

DOI: 10.11779/CJGE201506008

内含圆柱域热源的非饱和土介质水热耦合作用的 SPH 数值模拟

陈佩佩, 白 冰*

(北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

摘要: 光滑粒子流体动力学(SPH)作为一种拉格朗日型无网格粒子方法, 已经成功地应用于多种类型耦合问题的求解。基于 SPH 方法探索求解二维求解域内含有圆形局部热源的水热耦合问题, 其中揭示了程序前处理阶段已有粒子布置方案存在的不足。针对所要求解的具体问题, 使用一种新的粒子布置方案以弥补数值计算过程中的精度损失, 该粒子布置方案中径向粒子间距严格相等, 环向间距大致等于径向粒子间距。通过对水热耦合方程数学特性的分析, 表明了 SPH 算法可以用于此类耦合问题的数值模拟。最后, 基于 SPH 算法自行编制的程序对一种非饱和土介质内含有局部热源的水热耦合问题进行数值模拟, 对非饱和土介质中热能传输以及水分迁移的规律进行了分析。

关键词: SPH 算法; 粒子布置方案; 水热耦合; 热能传输; 水分迁移

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2015)06-1025-06

作者简介: 陈佩佩(1987-), 男, 博士研究生, 主要从事岩土工程等方面的科研工作。E-mail: wschpp007@163.com。

Numerical simulation of moisture-heat coupling in porous media with circular heat source by SPH method

CHEN Pei-pei, BAI Bing

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: The smoothed particle hydrodynamics (SPH), as a Lagrange meshless particle method, has been successfully adopted to solve various types of coupling problems. Based on the SPH method, a moisture-heat coupling problem in two-dimensional domain with a circular localized heat source is solved, the shortcomings of the existing particle arrangement scheme are revealed at the preprocessing stage in program. According to the specific problem, a new particle arrangement scheme is proposed to compensate for the loss of accuracy in numerical calculation process, where the radial particle spacing exactly equals and the circumferential spacing is roughly equal to the radial one. The analysis of mathematical properties of the moisture-heat coupling equation shows that the SPH algorithm can be used for the numerical simulation of this type of coupled problem. Finally, the program based on the SPH algorithm is worked out to solve the moisture-heat coupling problem of an unsaturated soil with localized heat source, and the heat transfer and moisture migration regularity in the unsaturated soil medium are analyzed.

Key words: SPH algorithm; particle arrangement scheme; moisture-heat coupling; heat transfer; moisture migration

0 引言

非饱和土介质是一种由固、液、气三相组成的多孔介质。岩土介质内重力势、温度势、基质势和压力势等都会引起介质内的热能传输和水分迁移特性的改变, 人类的工程活动和生产生活引起的多孔介质内物质迁移动力的变化是相互影响的, 它们之间的耦合作用是近年来引起人们关注的热点之一。大量的工程实践表明, 水分迁移会引起路基承载力下降和稳定性降低, 从而引起一系列的工程病害, 这些安全隐患的主要原因之一就是地表非饱和土体中的水热耦合作用引起的土体中应力场和变形场的改变^[1]。事实上研究非

饱和土体中由热能传输及水分迁移规律, 在化学工程、农业科学以及环境岩土工程领域有十分重要意义。比如, 近年来岩土深处核废料处置过程中的放热现象; 在田间自然条件下, 日夜温差变化会对土壤水分运动有影响。因此, 开展非饱和多孔介质中的水热耦合作用研究很有必要。

光滑粒子流体动力学 (SPH) 是一种拉格朗日形

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51279002, 51478034); 高等学校博士学科点专项科研基金博导类课题 (20130009110021); 中央高校基本科研业务费专项资金项目 (2012YJS083)

