four modes of Rayleigh waves for Case III

曲线。高阶模态能量在层 1~3 均有分布, 衰减受这些层的 S 波衰减特性影响, 它们比基阶模态衰减慢。由

于各模态层能量分布随频率变化, 高阶模态衰减无规律可循。对情形 II, 基阶模态能量集中于表层, 与表层介质瑞利波衰减特性基本重合, 模态 2 能量集中于第三层, 衰减由该层剪切波衰减决定, 模态 2 与第三层介质 S 波衰减特性基本相同, 模态 3 和 4 与模态 2 衰减规律基本一致, 见图 4 (b)。对情形 III, 在低频处, 各模态能量在层 1~3 均有分布, 这些层的剪切波衰减特性影响这些模态衰减, 高频处, 基阶模态及高阶模态能量集中于层 2, 层 2 的剪切波衰减特性决定这些模态衰减, 见图 5 (b)。

## 5 结 论

(1) 在饱和介质中, 瑞利波具有衰减特性, 瑞利波波数是复数, 需在复数域对瑞利波频率方程求根, 特别是在层状介质, 瑞利波有多个模态, 模态数量随频率增加, 复数域多根搜索, 不仅搜索收敛性较差, 而且部分根容易遗漏。

(2) 对饱和层离散, 当薄层的厚度相对波长很小, 薄层刚度矩阵可用波数二次多项式表示, 系数矩阵元素是薄层材料特性及频率代数式。薄层法仅在深度方向对层状介质离散, 保持了在波水平传播方向连续性, 特别适合对沿水平方向波传播特性研究。相对全离散的有限元方法, 这种半离散的方法又具有较高的计算效率及精度。

(3) 在底部半无限体设置人工刚性基, 当设置深度相对瑞利波波长够大时, 刚性基对瑞利波频率特性影响可以忽略。通过对层状半无限体薄层化及设置人工刚性基, 复数域中瑞利波频率方程根搜索问题可以转换成一次或二次特征值问题, 从而避免了复数运算繁琐和根搜索困难。

(4) 利用瑞利波在半无限体随深度快速衰减特性, 从计算的一组特征值 (对应于波数) 中筛选出与瑞利波各模态对应的特征值, 由复波数的实部得到瑞利波相速度, 虚部得到衰减。由相应特征向量可得到对应模态骨架位移, 孔隙水压力随深度变化。

(5) 模态在层能量分布可以解释其频率特征特征渐近规律。

## 参考文献:

- [1] 赵海波, 陈树民, 李来林, 等. 流体饱和度对 Rayleigh 波传播影响研究[J]. 中国科学 (物理学力学天文学), 2012, 42(2): 148 - 155. (ZHAO Hai-bo, CHEN Shu-min, LI Lai-lin, et al. Influence of fluid saturation on Rayleigh wave propagation[J]. Scientia Sinica (Physica Mechanica & Astronomica), 2012, 42(2): 148 - 155. (in Chinese))



