

DOI: 10.11779/CJGE201505013

基于 Markov 链的岩土材料颗粒破碎演化规律研究

童晨曦^{1, 2}, 张升^{1, 2*}, 李希^{1, 2}, 盛岱超^{1, 2}

(1. 中南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410075; 2. 高速铁路建造技术国家工程实验室, 湖南 长沙 410075)

摘要: 从单一粒径组颗粒破碎演化规律角度入手, 研究了多粒径组颗粒破碎演化规律。首先, 提出了能够描述单一粒径组颗粒破碎状态的两参数 Weibull 分布函数; 此外, 提出了多粒径组颗粒有效破碎概率概念; 在上述基础上建立了一个能够较好的描述多粒径组颗粒破碎演化规律的 Markov 链模型, 选取了不同岩土材料、试验条件和颗粒大小下的试验数据对该模型进行了验证, 表明提出的模型能够描述各种试验条件下多粒径组颗粒破碎的演化规律。

关键词: 单一粒径组; 多粒径组; Weibull 分布; Markov 链模型; 演化规律

中图分类号: TU411 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2015)05-0870-08

作者简介: 童晨曦 (1990-), 男, 江西上饶人, 硕士研究生, 主要从事岩土材料颗粒破碎特性等方面的研究。E-mail: tongcx525@163.com。

Evolution of geotechnical materials based on Markov chain considering particle crushing

TONG Chen-xi^{1, 2}, ZHANG Sheng^{1, 2}, LI Xi^{1, 2}, SHENG Dai-chao^{1, 2}

(1. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China; 2. National Engineering Laboratory for High Speed Railway Construction, Changsha 410075, China)

Abstract: The evolution of multi-size particle materials considering particle crushing is studied considering the evolution of single-size ones. A two-parameter Weibull distribution function is introduced to describe the crushing state of single-size particles. Besides, the concept of effective breaking probability of multi-size particles is proposed. Based on these, a Markov chain model is established to describe the evolution of multi-size particles considering particle crushing. The proposed model is verified by selecting the experimental data under different geotechnical materials, test conditions and particle sizes. The results indicate that the proposed model can approximately describe the evolution of geotechnical materials considering particle crushing.

Key words: single-size particle; multi-size particle; Weibull distribution; Markov chain model; evolution

0 引言

近年来, 随着大型土石坝、海洋港口工程及大型土工机械的兴起, 岩土材料颗粒破碎已经引起了工程界的广泛关注。对此, 国内外学者已开展了一些研究工作, 主要集中在颗粒破碎程度的度量方法^[1-6]及影响因素^[2, 7-8]、颗粒破碎对土体强度-变形的影响^[9-11]以及破碎的数值模拟^[12-13]等方面。

需要指出的是, 土的粒径分布特征也是现代土力学的基础, 是进行土的分类并有针对性的研究其力学特性, 进而建立不同类别土的本构模型的主要依据。然而, 颗粒破碎将打破这一基础, 使得土的粒径分布特征像孔隙比、结构性等土的其它参数一样, 随应力-水力路径变化而变化, 由材料的物理参数变成了模型变量。从这个角度来看, 颗粒破碎问题可以从以下3个环节开展: ①首先, 选择合理而简单的颗粒破碎

表征指标; ②其次, 确定颗粒破碎的演化规律; ③最终, 在前两个环节的基础上建立考虑颗粒破碎演化的本构模型。其中, 颗粒破碎演化规律是颗粒破碎过程复杂性的集中体现。本文将针对此问题展开研究。

1 颗粒破碎演化规律研究现状

目前, 颗粒破碎演化规律的研究主要从两个层次入手: 即考虑单一粒径组的颗粒破碎演化规律和多粒径组的颗粒破碎演化规律。

实际的岩土材料极少由单一粒径组的颗粒组成, 但是单一粒径组的颗粒破碎规律相对简单, 并能作为开

基金项目: 国家重点基础研究发展计划 (973 计划) 项目 (2014CB047001); 国家自然科学基金项目 (41340012)