收稿日期: 2014-08-11

*通讯作者

式的无网格粒子法, 最初提出是用于解决三维开放空间的天体物理学问题, 现已被广泛地研究和扩展^[2-4]。SPH 方法的早期应用主要是集中在流体力学的相关领域, Brookshaw^[5]将 SPH 方法首先应用于热传导问题后, 国内外很多学者对 SPH 方法在热的传导方面应用研究开展了许多工作; Chen 等^[6]针对 SPH 算法的边界缺陷提出了一种修正方案, 得到了 CSPM 法, 然后进行一系列的数值验证; Jeong 等^[7]将二阶偏微分热传导方程转化为两个等效的一阶微分方程组后, 采用 SPH 方法进行了求解; Cleary 等^[8]将 SPH 方法应用于材料属性不连续的物质中热量传递问题的求解, 并进行了求解精度的分析; Rook 等^[9]采用隐式时间积分方案, 基于 SPH 方法计算了导热问题, 将结算结果与传统数值方法和解析解作了对比; Jiang 等^[10]利用 SPH 法对多相多组分材料中的热能传输和流体流动进行了研究; 最近, Vishwakarma 等^[11]采用 SPH 方法研究了非傅里叶热传导问题, 并进行了数值试验。与传统的基于网格的数值方法不同, SPH 方法求解域中的粒子之间是没有联系的, 可以任意分布以离散求解域形成计算所需要的框架。因为函数近似过程中没有网格, 避免了网格的存在而导致的一些数值问题, 如求解域几何形状复杂、网格畸变、材料破坏等。

本研究基于 SPH 算法的独特优势, 针对所求解的具体问题提出一种新的求解域离散方案以弥补数值计算过程中的精度损失, 分析了水热耦合方程的数学特性, 然后采用自行编制的程序对一种非饱和土介质内有圆形局部热源的水热耦合问题进行数值模拟, 给出热能传输及水分迁移的变化规律。

1 SPH 方法的基本思想

对于 SPH 方法, 任意函数在某点 (即某个粒子) 上值的核近似根据狄拉克函数的性质, 可由下式给出定义^[2, 4]:

$$A(r_i) = \int_{\Omega} A(r) \delta(r_i - r) dV, \quad (1)$$

式中, $A(r)$ 是场函数, r 是位置矢量, Ω 是积分区域, $\delta(r_i - r)$ 是狄拉克函数, dV 是积分微元, 如果场函数在 Ω 内有定义且连续, 则积分形式的表达式 (1) 是严格成立的。

用核函数 $W(r - r_i, h)$ 代替式 (1) 中的狄拉克函数, 得到场函数 $A(r)$ 在 r_i 处的积分形式的核近似表达式^[2, 4]:

$$A(r_i) \approx \int_{\Omega} A(r) W(r_i - r, h) dV, \quad (2)$$

式中, 常参数 h 是核函数的光滑长度, 它确定了核函数的影响区域, 系数 k 乘以光滑长度后的 kh 是核函数的支持域, 它确定了核函数的作用范围, 在作用范围内核函数的值大于零, 在作用范围外核函数的值始终为零, 可视核函数的作用范围为其定义域。 $W(r - r_i, h)$ 表示定义在点 r_i 的核函数在 r 处的值, 它是 r 到 r_i 距离的函数, 是空间坐标 x, y, z 的多元函数。若 r 到 r_i 的距离小于 kh , 即 r 在核函数的作用范围内, 核函数的值大于零。因为核函数没有狄拉克函数的挑选性, 因此式 (2) 只能是近似式。

SPH 算法里函数的离散形式 (即级数求和) 粒子近似定义为对相关粒子 i 积分区域内所有粒子的加权求和, 即^[2, 12]

$$A(r_i) \approx \sum_{j=1}^n A(r_j) W(r_i - r_j, h) \frac{m_j}{\rho_j}, \quad (3)$$

式中, $A(r_j)$ 是第 j 点对应函数值, m_j 为第 j 粒子点质量, ρ_j 为密度, 用质量和密度比 m_j/ρ_j 表示第 j 点对应体积, $W(r_i - r_j, h) m_j/\rho_j$ 是第 j 点对应的权重。有时为书写方便, 有如下记号 $W_{ij} = W(r_{ij}) = W(r_i - r_j, h)$ 。

