

DOI: 10.11779/CJGE201506006

不排水加载条件下 K_0 固结饱和砂土失稳预测

吕玺琳^{1, 2}, 钱建固^{1, 2}, 黄茂松^{1, 2}

(1. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092)

摘 要: 基于二阶功准则及变形分叉理论, 建立了分散性失稳和应变局部化失稳的理论判别准则, 对 K_0 固结不排水加载条件下饱和砂土的失稳特性进行了理论研究。分析结果表明, 三轴应力状态下, 土体表现为分散性失稳模式, 应变局部化则不会发生。在试样初始状态较密实的情况下, 由于相变作用, 土体能够保持稳定, 直至达到塑性极限破坏。在平面应变状态下, 分散性失稳和应变局部化均可能发生, 且分散性失稳先于应变局部化失稳出现。非共轴塑性流动法则的引入对分散性失稳预测结果无影响, 然而对应变局部化的预测结果影响较大, 且只有在引入了非共轴流动法则的条件下, 应变局部化的理论预测结果才能与试验结果一致。

关键词: 砂土; 材料状态; 分散性失稳; 应变局部化; 非共轴塑性流动

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2015)06-1010-06

作者简介: 吕玺琳(1981-), 男, 重庆人, 博士, 副教授, 从事岩土力学与工程方面研究。E-mail: xilinlu@tongji.edu.cn。

Prediction of instability of K_0 -consolidated saturated sands under undrained loading conditions

LÜ Xi-lin^{1, 2}, QIAN Jian-gu^{1, 2}, HUANG Mao-song^{1, 2}

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Based on the second-order work criterion and bifurcation analysis, the framework for predicting the onset of diffuse instability and strain localization are proposed to study the instability of soils under K_0 -consolidated undrained loading conditions. The analysis shows that the diffuse instability occurs in triaxial tests while the strain localization does not occur. The onset of diffuse instability relies on the initial void ratio of the specimen, and if the soil is dense enough, the soil specimen keeps stable until plastic limit due to the phase transformation. Under the plane strain conditions, the diffuse instability precedes the strain localization, and with further loading, the diffuse instability transits to strain localization. The inclusion of the non-coaxial plasticity flow rule has significant influence on the onset of strain localization, and the predicted results agree well with the experiments only if the non-coaxial flow rule is considered, while it shows no influence on the prediction of diffuse instability.

Key words: sand; material state; diffuse instability; strain localization; non-coaxial plastic flow

0 引 言

土体破坏通常认为是由于其所受剪应力达到抗剪强度造成, 其强度多用Mohr-Coulomb准则描述。然而, 以往大量试验结果^[1-3]已表明, 由于受材料状态、初始固结状态及应力状态等多种因素影响, 在土体达到塑性极限破坏状态前, 可能已经失稳。最典型的一种土体失稳模式是应变局部化失稳, 这种失稳形式自20世纪70年代以来就引起了国内外的广泛关注, 而分散性失稳(diffuse instability)由于其变形表现为均匀模式, 并无局部集中变形出现, 导致试验和实际工程中难以观察, 因而直至近年来才得以关注。

以往试验研究表明, 砂土应变局部化的形成与材料初始状态、应力、围压和排水情况等多种因素有关。

如中密、密砂中均可观察到剪切带形成, 而松砂在不排水条件则不容易观察到剪切带^[4]。相对平面应变状态而言, 轴对称状态下不易得到应变局部化现象, 土体三轴压缩条件下可表现为均匀变形的失稳模式, 应变局部化只是土体失稳后大变形的结果^[5]。Alshibli等^[6]通过对比不同试样密度、围压和颗粒大小、形状的砂土试验表明, 平面应变比三轴状态更易发生应变局部化。真三轴试验结果进一步表明, 除三轴压缩状态外, 在包括三轴拉伸状态的其它应力状态下, 应变局部化

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973计划)课题(2012CB719803); 国家自然科学基金项目(11372228); 上海市自然科学基金项目(13ZR1443800)