收稿日期: 2014-08-04

*通讯作者

展多粒径组岩土材料破碎规律研究提供重要的参考, 因此也引起了很多学者的关注: Bard^[14]通过单一粒径石油焦(粒径=10 mm)的一维压缩试验得出粒径分布演化规律机理在于分形几何的演化这一结论; Nakata 等^[15]开展单一粒径石英砂(粒径=1.7 mm)的一维压缩试验, 发现级配曲线具有自相似性, 并指出粒径小于 1 mm 时级配曲线相似; McDowell^[16]进行单一粒径 Leighton Buzzard 砂(粒径分别为 0.5, 1, 2 mm)的破碎试验得出颗粒的“存活概率”与所受的荷载符合 Weibull 分布, 并指出粒径分布随破碎的演化最终达到分形维数为 2.5; Coop 等^[17]开展的单一粒径 Dog's Bay 钙质砂(粒径=0.425 mm)的剪切试验, 研究了剪切带试样粒径分布的演化规律, 指出在双对数坐标下级配曲线将演化成一条直线, 给出分形维数为 2.57。这些针对单一粒径组颗粒破碎规律的研究, 主要是基于分形几何, 定性地认为随着破碎的发展, 粒径分布趋于稳定, 即破碎是有界限的。但是以上的研究并未对这一规律进行定量分析。

而真实的岩土材料对大部分为多粒径组颗粒的聚合体, 由于其破碎规律更为复杂, 研究者试图从不同角度对之进行探讨。张季如等^[18]、Zhang 等^[19]仍然从分形的角度研究破碎分形维数, 并试图找出分形维数和破碎之间的关系; 黄俊宇等^[20]从动态多尺度模型的角度, 预测脆性材料在动态荷载下的级配变化; 孙逸飞等^[21]从能量平衡的角度, 建立了能预测在低围压以及单调加载下粗颗粒级配演化的方法; Lackenby 等^[22]通过道砟的循环三轴加载试验得到道砟破碎指数 BBI 与最大循环偏应力之间的非线性关系; Chuhan 等^[23]对比了不同颗粒随破碎的发展特征粒径比 D_{60}/D_{10} 的变化; Karimpour 等^[24]在 3 种不同的初始应变速率下进行蠕变试验, 发现初始应变速率越大, 试验后颗粒破碎量也越大。这些研究主要力求通过确定性的研究对多粒径组颗粒的破碎行为进行探讨。

然而, 由于多粒径组颗粒破碎的复杂性和影响因素的多样性, 确定性的研究方法在目前尚难全面考虑各种因素, 以至于产生了很多矛盾的结论。与此同时, Ozkan 的工作值得关注。Ozkan 等^[25]从随机过程的角度入手, 认为颗粒破碎的过程符合 Markov 过程, 并建立了一个用于描述级配演化的 Markov 模型; 但模型对破碎的随机过程阐述尚不完善; 而假定某一粒径颗粒破碎到其它不同的较小粒径概率的相等, 与实际情况相差较大; 且模型引入了较多无明确物理含义的参数, 使得模型较为复杂。

针对以上研究的局限性, 本文将首先从概率统计的角度入手, 研究单一粒径组颗粒破碎的演化规律;

在此基础上, 通过阐述多粒径组颗粒破碎的随机性, 建立能与有效的描述其破碎演化规律的 Markov 链模型; 并通过与试验数据的对比, 进一步验证本模型的合理性。

2 单一粒径组颗粒破碎演化规律

2.1 颗粒破碎概率 p

从统计学的角度来说, 颗粒破碎可以考虑为某一概率事件, 当颗粒所处条件发生变化时, 颗粒将以概率 p 破碎, 以概率 q ($q=1-p$) 保持原有状态。一些学者对此开展了研究: McDowell^[16]、Lobo-Guerrero^[26]研究表明颗粒的“存活概率” q 和荷载之间符合 Weibull 分布, 刘瑜等^[27]指出煤颗粒破碎概率随着冲击速度的增加而增大, Ozkan 等^[25]认为颗粒破碎概率和颗粒的平均体积及粒径大小有关。对于岩土材料, 某一粒径颗粒的破碎概率当然是值得关注的, 但更需值得注意的是发生破碎的颗粒破碎到各较小粒径的分布状态, 本文称之为“破碎状态”, 这是因为破碎状态的不同直接对应着不同的级配曲线。