- [2] KAREL N D. Multi-component acoustic characterization of porous media[D]. Delf: Technische Universiteit Delft, 2011.
- [3] DERESIEWICS H. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: IV. Surface waves in a half-space[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1962, **52**(3): 627 – 638.
- [4] FENG S, JOHNSON D L. High-frequency acoustic properties of a fluid/porous solid interface, I. New surface mode[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1983, **73**(3): 906 – 914.
- [5] ALBERS B. Porous media: modeling and application to wave propagation[M]. Graz: Course at the Technical University of Graz, 2008.
- [6] 夏唐代, 陈龙珠, 吴世明, 等. 半空间饱和土中瑞利波特性[J]. 水利学报, 1998, **10**(2): 47 – 53. (XIA Tang-dai, CHEN Long-zhu, WU Shi-ming, et al. Characteristics of Rayleigh waves in a saturated half-space soil[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1998, **10**(2): 47 – 53. (in Chinese))
- [7] 陈龙珠, 黄秋菊, 夏唐代. 饱和地基中瑞利波的弥散特性. 岩土工程学报, 1998, **20**(3): 6 – 9. (CHEN Long-zhu, HUANG Qiu-ju, XIA Tang-dai. Dispersion of Rayleigh wave in a saturated soil ground[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, **20**(3): 6 – 9. (in Chinese))
- [8] 黄茂松, 李进军. 饱和多孔介质土动力学理论与数值解法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2004, **32**(7): 851 – 856. (HUANG Mao-song, LI Jin-jun. Dynamics of fluid-saturated porous media and its numerical solution[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2004, **32**(7): 851 – 856. (in Chinese))
- [9] GERASIK V. Energy transport in saturated porous media[D]. Waterloo: the University of Waterloo, 2011.
- [10] PHILIPPACOPOULOS A J. Waves in a partially saturated layered half-space: Analytic formulation[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1987, **77**(5): 1838 – 1853.
- [11] DEGRANDE G, ROECK G D, BROECK P V D, et al. Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media[J]. International Journal of Solids and Structures, 1998, **35**(34/35): 4753 – 4778.
- [12] 夏唐代, 颜可珍, 孙鸣宇. 饱和土层中瑞利波的传播特性. 水利学报, 2004(11): 1 – 5. (XIA Tang-dai, YAN Ke-zhen, SUN Ming-yu. Propagation of Rayleigh wave in saturated soil layer[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004(11): 1 – 5. (in Chinese))
- [13] LU L Y, ZHANG B X. Analysis of dispersion curves of Rayleigh waves in the frequency-wavenumber domain [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2004, **41**(4): 583 – 598.
- [14] 凡友华, 刘家琦, 肖柏勋. 计算瑞利波频散曲线的快速矢量算法[J]. 湖南大学学报 (自然科学版), 2002, **29**(5): 25 – 30. (FAN You-hua, LIU Jia-qi, XIAO Bai-xun. Fast vector-transfer algorithm for computation of Rayleigh wave dispersion curves[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences Edition), 2002, **29**(5): 25 – 30. (in Chinese))
- [15] 夏唐代, 陈云敏, 吴世明. 匀质软夹层地基瑞利波弥散特性[J]. 振动工程学报, 1993, **6**(1): 42 – 50. (XIA Tang-dai, CHEN Yun-min, WU Shi-ming. Rayleigh wave dispersion in soil profiles where a softer layer is trapped between harder layers[J]. Journal of vibration Engineering, 1993, **6**(1): 42 – 50. (in Chinese))
- [16] KAUSEL E, ROËSSET J M. Stiffness matrices for layered soils[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1981, **71**(6): 1743 – 1746.
- [17] KAUSEL E. The thin-layer method in seismology and earthquake engineering[M]// Southampton: WIT Press, 2001.
- [18] CHAI H Y, PHOON K K, WEI C F, LU Y F. Analysis of effects of active sources on observed phase velocity based on the thin-layer method[J]. Journal of Applied Geophysics, 2011, **73**(1): 49 – 58.
- [19] 柴华友, 白世伟, 刘明贵, 等. 瑞利波特性刚度矩阵研究[J]. 岩土力学, 2006, **27**(2): 209 – 213. (CHAI Hua-you, BAI Shi-wei, LIU Ming-gui, et al. Analysis of behaviour of Rayleigh waves by stiffness matrix method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, **27**(2): 209 – 213. (in Chinese))
- [20] 柴华友, 韦昌富. 刚度缓变系统中瑞利波特性[J]. 岩土力学, 2009, **30**(9): 2545 – 2551. (CHAI Hua-you, WEI Chang-fu. Behavior of Rayleigh waves in media with smoothly varying stiffness profile[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, **30**(9): 2545 – 2551. (in Chinese))
- [21] 柴华友, 韦昌富, 白世伟. 表面波有效相速度的近似分析方法[J]. 岩土力学, 2008, **29**(1): 87 – 93. (CHAI Hua-you, WEI Chang-fu, BAI Shi-wei. Approximate approach to analyzing effective velocity of surface waves[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, **29**(1): 87 – 93. (in Chinese))
- [22] 柴华友, 张电吉, 韦昌富, 等. 层状地基中表面波有效相速度[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(6): 892 – 898. (CHAI Hua-you, ZHANG Dian-ji, WEI Chang-fu, LU Ying-fa. Effective phase velocity of surface waves in layered soil media[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **31**(6): 892 – 898. (in Chinese))