收稿日期: 2014-08-21

是土体失稳的主要原因^[7]。为从理论上揭示应变局部化现象, 当前多基于Rudnicki等^[8]及Rice^[9]的应形分叉理论进行预测。Vardoulakis^[10]结合试验结果通过分叉理论分析, 从理论上证实了三轴条件下应变局部化只在材料软化时出现, Chau^[11]亦得出了相同结论。Perić等^[12]从理论上比较了平面应变和轴对称条件下应变局部化触发条件的差异, 指出局部化变形在平面应变条件更易激发, 但不能在轴对称条件下材料硬化阶段发生。目前应变局部化分叉理论预测已扩展到不同应力路径^[13]及真三维应力状态^[14]分析中, 分析结果表明, 除三轴压缩状态外, 应变局部化可发生于其它中主应力比状态下的材料硬化阶段。

分散性失稳是一种有别于应变局部化的失稳模式, 将导致土体抗剪强度降低, 但失稳时土体仍保持均匀变形, 且常发生于应变局部化形成前^[15]。在饱和状态下, 分散性失稳常表现为静态液化, 这种失稳易于在极松散砂土的三轴固结不排水试验中观察到^[2]。平面应变不排水试验^[3]中也观察到了静态液化现象, 所得结果与三轴试验结果在规律上保持一致。相比试验研究而言, 静态液化理论方面研究较少, 但近年来国内外也进行过一些尝试。为描述砂土静态液化失稳特性, Lade^[1]在 $p-q$ 应力空间提出了用失稳线描述静态液化对应的强度线。Lade^[16]进一步基于二阶功准则, 解释了三轴试验中观察到的静态液化现象, 由于二阶功准则具有普遍适用性, 当前有关静态液化的研究大多基于该准则建立。Borja^[17]从固液耦合角度建立的饱和土静态液化分叉分析结果均与二阶功分析结果保持一致。由于静态液化受材料状态影响较大, 要合理预测其发生, 需采用考虑材料特性影响的本构模型。为考虑材料状态的影响, Andrade^[18]基于临界状态本构模型^[19]预测了不同初始孔隙比砂土的静态液化, 并研究了砂土初始松密状态对静态液化的影响规律。吕玺琳等^[20]针对砂土静态液化的理论判别进行了进一步研究。然而这些研究均针对等向固结条件开展, 并未针对 K_0 固结条件下的特性进行过探讨。以往试验结果表明, K_0 固结条件下土体失稳线高于等向固结情形, 即 K_0 固结有降低静态液化的可能性^[21], 然而目前还鲜见 K_0 固结条件下土体失稳的理论分析。此外, 现有的静态液化理论分析主要基于三轴状态开展, 尚未见到有关平面应变条件下的理论分析。

为揭示 K_0 固结不排水条件下饱和砂土的失稳特性, 基于二阶功准则及应变局部化分叉理论判别准则, 对三轴条件和平面应变条件下土体静态液化和应变局部化失稳模式进行理论研究, 并探讨了非共轴塑性流动法则对两者预测结果的影响。

1 状态相关非共轴弹塑性本构模型

以常用的Mohr-Coulomb硬化弹塑性本构模型为基础, 建立屈服性势函数为^[22]

$$\begin{cases} F = q - Mg(\theta_\sigma)p' = 0, \\ Q = q + \frac{A_d}{1-A_d}M_c p' g(\theta_\sigma) \left[1 + \left(\frac{p'}{p_{at}} \right)^{-(1-A_d)} \right] = 0. \end{cases} \quad (1)$$

式中 有效平均应力 $p' = \text{tr} \boldsymbol{\sigma}' / 3 - u$, $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - u \cdot \mathbf{I}$ 为有效应力, u 为孔隙水压力, 等效广义剪应力 $q = \sqrt{3J_2} = \sqrt{3\mathbf{s}' : \mathbf{s}' / 2}$, 应力偏量 $\mathbf{s}' = \boldsymbol{\sigma}' - p' \boldsymbol{\delta}$, 应力Lode角 $\theta_\sigma = \sin^{-1}[-3\sqrt{3}J_3 / (2J_2^{3/2})] / 3$, A_d 为剪胀性参数, $p_{at} = 101.3 \text{ kPa}$ 为大气压力, M 为应力比, M_c 为剪胀应力比, $g(\theta_\sigma)$ 为角隅函数。