而目前还没有相关文献研究颗粒的破碎状态, 下文将基于 Weibull 分布来描述颗粒的破碎状态, 并通过与试验数据的对比, 验证其合理性。

2.2 基于 Weibull 分布的颗粒破碎状态的描述

对于任意由单一粒径组 D_i (实际粒径大小为 $D_{i-1} \sim D_i$, 下同) 组成的材料, 发生破碎时, 将破碎到较小粒径组 D_j ($j=1, 2, \dots, i-1$), 小于 D_j 的颗粒累计质量占总破碎质量的百分数为 F 。在 $D_j/D_{i-1}-F$ 坐标系中, 如令 $x_{ij}=D_j/D_{i-1}$, 则 $0 < x_{ij} \leq 1$, $0 < F \leq 1$, 可假定其服从两参数 Weibull 分布, 分布函数如下:

$$F = 1 - e^{-\left[\frac{x_{ij}}{a(1-x_{ij})}\right]^b} \quad (1)$$

式中 a, b 为 Weibull 分布函数的两个参数。

对式(1)进行求导可得到 Weibull 概率密度函数:

$$f = \frac{b}{a^b} \frac{x_{ij}^{b-1}}{(1-x_{ij})^{b+1}} e^{-\left[\frac{x_{ij}}{a(1-x_{ij})}\right]^b} \quad (2)$$

Weibull 概率密度函数 f 随着参数 a, b 的变化而变化, 如图 1 所示。

对式(1)进行变形, 可得

$$\ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-F} \right) \right] = b \ln \left(\frac{x_{ij}}{1-x_{ij}} \right) - b \ln a \quad (3)$$

令 $Y = \ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-F} \right) \right]$, $X = \ln \left(\frac{x_{ij}}{1-x_{ij}} \right)$, 则有

$$Y = bX - b \ln a \quad (4)$$

由试验数据能够很容易求出式(4)中的 X 和 Y ,

并通过式 (4) 得出参数 a , b , 从而可以确定用于描述破碎状态的 Weibull 分布函数式 (1)。

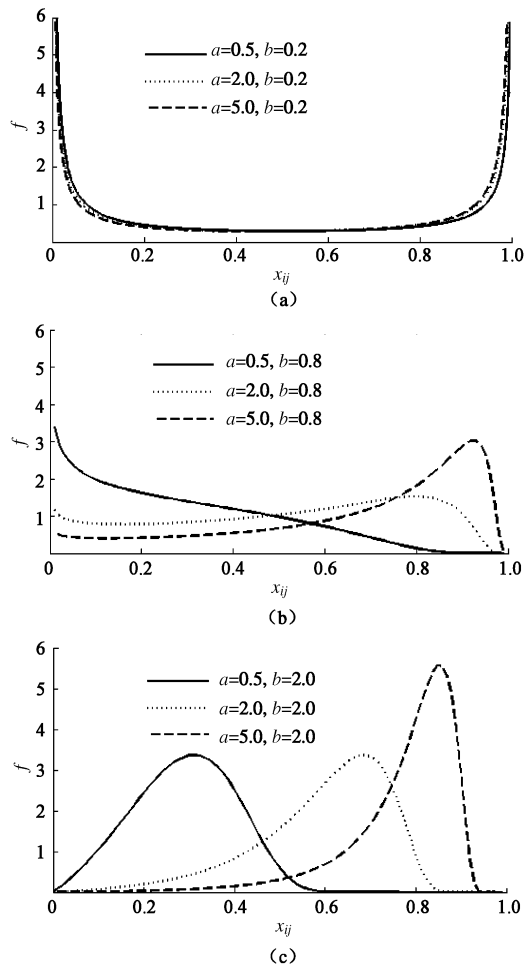


图 1 Weibull 概率密度函数 f 随 a , b 变化示意图

Fig. 1 Variation of Weibull probability density function (PDF) with different parameters a , b