SPH 算法的粒子近似可以用图 1 示意, 其中虚线表示的圆是核函数的作用范围 (即支持域) 边界。

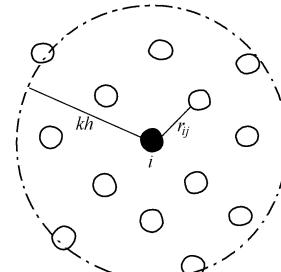


图 1 粒子近似示意图

Fig. 1 Schematic diagram of particle approximation

若要得到场函数 $A(r)$ 关于 x 偏导数在点 r_i 的值, 只需将式 (3) 中核函数对 x 求偏导数, 在加权求和即可^[2]:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x} \approx \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial x_i} \frac{m_j}{\rho_j}, \quad (4)$$

式中, A_i 表示 $A(r_i)$, 核函数的偏导数表示 $W(r - r_j, h)$ 对 x_i 的偏导数, 即有 $W(r_{ij}, h) = W(r_i - r_j, h)$ 。

若要得到场函数 $A(r)$ 关于 x 二阶偏导数在点 r_i 处的值, 将式 (3) 中核函数对 x_i 两次求导后在加权求和即可, 可得到^[2]

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} \approx \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial^2 W(r_{ij}, h)}{\partial x_i^2} \frac{m_j}{\rho_j}. \quad (5)$$

式 (5) 形式的二阶导数的 SPH 粒子近似在实际应用中会出现一些问题, 首先是它对粒子无序性非常敏感, 当相关粒子 i 周围的粒子分布杂乱无章, 不均匀时, 式 (5) 的精度非常低; 其次, 对于热传递这类问题, 因为核函数二阶导数的性质, 会得到粒子 j 是否会向 i 传递热量仅依赖于两粒子之间距离, 这是违反物理规律的。因此, 对二阶导数的 SPH 粒子近似形式更多的采用下式^[4]:

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} \approx \sum_{j=1}^n \frac{2m_j}{\rho_j} \frac{x_{ij}}{r_{ij}^2} A_j \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial x_i}, \quad (6)$$

式中, $x_{ij} = x_i - x_j$, $A_{ij} = A_i - A_j$, $r_{ij} = r_i - r_j$ 。

2 SPH 粒子布置方案

作为一种完全的无网格法, 在计算之前用一组任意分布的粒子系统表示求解域, 粒子的分布不受理求解域几何形状的限制, 粒子之间也是没有网格连接而相互独立存在的, 通常这一步在数值计算中被称为区域离散化, 也即是前处理阶段, 在用有限元求解时用网格划分求解域, 去掉网格只保留网格节点, 这些网格节点没有网格连接而组成的节点系统表示的求解域在本质上和 SPH 算法中的粒子系统是一样的。虽然原则上讲 SPH 方法的拉格朗日性质允许其粒子可以任意分布, 但考虑到粒子需要承载初始物理量以及离散计算域形成数值计算框架, 布置粒子应该遵循一定的规则, 这是保证 SPH 算法的计算精度和稳定性的重要要求, 因此对于所要求解的问题求解域的离散至关重要。

到目前为止没有一个统一的粒子布置方案可以适用于所有问题, 总的原则是粒子分布应该是均匀的。常见的粒子布置方案如图 2 (a) 和图 3 (a) 所示。

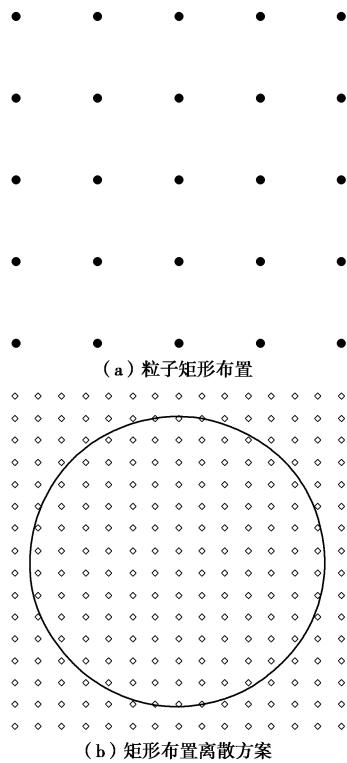


图 2 粒子矩形布置及离散圆形域方案

Fig. 2 Rectangular arrangement of particles and discrete scheme of circle domain

以往文献一般采用矩形布置粒子的方案^[2, 7-8] (图 2 (a)), 其做法是将粒子沿各向等距地分布于整个求解域内, 是最常用的初始布点方式, 它简单方便, 对计算域的划分很均匀。虽然在前处理阶段程序非常容易实施, 但是出现零能模式的可能性很大, 而且对于本文所要研究求解域内含有圆形局部热源问题的热源