- [23] 柴华友, 韦昌富, 张电吉, 等. 分层参数对表面波有效相速度影响[J]. 水利学报, 2010, **41**(6): 677 - 683. (CHAI Hua-you, WEI Chang-fu, ZHANG Dian-ji, et al. Effects of soil parameters on effective phase velocity of surface waves[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2010, **41**(6): 677 - 683. (in Chinese))
- [24] CHAI H Y, CUI Y J, WEI C F. A parametric study of effective phase velocity of surface waves in layered media[J]. Computers and Geotechnics, 2012, **44**: 176 - 184.
- [25] NOGAMI T, KAZAMA M. Dynamic response analysis of submerged soil by thin layer element method[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1992, **11**(1): 17 - 26.
- [26] NOGAMI T, KAZAMA M. Thin layer element method for dynamic soil-structure interaction analysis of axi-symmetric structure in submerged soil[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1997, **16**(5): 337 - 351.
- [27] BOUGACHA S, TASSOULAS J L, ROËSSET J M. Analysis of foundations on fluid-filled poroelastic stratum[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1993, **119**(8): 1632 - 1648.
- [28] BOUGACHA S, TASSOULAS J L. Seismic analysis of gravity dams I: modelling of sediments[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1991, **117**(8): 1826 - 1837.
- [29] BOUGACHA S, TASSOULAS J L. Dam-water-sediment-rock systems: seismic analysis[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2006, **26**(6): 680 - 693.
- [30] SENJUNTICHA T, RAJAPAKSE R K N D. Exact stiffness method for quasi-statics of a multi-layered poroelastic medium[J]. International Journal of Solids and Structures, 1995, **32**(11): 1535 - 1553.
- [31] DEGRANDE G, ROECK G D. An absorbing boundary condition for wave propagation in saturated poroelastic media part I: formulation and efficiency evaluation[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1993, **12**(7): 411 - 421.

附录:

第*i*薄层刚度矩阵子矩阵, (略去Lamé系数上标)

$$\begin{aligned}
 A_i &= \frac{h_i}{6} \begin{bmatrix} 2\frac{\rho_i}{\omega^2 \rho_{f,i}} & \frac{\rho_i}{\omega^2 \rho_{f,i}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_i}{\omega^2 \rho_{f,i}} & 2\frac{\rho_i}{\omega^2 \rho_{f,i}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(\lambda_i + 2\mu_i) & (\lambda_i + 2\mu_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_i + 2\mu_i) & 2(\lambda_i + 2\mu_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_i & \mu_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_i & 2\mu_i \end{bmatrix}_i \\
 &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}_i, B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\alpha_i - \rho_i)\frac{h_i}{3} & (\alpha_i - \rho_i)\frac{h_i}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha_i - \rho_i)\frac{h_i}{6} & (\alpha_i - \rho_i)\frac{h_i}{3} & 0 & 0 \\ -(\alpha_i - \rho_i)\frac{h_i}{3} & -(\alpha_i - \rho_i)\frac{h_i}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\lambda_i - \mu_i) & \frac{1}{2}(\lambda_i + \mu_i) \\ -(\alpha_i - \rho_i)\frac{h_i}{6} & -(\alpha_i - \rho_i)\frac{h_i}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\lambda_i + \mu_i) & \frac{1}{2}(\lambda_i - \mu_i) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda_i - \mu_i) & \frac{1}{2}(\lambda_i + \mu_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\lambda_i + \mu_i) & -\frac{1}{2}(\lambda_i - \mu_i) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & 0 \\ -B_{12}^T & 0 & B_{23} \\ 0 & -B_{23}^T & 0 \end{bmatrix}_i,
 \end{aligned}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} \frac{\vartheta_i}{\omega^2 \rho_{f,i}} \frac{1}{h_i} - \frac{1}{M_i} \frac{h_i}{3} & -\frac{\vartheta_i}{\omega^2 \rho_{f,i}} \frac{1}{h_i} - \frac{1}{M_i} \frac{h_i}{6} & 0 & 0 & \frac{(\alpha_i + \vartheta_i)}{2} & -\frac{(\alpha_i - \vartheta_i)}{2} \\ \frac{\vartheta_i}{\omega^2 \rho_{f,i}} \frac{1}{h_i} - \frac{1}{M_i} \frac{h_i}{6} & \frac{\vartheta_i}{\omega^2 \rho_{f,i}} \frac{1}{h_i} - \frac{1}{M_i} \frac{h_i}{3} & 0 & 0 & \frac{(\alpha_i - \vartheta_i)}{2} & -\frac{(\alpha_i + \vartheta_i)}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\mu_i}{h_i} + \frac{\gamma_i h_i}{3} & -\frac{\mu_i}{h_i} + \frac{\gamma_i h_i}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu_i}{h_i} + \frac{\gamma_i h_i}{6} & \frac{\mu_i}{h_i} + \frac{\gamma_i h_i}{3} & 0 & 0 \\ \frac{(\alpha_i + \vartheta_i)}{2} & \frac{(\alpha_i - \vartheta_i)}{2} & 0 & 0 & \frac{(\lambda_i + 2\mu_i)}{h_i} + \frac{\gamma_i h_i}{3} & -\frac{(\lambda_i + 2\mu_i)}{h_i} + \frac{\gamma_i h_i}{6} \\ -\frac{(\alpha_i - \vartheta_i)}{2} & -\frac{(\alpha_i + \vartheta_i)}{2} & 0 & 0 & -\frac{(\lambda_i + 2\mu_i)}{h_i} + \frac{\gamma_i h_i}{6} & \frac{(\lambda_i + 2\mu_i)}{h_i} + \frac{\gamma_i h_i}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} \\ 0 & C_{22} & 0 \\ C_{13}^T & 0 & C_{33} \end{bmatrix}_i.$$