从图 1 可看出, 参数 b 为 Weibull 分布的形状参数, 决定了其概率密度函数的形态, 在本文中即表示为决定了单一粒径组颗粒破碎状态的总体情况; 参数 a 为 Weibull 分布的尺度参数, 决定了其概率密度的峰值大小以及峰值点所对应的位置, 在本文中即表示为决定了单一粒径组颗粒最可能破碎到的粒径尺寸。

2.3 试验验证

本文总结了一些相关的试验结果, 对所提出的 Weibull 分布函数进行验证。

Bard^[14]对粒径 10 mm 的石油焦分别开展了 5.0, 7.5, 10, 20, 40, 57, 100 MPa 轴压下一维压缩试验, 得到了破碎后的级配曲线, 按式 (4) 进行拟合, 结果如图 2 所示, 参数如表 1 所示。

由图 2 和表 1 可以看出, 在高应力的一维压缩试验中, 较大单一粒径组颗粒 (10 mm) 的破碎状态可由 Weibull 分布函数准确的描述。将表 1 得到的参数 a , b 代入式 (2) 可得到单一粒径石油焦在不同压力下

破碎状态的 Weibull 概率密度, 如图 3 所示。

表 1 石油焦颗粒破碎状态分布函数的参数

Table 1 Parameters of crushing state for petroleum coke							
轴压/MPa	5	7.5	10	20	40	57	100
a	1.55	1.52	1.02	0.79	0.51	0.33	0.29
b	0.81	0.72	0.77	0.74	0.69	0.63	0.67
R^2	0.98	0.98	0.97	0.96	0.96	0.97	0.97

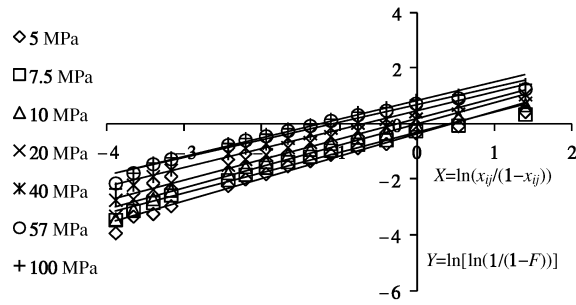


图 2 石油焦颗粒破碎状态分布函数的线性关系

Fig. 2 Linear relations of crushing state for petroleum coke

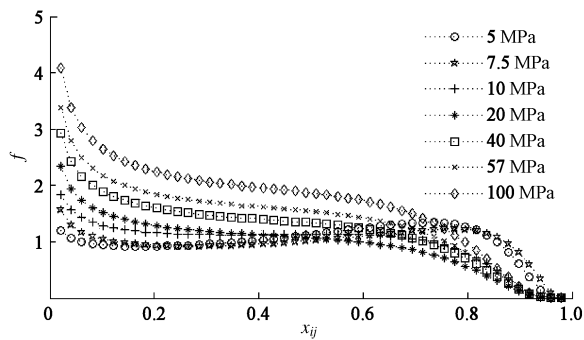


图 3 一维压缩试验下石油焦颗粒破碎状态的 Weibull 概率密度
Fig. 3 Weibull PDF of crushing state for petroleum coke under one-dimensional compression test

Coop 等^[17]在有效竖向压力为 60~97 kPa 的条件下, 开展了 0.425 mm 钙质砂的环剪试验, 得到了剪切位移 γ 分别为 9040%, 23900%, 31700%, 37500% 时的级配曲线, 按式 (4) 进行拟合, 如图 4 和表 2 所示。