域不能准确离散。图 2 (b) 是矩形方案离散圆形局部热源示意图, 从中可以明显看出热源边界呈现严重的锯齿现象。

对于交错布置方案 (图 3 (a)), 虽然可以降低出现零能模式的概率, 然而也不能很好地模拟具有特定几何边界的问题, 在离散求解域过程中边界锯齿现象非常突出, 在数值模拟过程中用编程方式直接布置粒子也没有矩形方案便利。图 3 (b) 给出了交错布置方案离散局部热源区域, 很显然效果也不是很理想。

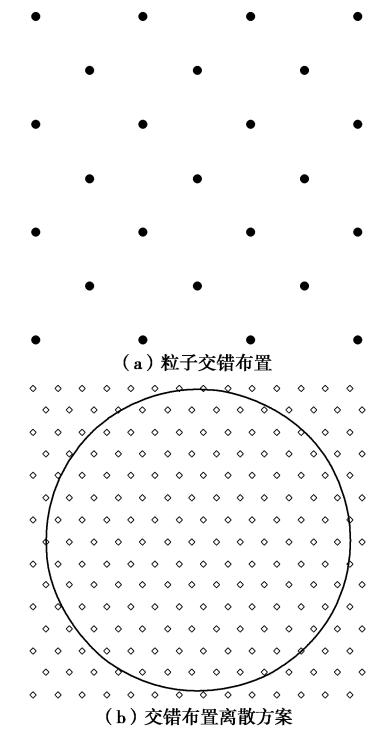


图 3 粒子交错布置及离散圆形域方案

Fig. 3 Staggered arrangement of particles and discrete scheme of circle domain

为了提高数值模拟的计算精度, 本文采用一种环形粒子布置方案, 如图 4 所示用来模拟平面二维内含圆形热源的水热耦合问题。图中的实心粒子系统代表热源作用区域, 空心粒子系统代表无热源区域, 这种粒子布置方案在程序前处理过程中实施简单, 只需添加一个粒子坐标转换子程序即可。最重要的是这种布置方案可以精确离散圆形局部热源区域, 每一环上的粒子径向间距严格相等, 尽管粒子的环向间距并不是

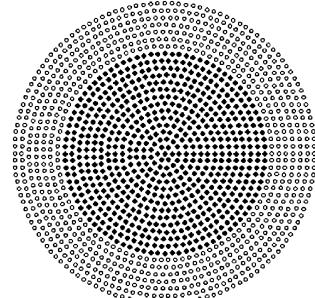


图 4 环形布置离散方案

Fig. 4 Discrete scheme of annular arrangement of particles

严格相等的, 这种布置方案的粒子分布是均匀的。

3 非饱和土介质水热耦合控制方程

3.1 水热耦合方程的基本形式

假定空间二维非饱和土介质满足如下假定: ①土体均匀连续, 且为各向同性体; ②非饱和土中水分迁移均以液态形式进行, 不考虑水的固相; ③非饱和流体符合达西定律; ④热能传输满足傅里叶定律; ⑤不考虑水分迁移过程中重力项的影响^[1, 13]。在有热源作用的情况下, 非饱和土介质中的水热耦合的控制方程在平面直角坐标系为^[13-14]

$$m \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla \theta) - \rho L \nabla \cdot (D_{ww} \nabla w) + \phi, \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot (D_T \nabla \theta) + \nabla \cdot (D_w \nabla w). \quad (8)$$