由于直接三维化的Mohr-Coulomb准则存在尖点且不能合理反映土体三维强度, 这里角隅函数取椭圆型函数进行修正, 得到偏平面形状如图1所示, 表示为

$$g(\theta_\sigma) = [2(1-\beta^2)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta_\sigma\right) + (2\beta-1) \cdot \sqrt{4(1-\beta^2)\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\theta_\sigma\right) + \beta(5\beta-4)}] / \left[4(1-\beta^2) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\theta_\sigma\right) + (2\beta-1)^2 \right]. \quad (2)$$

材料参数

$$\beta = \frac{\sin \varphi_E (3 - \sin \varphi_C)}{\sin \varphi_C (3 + \sin \varphi_E)}, \quad (3)$$

式中, φ_C 和 φ_E 分别为三轴压缩和三轴拉伸试验得到的峰值内摩擦角。

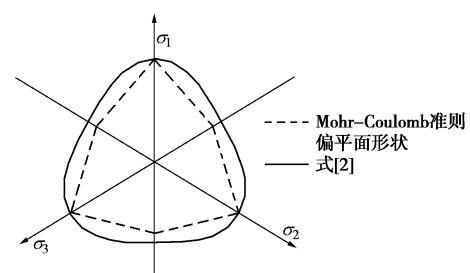


图1 偏平面上角隅函数

Fig. 1 Shape function in deviatoric plane
土体硬化规律满足^[23]

$$M = M_f \frac{\varepsilon_s^p}{A + \varepsilon_s^p}, \quad (4)$$

式中, 等效广义剪应变为 $\varepsilon_s^p = \sqrt{2\mathbf{e} : \mathbf{e}} / 3$, 偏应变为 $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\delta} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} / 3$, A 为拟合参数,

$$M_f = M_{cs} \exp(-n^b \psi) \quad (5)$$

式中, $\psi = e - e_c$; e 和 e_c 分别为砂土的当前孔隙比和临界状态孔隙比。

土体应变局部化分叉理论预测结果依赖于本构模型, 以往研究成果表明, 常规共轴模型由于假设塑性应变增量方向与应力方向的共轴性, 因而不能准确预测分叉点, 因而需引入非共轴塑性流动准则^[24-25]。这里, 采用基于角点理论^[8]建立的非共轴模型^[24-27], 将率型本构方程表示为

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{D}^{\text{ep}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^{\text{ep}} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{e}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{cp}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{np}}) \quad (6)$$

式中, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{cp}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{np}}$ 为共轴和非共轴塑性应变率张量, 分别通过传统共轴塑性流动法则和非共轴流动法则^[28-31]得到。

非共轴弹塑性张量

$$\mathbf{D}^{\text{ep}} = \mathbf{D}^{\text{e}}_{ijkl} - \mathbf{D}^{\text{e}}_{ijmn} \cdot$$

$$\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{st}}}{H_p + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \mathbf{D}^{\text{e}}_{pquv} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{uv}}} + \frac{H_t}{H_t + 2G} C_{mnst}^{\text{np}} \right) \cdot \mathbf{D}^{\text{e}}_{stkl} \quad (7)$$

式中, H_p , H_t 为共轴和非共轴塑性硬化模量。

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\text{e}}_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \\ C_{ijkl}^{\text{np}} = \frac{1}{H_t} \left[\frac{\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}}{2} - \frac{\delta_{kl} \delta_{ij}}{\delta_{mn} \delta_{mn}} - \frac{s_{ij} s_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} - \frac{S_{ij} S_{kl}}{S_{mn} S_{mn}} \right]. \end{cases}$$

弹性体积模量 K 和剪切模量 G 分别为

$$\begin{cases} K = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G, \\ G = G_0 p_{\text{at}} \frac{(2.97-e)^2}{1+e} \sqrt{\frac{p'}{p_{\text{at}}}}. \end{cases} \quad (8)$$