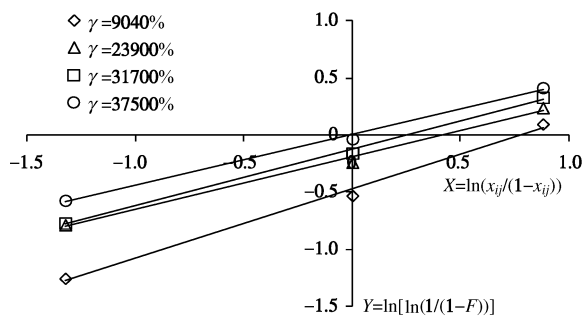


图 4 钙质砂破碎状态分布函数的线性关系

Fig. 4 Linear relations of crushing state for calcareous sand

由图 4 和表 2 可以看出, 在环剪试验下, 对于小粒径的颗粒 (0.425 mm), 本文提出的方法能很好地描述其破碎状态。同理可得到其破碎状态的 Weibull 概率密度, 如图 5 所示。

表 2 钙质砂破碎状态分布函数的参数

Table 2 Parameters of crushing state for calcareous sand				
剪切应变/%	9040	23900	31700	37500
a	2.171	1.284	1.516	0.990
b	0.607	0.496	0.460	0.444
R^2	0.995	0.997	0.994	0.996

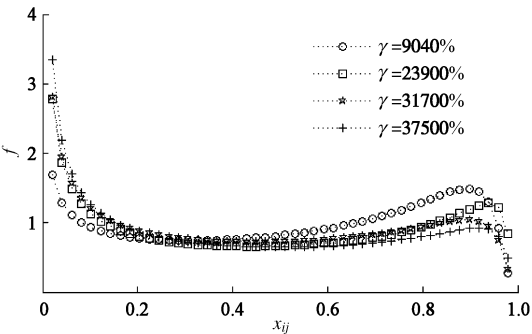


图 5 环剪试验下钙质砂破碎状态的 Weibull 概率密度

Fig. 5 Weibull PDF of crushing state for calcareous sand under ring shear tests

Mayoraz^[29]对 16 mm 砂岩进行最大荷载分别为 0.5, 1.0, 3.0 MPa 的单调加载, 按式 (4) 进行拟合, 如图 6 所示, 参数如表 3 所示。

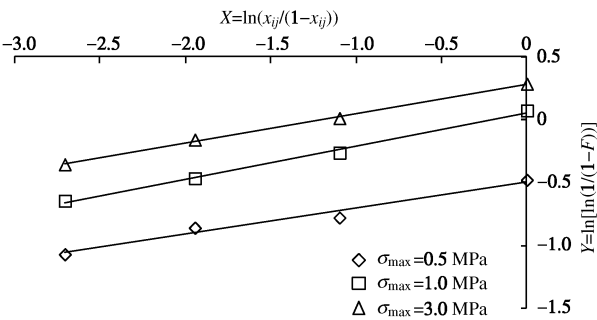


图 6 砂岩颗粒破碎状态分布函数的线性关系

Fig. 6 Linear relations of crushing state for sandstone

表 3 砂岩颗粒破碎状态分布函数的参数

Table 3 Parameters of crushing state for sandstone			
最大轴压/MPa	a	b	R^2
0.5	10.870	0.209	0.972
1.0	0.806	0.265	0.995
3.0	0.296	0.234	0.998

由图 6 和表 3 可知, 对于更大粒径的颗粒 (16 mm), 本文提出的方法能很好地描述其破碎状态。同理可得到其破碎状态的 Weibull 概率密度, 如图 7 所示。

由上所知, 对于不同的岩土材料、试验条件和颗粒大小、破碎状态存在一定的规律; 用本文提出的两

参数 Weibull 分布函数能很好地对之描述。图 3, 5, 7 表明, 随着应力 (应变) 的增加, a , b 的值越小, 表明破碎朝着细颗粒增多的方向发展。参数 a , b 还和材料本身的性质等其他因素有关, 其演化规律还需进一步探讨。