式中 ∇ 表示二维拉普拉斯算子; θ 表示温度增量, $\theta = T_c - T_0$, T_c 为现时温度, T_0 为初始绝对温度; m 为介质的总热容, $m = \rho c$, ρ 和 c 为土体密度和比热容; K 为热传导系数; ϕ 为热源强度; D_{ww} 表示等温条件下的蒸发系数; L 表示蒸发潜热; w 为体积含水率增量, $w = w_1 - w_i$, w_1 为现时体积含水率, w_i 为初始体积含水率; D_T 为温度诱致的水分扩散系数; D_w 为等温条件下的水分扩散系数。

忽略蒸发现象对水分迁移和热能传输的影响 (即假定 $L=0$), 并假定介质内的总热容为常数, 则控制方程 (7) 和 (8) 可以简化为

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla \theta) + \phi, \quad (9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot (D_T \nabla \theta) + \nabla \cdot (D_w \nabla w), \quad (10)$$

式中, λ 为热扩散系数, $\lambda = K/m$ 。

3.2 耦合方程的数学性质

水热耦合方程组可以用来描述非饱和土介质中的热能传输及温度作用下的水分迁移, 由傅里叶定律推导得到的热能平衡方程中温度变化率只与热的传导有关, 忽略了水分的影响。由达西定律得到的水分迁移方程中体积含水率的变化率与水分迁移和温度变化相关, 因此水热耦合方程实际上是单向耦合的^[1]。即温度变化与水分迁移无关, 而体积含水率变化受温度分布的影响。

描述水热运动的热能方程和连续性方程等偏微分方程, 像任何偏微分方程一样, 都有特定的数学特性, 它们之间数学性质的差异往往是相应的物理现象的本质差异在数学上的表现, 这就意味着不同类型的方程具有不同的数学特性, 相同类型的偏微分方程有共同的数值求解方法。根据数理方程中偏微分方程的分类, 方程 (9) 是抛物型的, 而且是齐次的, 因为它没有耦合关系, 所以在给定的定解条件下可以求出; 求出方

程(9)得到场函数 θ 后对其关于空间变量求二阶导数, 然后代入方程 (10), 得到的方程关于场函数 w 也是抛物型的, 只不过它是非其次的, 场函数 θ 的导数项即是非齐次项, 同样在给定的定解条件下可以求解。这就为本文对非饱和土介质中水热耦合现象可以进行 SPH 数值模拟提供了理论依据和求解思路。

3.3 求解抛物型偏微分方程的数值验证

经典的抛物型偏微分方程是热传导方程, 为验证 SPH 算法求解的可行性和有效性, 取一维无界区域作用有局部热源作为算例, 其中热源作用范围为 $-0.5 \sim 0.5$ m, 热源强度为 $5^{\circ}\text{C}/\text{s}$, 求解域初始温度是 0°C , 热扩散系数为 $0.01 \text{ m}^2/\text{s}$, 此问题的解析解为

$$T(x, t) = \int_0^t \int_{-0.5}^{0.5} \frac{5}{0.2\sqrt{\pi(t-t')}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{0.04(t-t')}\right] dx' dt'.$$

程序实施中取粒子间距 0.005 m, 时间步长 0.0001 s, 采用了高斯核函数, 核函数光滑长度取为粒子间距长度。

通过对 $t=0.1, 0.5, 1.0, 1.5$ s 的温度分布特征的对比, 从图 5 中可以发现 SPH 解和解析解曲线吻合的很好, 这就说明了 SPH 方法可以解抛物型偏微分方程, 这个数值试验也是本文数值模拟的基础。