式中, G_0 为材料参数, ν 为泊松比, e 为孔隙比。

共轴塑性硬化模量为

$$H_p = \frac{pg(\theta_\sigma) M_f A}{(A + \varepsilon_{\text{ep}})^2} \left(\frac{2}{3} \text{der} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ig}} \text{dev} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ig}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

2 土体失稳判别准则

由于土体服从非关联流动法则, 在当达到极限峰值强度前, 可能已发生失稳。通过二阶功理论, 土体的失稳条件为

$$\text{d}^2 w = \text{d}\boldsymbol{\sigma}' : \text{d}\boldsymbol{\varepsilon} \leq 0 \quad \exists \|\text{d}\boldsymbol{\varepsilon}\| \neq 0 \quad (10)$$

式中, $\text{d}^2 w$ 为二阶功, $\text{d}\boldsymbol{\sigma}'$ 为有效应力增量, $\text{d}\boldsymbol{\varepsilon}$ 为相应的应变增量。

式 (10) 仅为土体失稳的必要条件, 要使得土体失稳发生, 还需满足加载模式为混合控制模式且增量加载两个附加条件。对于围压不变竖向施加位移的不排水三轴和平面应变试验而言, 后两者是自然满足的, 因而只需检验加载过程中二阶功的变化, 若变为负值, 则说明土体失稳。

随着应变局部化的发生, 土体均匀变形模式发生分叉, 随着变形进一步增大, 为满足平衡性要求, 带外弹性卸载, 带内呈软化塑性加载状态。根据 Rudniki 等^[8]建立的应变局部化理论预测框架, 得到应变局部化发生的理论条件为

$$\det[\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{\text{ep}} \cdot \mathbf{n}] = \det(\mathbf{A}) = 0 \quad (11)$$

在平面应变条件下, 式 (11) 可简化为

$$\det(\mathbf{A}) = C_1 \tan^4 \theta + C_2 \tan^2 \theta + C_3 = 0 \quad (12)$$

式中, $n = \{\cos \theta, 0, \sin \theta\}$, θ 为剪切带倾角, $C_1 = D_{1313}^{\text{ep}} D_{1111}^{\text{ep}} C_2 = D_{1111}^{\text{ep}} D_{3333}^{\text{ep}} - D_{1133}^{\text{ep}} D_{1313}^{\text{ep}} - D_{3311}^{\text{ep}} D_{1313}^{\text{ep}} - D_{1133}^{\text{ep}} D_{3311}^{\text{ep}}$, $C_3 = D_{1313}^{\text{ep}} D_{3333}^{\text{ep}}$ 。

3 K_0 固结不排水加载试验验证

3.1 K_0 固结三轴试验

基于前述建立的本构模型和失稳预测准则, 对 Chu 等^[28]的 K_0 固结砂土三轴试验结果进行模拟。试验采用应变控制实现初始 K_0 固结条件, 因而不同初始孔隙比的试样的 K_0 值不同, 然后维持环向应变为零的 K_0 的条件进行加载。试样采用新加坡海洋砂, 其平均粒径 $d_{50} = 0.30 \sim 0.35$ mm, 不均匀系数 $C_u = 2.0$, 土粒比重 $G_s = 2.6$, 最大及最小孔隙比分别为 0.916 和 0.533。试样为圆柱样, 直径为 100 mm, 高为 190 mm。进行 K_0 固结后, 试样初始孔隙比分别为 0.844, 0.881, 0.899 和 0.922。参照 Chu 等^[29]针对相同土样得到的试验结果, 采用 $e_c = 0.972 - 0.0988(p/101.3)^{0.36}$ 拟合, 得到临界状态时的 $e_c - p$ 曲线如图 2 所示。

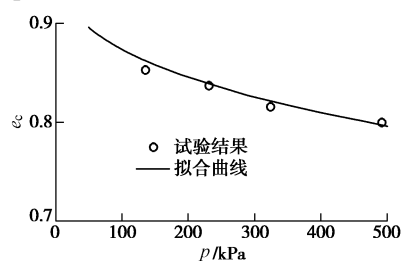


图 2 临界状态的 $e_c - p$ 曲线 (Chu 等^[29])