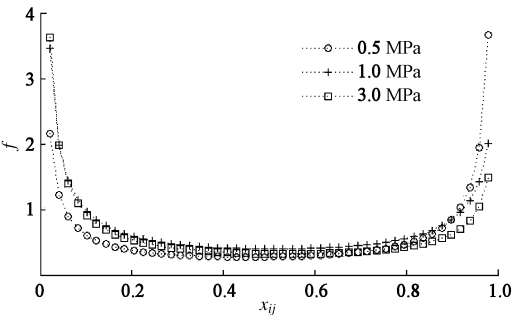


图 7 单调加载试验下砂岩颗粒破碎状态的 Weibull 概率密度

Fig. 7 Weibull PDF of crushing state for sandstone under monotonic loading

3 多粒径组颗粒破碎的演化规律

多粒径组颗粒可以认为由多个单一粒径组颗粒均匀混合而成, 不同大小的颗粒会因接触面积的不同而产生不同的接触应力, 而单一粒径组的破碎状态符合 Weibull 分布, 因此多粒径组颗粒破碎状态可以认为有限个不同 Weibull 分布的叠加, 为简化模型, 本文假设不同粒径颗粒符合相同的 Weibull 分布。

3.1 有效破碎概率 p_{s-t}

影响单一粒径组颗粒的破碎概率的因素很多, 而对于多粒径组颗粒来说, 更难做到对每个粒径组颗粒的破碎概率分别进行研究, 实际上对于多粒径组颗粒组成的真实岩土材料也不需要区分每个粒径组的破碎概率, 重要的是要从宏观上来描述材料的总体破碎情况。为此, 本文提出多粒径组“有效破碎概率” p_{s-t} 的概念; 其中, 下标 s 表示材料所处的初始状态 (应力、应变等), 下标 t 表示材料所处的最终状态 (应力、应变等)。需要说明的是, 有效破碎概率虽然只是一个用来描述总体破碎情况的宏观物理量, 但是可以有效地简化多粒径组颗粒破碎这一复杂问题的研究。

3.2 Markov 链模型的提出

如果说单个颗粒的破碎可视为一个概率事件, 那么由不同粒径大小颗粒组成的材料的破碎过程可视为有限个单一粒径组颗粒破碎过程的叠加, 若将颗粒材料破碎过程离散为有限个时间点、有限个粒径组的破碎过程, 显然某一时刻 N , 材料的颗粒级配只和 $N-1$ 时刻材料的级配有关, 而与 $N-1$ 时刻之前的级配状态无关, 即材料的历史级配状态并不影响当前的级配状态, 那么颗粒破碎过程可视为 Markov 链。

3.3 Markov 链模型的建立

选取岩土材料的 i 个拟界限粒径, 从小到大依次为 D_1, D_2, \dots, D_i , 定义 Markov 链 $\{X_n, n \in T\}$, 状态空间 $I = \{D_1, D_2, \dots, D_i\}$ 。条件概率 $p_{jk}(n) = p\{X_{n+1} = D_k / X_n = D_j\}$ 为 Markov 链 $\{X_n, n \in T\}$ 在时刻 n 的一步转移概率, 其中 $D_k, D_j \in I$ 。 $\mathbf{g}^T(0) = (G_1, G_2, \dots, G_i)$ 为初始概率向量, 即颗粒初始各级配百分含量向量; $\mathbf{g}^T(n) = [G_1(n), G_2(n), \dots, G_i(n)]$ 为 n 时刻绝对概率向量, 即破碎进行 n 次后颗粒各级配百分含量向量。一般所说的颗粒破碎为试验一次后破碎情况, 即 $n=1$ 。