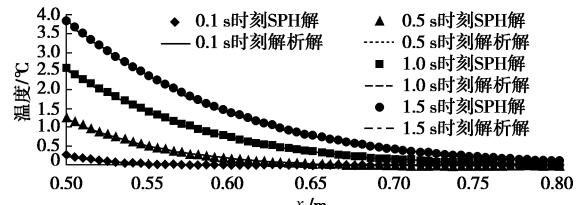


图 5 不同时刻 SPH 解和解析解的对比

Fig. 5 Comparison between SPH and analytic solutions at different time

4 算例计算

4.1 算例物性参数

半无限求解域内有半径 $R=0.5$ m 的圆柱形热源, 热源强度 $\phi=2 \times 10^{-4}^{\circ}\text{C}/\text{s}$, 非饱和土介质的物性参数为: $T_0=20^{\circ}\text{C}$, θ_i 为 0.25% , D_w 为 $1.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, D_T 为 $1 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$, λ 为 $1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。距半无限求解域表面很深的某平面上的水分迁移和热能传输现象可以用二维轴对称水热耦合控制方程描述。

4.2 水热耦合方程的 SPH 离散及程序结构

由于本算例可以简化为二维空间轴对称问题, 所要求解的物理场函数都是标量函数, 然而水热耦合方程的离散是在平面直角坐标系下进行的, 而非基于极坐标将控制方程写成等效的 SPH 格式, 这其中的主要因素是目前核函数都是在直角坐标系提出的, 因此不便将极坐标系的控制方程离散^[15]; 但是这并不妨碍相关问题的求解, 只需要添加一个子程序将极坐标下的

离散粒子点信息转换到直角坐标系下, SPH 程序主循环过程中的计算相应的在直角坐标系下完成。因为二维空间轴对称问题只与径向变量有关, 在计算过程径向等距的取粒子进行标记, 并输出相关计算信息便可完成二维空间轴对称问题计算。

将非饱和土的物理参数代入式(9)、(10), 根据式(6)的粒子近似表达式, 分别得到了式(9)、(10)的 SPH 公式为

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \approx 10^{-6} \sum_{j=1}^n \frac{2m_j \theta_{ij}}{\rho_j r_{ij}^2} \left(x_{ij} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial x_i} + y_{ij} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial y_i} \right), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} \approx 10^{-8} \sum_{j=1}^n \frac{2m_j \omega_{ij}}{\rho_j r_{ij}^2} \left(x_{ij} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial x_i} + y_{ij} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial y_i} \right) + \\ 1.5 \times 10^{-6} \sum_{j=1}^n \frac{2m_j \omega_{ij}}{\rho_j r_{ij}^2} \left(x_{ij} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial x_i} + y_{ij} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial y_i} \right). \quad (12) \end{aligned}$$

求解域内每一个粒子处都会得到对应的上述两个 SPH 粒子近似表达式, 通过这两个表达式可以求得对应粒子处的温度和体积含水率的时间变化率。

SPH 算法数值模拟一般是在拉格朗日框架下以初值问题的形式实现, 可以应用标准的时间积分法来获得下一时间步的场变量, 在程序实施过程中的时间步长与求解结果是紧密相连的。时间积分过程的主循环中涉及光滑函数及其导数的计算, 最近相邻粒子对的搜索, 边界处理, 空间导数的计算, 场函数变化率的计算等模块。程序是结构化的, 可以很容易根据具体问题的要求进行修改或插入子程序, 也可以很容易地扩展到其他修正形式的 SPH 近似格式的应用, 仅仅需要对粒子近似作相应的恰当处理即可。图 6 所示为本文数值模拟问题采用的程序结构示意图。

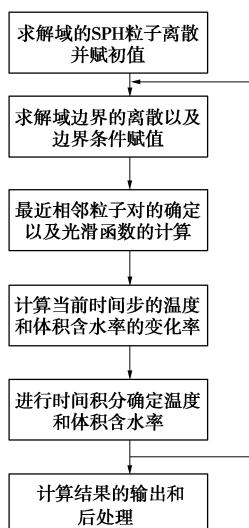


图 6 SPH 串行程序结构图

Fig. 6 Structure of SPH serial program

4.3 计算结果分析

图 7, 8 给出了热源作用下温度和体积含水率随时间的分布和演化特点(图 7, 8 中的 r/d 表示距离热源

中心的距离和热源直径之比)。由图 7 可见, 对于常热源强度而言, 离热源附近一定范围内温度上升很快, 随着时间的推移, 热源产生的热量使介质温度不断升高, 随着热能不断地向远处输送和传导, 离热源较远处的介质温度也不断升高。正是由于温度的非稳态演化, 将导致非饱和土介质中水分的迁移和体积含水率的不断变化。