Fig. 2 $e_c - p$ curve at critical state

通过采用材料参数 $G_0 = 125$ MPa, $\nu = 0.15$, $M_{\text{cs}} = 1.26$, $\lambda_c = 0.078$, $e_{c0} = 0.907$, $\zeta = 0.6$, $m_b = 1.1$, $n_d = 3.5$, $d_0 = 0.88$, $A = 0.001$, $H_t = 2.5$ MPa, 模拟得到应力应变关系及孔压变化如图 3 所示。对于 $e_0 = 0.881, 0.899, 0.922$ 的 3 组试样, 剪应力呈现出先增大后减小的趋势, 而对 $e_0 = 0.844$ 的试样剪应力则保持持续增大。从孔压变化可看出, 最密的 1 组试样的孔压增长较少, 随着初始孔隙比的增大, 孔压增加趋于明显。

预测得到的有效应力路径如图 4 所示, $e_0 = 0.881, 0.899, 0.922$ 的 3 组土样在加载过程中广义剪应力出现了峰值, 而 $e_0 = 0.844$ 的试样则由于发生相变, 广义剪应力未出现峰值。

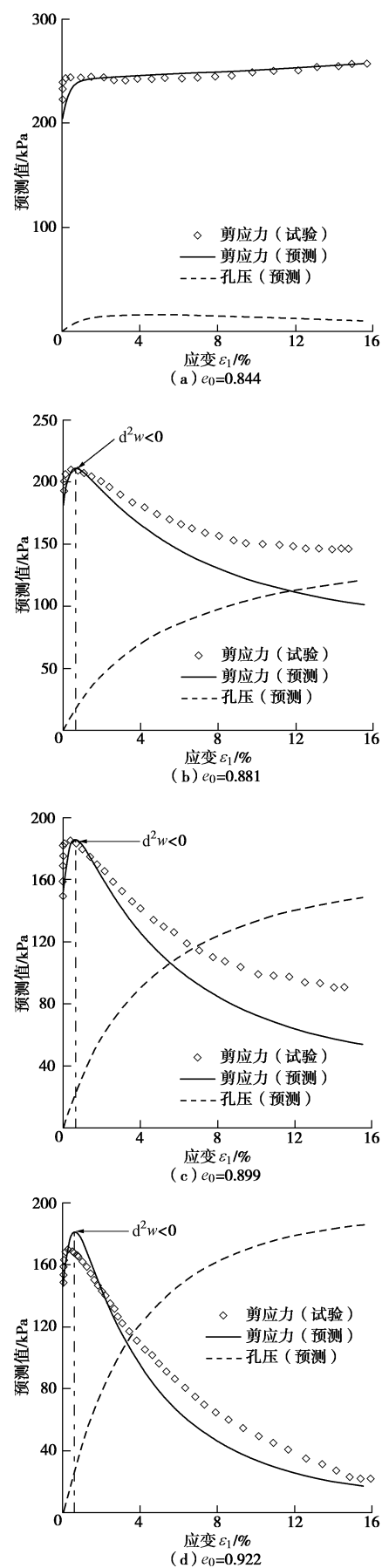


图 3 K_0 固结三轴试验应力应变及孔压预测(Chu 等^[28])

Fig. 3 Predicted stress-strain relationship and pore water pressures of K_0 -consolidated undrained triaxial tests

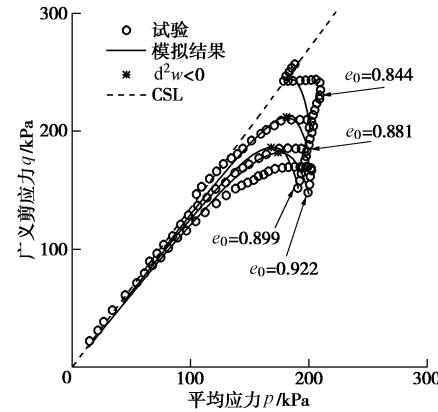


图 4 K_0 固结三轴试验应力路径(Chu 等^[28])