当考虑骨架材料滞回阻尼, 上面子矩阵中实Lamé系数 $\lambda, \mu$ 用复Lamé系数 $\lambda^*, \mu^*$ 代替。

### 《岩土工程学报》征订启事

《岩土工程学报》创办于1979年, 是我国水利、土木、力学、建筑、水电、振动等六个全国性学会联合主办的学术性科技期刊。由南京水利科学研究院承办, 国内外公开发行。主要刊登土力学、岩石力学领域中能代表当今先进理论和实践水平的科学研究和工程实践成果等。报道新理论、新技术、新仪器、新材料的研究和应用。欢迎国家自然科学基金项目及其他重要项目的研究成果向本刊投稿, 倡导和鼓励有实践经验的作者撰稿, 并优先刊用这些稿件。主要栏目有黄文熙讲座、综述、论文、短文、工程实录、焦点论坛、讨论和简讯等。

本刊被《中文核心期刊要目总览》连续多年确认为核心期刊, 并在建筑类核心期刊中位于前列; 本刊被科技部“中国科技论文统计源期刊”(中国科技核心期刊)及“中国科技论文与引文数据库”收录; 本刊被中国科学院“中国科学引文数据库”收录; 本刊被“中国知网”全文收录及“中国学术期刊综合评价数据库”收录; 本刊被“工程索引 Ei Compendex 数据

库”和“日本科学技术振兴机构数据库 JST”等国际数据库收录。本刊网址(www.cgejournal.com)全文发布本刊所有刊载文章。

本刊读者对象为土木建筑、水利电力、交通运输、矿山冶金、工程地质等领域中从事岩土工程及相关专业的科研人员、设计人员、施工人员、监理人员和大专院校师生。

本刊为月刊, A4开, 双栏排版, 192页, 每月中旬出版, 每期定价25元, 全年300元。

本刊国际标准刊号 ISSN 1000-4548, 国内统一刊号 CN 32-1124/TU, 国内发行代号 28-62, 国外发行代号 MO 0520。欢迎广大读者在全国各地邮局订购, 也可在编辑部订购(不另收邮费)。编辑部订购地址: 南京虎踞关34号《岩土工程学报》编辑部; 邮编: 210024; 联系电话: 025-85829534, 85829543, 85829553, 85829556; 传真: 025-85829555; E-mail: ge@nhri.cn。

(本刊编辑部)