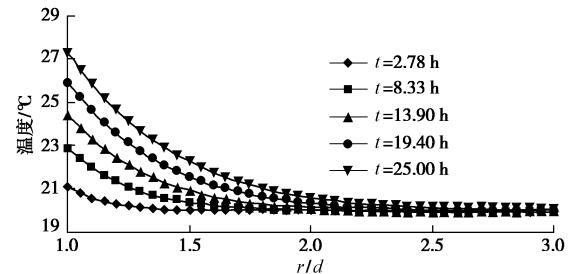


图 7 不同时刻温度分布特征

Fig. 7 Characteristics of temperature distribution at different time

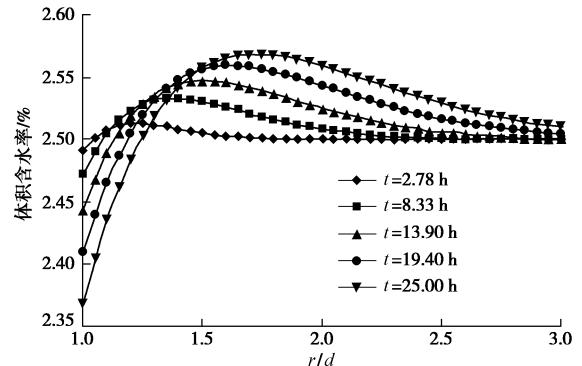


图 8 不同时刻体积含水率的分布特征

Fig. 8 Characteristics of volumetric moisture content at different time

由图 8 可以看出, 离热源较近的一定范围内体积含水率较初始时刻下的低, 这是因为热源作用下介质温度场的改变加速了水分向远处迁移的缘故, 随着热源附近温度的不断升高, 这种温度诱致的水分迁移使热源附近体积含水率不断降低, 而在离热源较远处的体积含水率出现峰值现象正是水分迁移的累积效应的体现。随着时间的推进, 峰值会向远处不停地运动, 而介质中温度趋于稳定后, 体积含水率峰值会消失而产生稳定的体积含水率场。

图 9, 10 给出了距热源不同距离处温度和体积含水率随时间的演化过程(图 9, 10 中的 R 和 r 分别表示热源半径和距热源中心的距离)。由图 9 可见, 距离热源越近, 在热源的作用下温度越高, 而且随着时间的演化温度会越来越高。由图 10 可见, 在热源边缘附近, 体积含水率不断下降, 而在较远处, 起初体积含水率保持初值不变, 时间到达一定时刻后会出现峰值。距离热源越远峰值出现的时间越晚, 体积含水率曲线也越平缓。

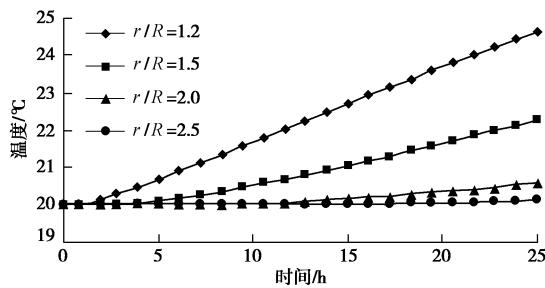


图 9 温度随时间的演化特征

Fig. 9 Evolution of temperature with time

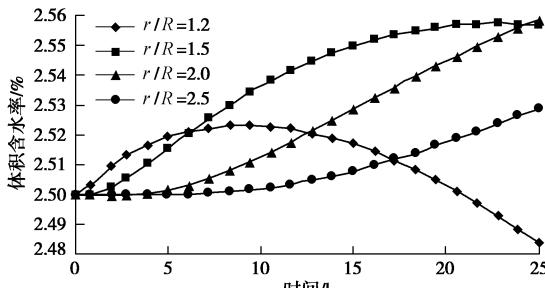


图 10 体积含水率随时间的演化特征

Fig. 10 Evolution of volumetric moisture content with time

5 结 论

(1) 针对现有求解域粒子布置方案离散圆形域存在的不足, 用一种新的粒子离散方法应用于本文所研究的问题中, 以弥补数值模拟中函数近似计算框架品质不高带来的精度损失, 高品质的求解域离散是任何数值计算的必然要求。