Fig. 4 Stress paths of K_0 -consolidated undrained triaxial tests

为获得砂土试样在不排水加载下的失稳特性，计算得到二阶功如图5所示。4组试验中，除最密的1组外，其余3组试样在加载过程中二阶功均变负，亦即土体发生了静态液化失稳。由于三轴试验中无主应力旋转，非共轴流动准则的引入不影响应力应变关系预测结果，仅影响声学张量的计算值。加载过程中，计算得到的声学张量行列式值随应变的变化如图6所示。结果表明，声学张量始终为正，表明在硬化阶段土体未发生应变局部化，这与以往试验和理论分析结果一致。

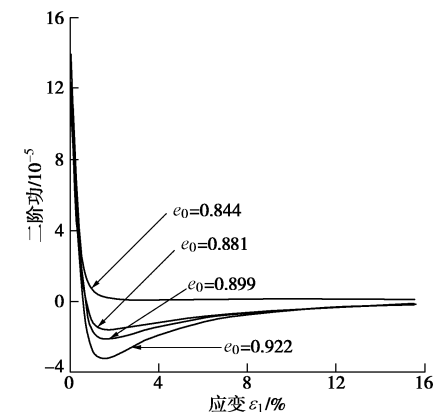


图 5 二阶功变化情况

Fig. 5 Evolution of second-order work

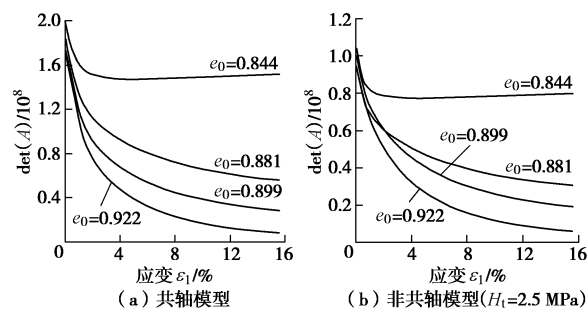


图 6 声学张量行列式值变化情况

Fig. 6 Evolution of the determinant of acoustic tensor

3.2 K_0 固结平面应变试验

进一步将分散性失稳和应变局部化理论准则用于

平面应变状态的分析,对 Finno 等^[30]的 K_0 固结平面应变试验进行模拟。砂样最大和最小孔隙比为 0.875 和 0.60,土颗粒密度 $G_s=2.68$,平均粒径 $D_{50}=0.32$ mm,不均匀系数 $C_u=1.3$ 。平面应变试样尺寸为 40 mm×80 mm×140 mm, K_0 固结完成后,试样孔隙比 $e_0=0.867$ 。采用材料参数 $G_0=125$ MPa, $\nu=0.05$, $M_f=1.26$, $d_0=2.88$, $A=0.0015$, $H_f=300$ kPa, $\beta=0.74$, $M_c=1.22$, 预测得到应力应变关系和孔压变化如图 7 所示。

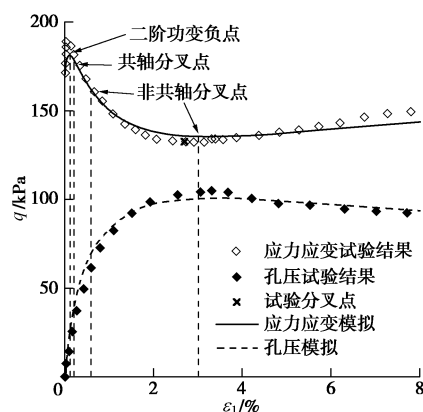


图 7 应力应变及孔压曲线预测结果(Finno 等^[30])

Fig. 7 Predicted stress-strain relationship and pore water pressures

加载过程中二阶功变化情况如图 8 所示,当应变达到 $\varepsilon_1=0.134\%$ 时,二阶功开始变负,表明土体静态液化触发,对应于剪应力峰值出现。通过分叉分析,得到声学张量行列式值变化情况如图 8 所示,共轴模型预测结果表明,当应变达到 $\varepsilon_1=0.212\%$ 时,声学张量行列式值变负,对应应变局部化触发,但该值明显小于试验值 $\varepsilon_1=2.7\%$ 。非共轴模型预测到当应变为 $\varepsilon_1=0.601\%$ 和 $\varepsilon_1=3.012\%$ 时,声学张量行列式值变负。当声学张量行列式值第 1 次变负时,若应变局部化触发,分叉后的应力应变关系受带内软化和带外卸载的影响,因而将不按材料本构特性发展。若未被激发,继续加载后,应力应变关系与材料本构一致,当声学张量行列式值第 2 次变负时,预测的分叉点与试验结果