(2) 从数理方程角度对水热耦合控制方程组进行数学特性分析, 判别出方程所属偏微分方程的类别, 得到 SPH 算法求解此类型方程的求解思路, 并针对一个算例编写程序进行数值试验验证了算法的可行性和有效性, 从而为进一步的计算奠定了基础。

(3) 采用 Fortran 语言编写的程序代码, 计算得到了不同时刻, 多孔介质中温度和体积含水率的分布和演化特征。离热源近的地方温度上升越快, 在温度梯度作用下, 热能不断地向远处传输引起离热源较远处介质的温度升高。温度场的非稳态变化诱致了介质中水分向热源远处的迁移, 导致了热源附近水分的不断减少, 离热源较远处体积含水率经历先增高后降低的过程, 水分迁移过程中的这种现象是水分累积的效应, 这和非饱和土中热源作用下的温度演化特征相对应的。

参考文献:

- [1] 白冰, 刘大鹏. 非饱和介质中热能传输及水分迁移的数值积分解[J]. 岩土力学, 2006, 27(12): 2085–2089. (BAI Bing, LIU Da-peng. Numerical integral solutions of heat transfer and moisture transport in unsaturated porous media[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(12): 2085–2089. (in Chinese))

- [2] MONAGHAN J J. Smoothed particle hydrodynamics[J]. Reports on Progress in Physics, 2005, 68(8): 1703–1759.
- [3] EMILY M R, ALEXANDRE M T, CRISTINA A. A novel method for modeling Neumann and Robin boundary conditions in smoothed particle hydrodynamics[J]. Computer Physics communications, 2010, 181(12): 2008–2023.
- [4] MONAGHAN J J. Smoothed particle hydrodynamics and its diverse applications[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2012, 44(1): 323–346.
- [5] BROOKSHAW L. A method of calculating radiative heat diffusion in particle simulations[J]. Proceedings Astronomical Society of Australia, 1985, 6(2): 207–210.
- [6] CHEN J K, BERAUN J E, CARNEY T C. A corrective smoothed particle method for boundary value problems in heat conduction[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 46(2): 231–252.
- [7] JEONG J H, JHON M S, HALOW J S, et al. Smoothed particle hydrodynamics: applications to heat conduction[J]. Computer Physics Communications, 2003, 153(1): 71–84.
- [8] CLEARY P W, MONAGHAN J J. Conduction modeling using smoothed particle hydrodynamics[J]. Journal of Computational Physics, 1999, 148(1): 227–264.
- [9] ROOK R, YILDIZ M, DOST S. Modeling transient heat transfer using SPH and implicit time integration[J]. Numerical Heat Transfer, Part B, 2007, 51(1): 1–23.
- [10] JIANG F M, SOUSA A C M. Smoothed particle hydrodynamics simulation of effective thermal conductivity in porous media of various pore structures[J]. Journal of Porous Media, 2010, 13(11): 951–960.
- [11] VISHWAKARMA V, DAS A K, DAS P K. Analysis of non-Fourier heat conduction using smoothed particle hydrodynamics[J]. Applied Thermal Engineering, 2011, 31(14/15): 2963–2970.
- [12] ZHANG G M, BATRA R C. Modified smoothed particle hydrodynamics method and its application to transient problems[J]. Computational Mechanics, 2004, 34(2): 137–146.
- [13] BAI B, GUO L J, HAN S. Pore pressure and consolidation of saturated silty clay induced by progressively heating/cooling[J]. Mechanics of Materials, 2014, 75: 84–94.
- [14] THOMAS H R, KING S D. Three-dimensional heat, moisture and air transfer in unsaturated soils[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1998, 22(2): 75–95.
- [15] LIU M B, LIU G R. Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2010, 17(1): 25–76.