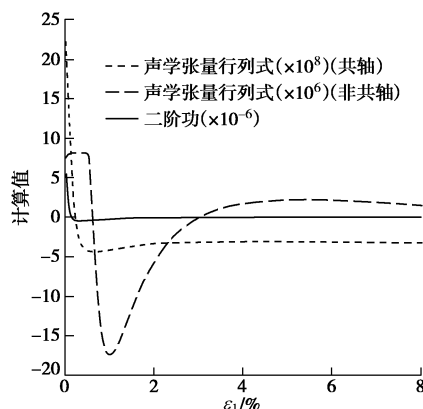


图 8 失稳准则随应变变化规律

Fig. 8 Evolution of second-order work

符合较好。通过共轴模型预测的剪切带倾角为 47.8° ,而非共轴理论预测值分别为 49.7° 和 51.0° ,试验值为 57° ,故非共轴预测到的声学张量行列式值第 2 次变负对应的结果与试验结果更接近。

4 结 论

在轴对称及平面应变条件下对 K_0 固结饱和砂土的失稳特性进行了理论分析,结果表明:

(1) 通过二阶功预测了土体的分散性失稳现象,在当砂土足够松散时,不管在三轴状态还是平面应变状态下,土体均可能出现分散性失稳。

(2) 基于应变局部化分叉理论预测表明,在三轴应力状态下,应变局部化失稳将不会发生。而在平面应变状态下,土体失稳将逐渐由分散性失稳模式转变为应变局部化失稳模式。

(3) 引入非共轴塑性流动法则对二阶功计算结果无影响,但对声学张量行列式值影响较大,亦即分散性失稳理论预测与非共轴流动无关,但应变局部化预测则必须引入非共轴流动准则才能得到准确的结果。

参考文献:

- [1] LADE P V. Static instability and liquefaction of loose fine sandy slopes[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 1992, **118**(1): 51 - 71.
- [2] CHU J, LEONG W K. Pre-failure strain softening and prefailure instability of sand: a comparative study[J]. Géotechnique, 2001, **51**(4): 311 - 321.
- [3] WANATOWSKI D, CHU J. Factors affecting pre-failure instability of sand under plane-strain conditions[J]. Géotechnique, 2012, **62**(2): 121 - 135.
- [4] HAN C H, VARDOLAKIS I. Plane strain compression experiments on water-saturated fine-grained sand[J]. Géotechnique, 1991, **41**(1): 49 - 78.
- [5] CHU J, LUO S C R, LEE I K. Strain softening and shear band formation of sand in multi-axial testing[J]. Géotechnique, 1996, **46**(1): 63 - 82.
- [6] ALSHIBLI K A, STURE L S. Shear band formation in plane strain experiments of sand[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE 2000, **126**(6): 495 - 503.
- [7] LADE P V, WANG Q. Analysis of shear banding in true triaxial tests on sand[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2001, **127**(8): 762 - 768.
- [8] RUDNICKI J W, RICE J R. Conditions for the localization of the deformation in pressure sensitive dilatant materials[J].

- Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1975, **23**(6): 371 – 394.
- [9] RICE J R. The localization of plastic deformation[C]// Proceeding of 14th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics. Delft, 1976: 371 – 394.
- [10] VARDOULAKIS I. Rigid granular plasticity model and bifurcation in the triaxial test[J]. Acta Mechanica, 1983, **49**(1/2): 57 – 79.
- [11] CHAU K T. Non-normality and bifurcation in a compressible pressure-sensitive circular cylinder under axisymmetric tension and compression[J]. International Journal of Solid and Structures, 1992, **29**(7): 801 – 824.
- [12] PERIĆ D, RUNESSON K, STURE S. Evaluation of plastic bifurcation for plane strain versus axisymmetry[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE 1992, **118**: 512 – 524.
- [13] 孙德安, 陈立文. 不同应力路径下超固结黏土分叉分析[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(9): 646 – 651. (SUN De-an, CHEN Li-wen. Bifurcation analysis of over-consolidated clays under different stress paths[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(9): 646 – 651. (in Chinese))
- [14] 吕玺琳, 黄茂松, 钱建固. 基于非共轴本构模型的砂土真三轴试验分叉分析[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(5): 646 – 651. (Lǚ Xi-lin, HUANG Mao-song, QIAN Jian-gu. Bifurcation analysis in true triaxial tests on sands based on non-coaxial elasto-plasticity model[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(5): 646 – 651. (in Chinese))
- [15] WAN R, PINHEIRO M, DAOUADJI A, et al. Diffuse instabilities with transition to localization in loose granular materials[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2013, **37**(10): 1292 – 1311.
- [16] LADE P V. Instability and liquefaction of granular materials[J]. Computers and Geotechnics, 1994, **16**(22): 123 – 150.
- [17] BORJA R I. Condition for liquefaction instability in fluid saturated granular soils[J]. Acta Geotechnica, 2006, **1**(4): 211 – 224.
- [18] ANDRADE J E. A predictive framework for liquefaction instability[J]. Géotechnique, 2009, **59**(8): 673 – 682.
- [19] JEFFERIES M G. Nor-sand: a simple critical state for sand[J]. Géotechnique, 1993, **43**(1): 91 – 103.
- [20] 吕玺琳, 赖海波, 黄茂松. 饱和土体静态液化失稳理论预测[J]. 岩土力学, 2014, **35**(5): 1330 – 1333, 1339. (Lǚ Xi-lin, LAI Hai-bo, HUANG Mao-song. Theoretically predicting instability of static liquefaction of saturated soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, **35**(5): 1330 – 1333, 1339. (in Chinese))
- [21] FOURIE A B, TSHABALALA L. Initiation of static liquefaction and the role of K_0 consolidation[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2005, **42**(3): 892 – 906.
- [22] 黄茂松, 扈萍, 钱建固. 基于材料状态相关砂土临界状态理论的应变局部化分析[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(8): 1133 – 1139. (HUANG Mao-song, HU Ping, QIAN Jian-gu. Strain localization of sand based on a state-dependent critical state model[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(8): 1133 – 1139. (in Chinese))
- [23] PIETRUSZCZAK S, STOLLE F E. Deformation of strain softening material: Part II modelling of strain softening response[J]. Computers and Geotechnics, 1987, **4**(2): 109 – 123.
- [24] PAPAMICHOS E, VARDOULAKIS I. Shear band formation in sand according to non-coaxial plasticity model[J]. Géotechnique, 1995, **45**(4): 649 – 661.
- [25] HUANG M S, LU X L, QIAN J G. Non-coaxial elasto-plasticity model and bifurcation prediction of shear banding in sands[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2010, **34**(9): 906 – 919.
- [26] YANG Y M, YU H S. A non-coaxial critical state soil model and its application to simple shear simulations[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2006, **30**(13): 1369 – 1390.
- [27] 杨蕴明, 柴华友, 韦昌富. 非共轴本构模型的数值计算问题[J]. 岩土力学, 2010, **31**(增刊 2): 373–377. (YANG Yun-ming, CHAI Hua-you, WEI Chang-fu. Numerical implementation of a yield vertex non-coaxial model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, **31**(S2): 373 – 377. (in Chinese))
- [28] CHU J, WANATOWSKI D. Instability conditions of loose sand in plane strain[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE 2008, **134**(1): 136 – 142.
- [29] CHU J, LEROUEIL S, LEONG W K. Unstable behaviour of sand and its implication for slope instability[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, **40**: 873 – 885.
- [30] FINNO R J, HARRIS W W, MOONEY M A, et al. Shear bands in plane strain compression of loose sand[J]. Géotechnique, 1997, **47**(1): 149 – 165.