由上述分析易得该 Markov 链的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_{21}p_{s-t} & q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_{31}p_{s-t} & \beta_{32}p_{s-t} & q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{k1}p_{s-t} & \cdots & \beta_{kl}p_{s-t} & \cdots & q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{i1}p_{s-t} & \beta_{i2}p_{s-t} & \beta_{i3}p_{s-t} & \cdots & \beta_{ii-2}p_{s-t} & \beta_{ii-1}p_{s-t} & q \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中, β_{kl} 为破碎概率系数, 其内涵为 D_k 粒径颗粒破碎到 D_l 粒径颗粒的量与 D_k 粒径颗粒总的有效破碎量之比, 故有

$$\sum_{m=1}^{k-1} \beta_{km} = 1 \quad (k = 2, 3, \dots, i) \quad (6)$$

由式 (1) 可求得

$$\beta_{kl} = F(x_{kl}) - F(x_{kl-1}), x_{k0} = 0 \quad (7)$$

初始概率向量与 n 时刻绝对概率向量有如下关系:

$$\mathbf{g}^T(1) = \mathbf{g}^T(0)\mathbf{P} \quad (8)$$

式 (8) 给出了试验后各粒径百分含量的计算方法, 其中, $\mathbf{g}^T(0)$ 为材料初始各粒径百分含量向量, \mathbf{P} 为破碎概率矩阵。破碎概率矩阵含 3 个未知数: 有效破碎概率 p_{s-t} 以及 Weibull 分布函数的两个参数 a, b ; 其中, a, b 可由上文的线性拟合方法求得, p_{s-t} 可由下述方法得到:

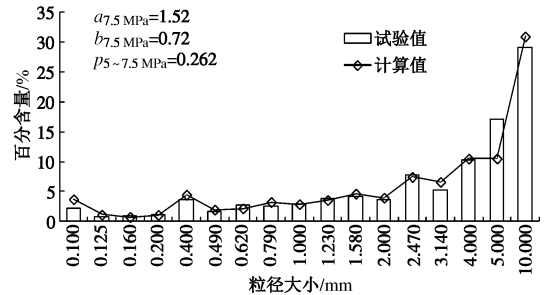
实际破碎后各级配的百分含量向量为 $\mathbf{g}^T(1) = [G_1(1), G_2(1), \dots, G_i(1)]$, 同时由式 (8) 可获得相应的计算值 $\mathbf{g}^T(1_t) = [G_1(1_t), G_2(1_t), \dots, G_i(1_t)]$, 通过最小二乘法可构造如下目标函数:

$$y = \sum_{m=1}^i [G_m(1) - G_m(1_t)]^2 \quad (9)$$

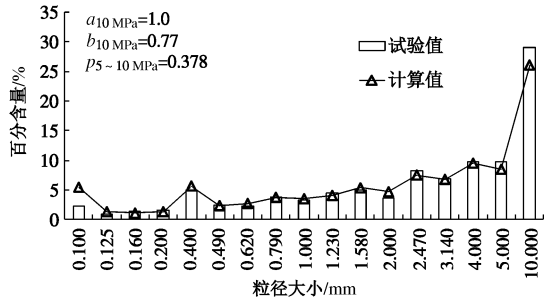
对目标函数求导, 即可求出相应的有效破碎概率 p_{s-t} , 代入式 (8) 求得破碎后各粒径百分含量的计算值, 与实际测得破碎后各粒径百分含量的计算值进行对比用来验证本文所提出的有效破碎概率及 Markov 链模型的合理性, 具体结果将在下文进行分析。

4 模型的验证

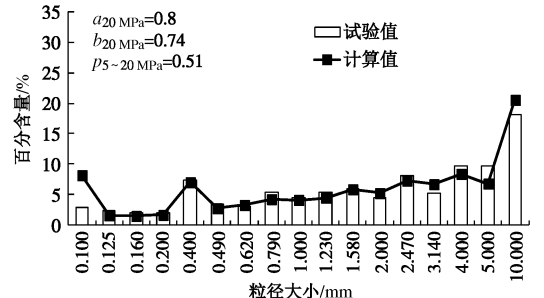
为验证本文提出的模型, 仍采用文献 [14, 17, 28] 的试验数据。参数 a, b 的取值如表 1~3 所示, 由最终状态决定, 如表 1 中 $a_{7.5}, b_{7.5}$ 表示最终荷载为 7.5 MPa 时的取值。验证结果如图 8~10 所示。



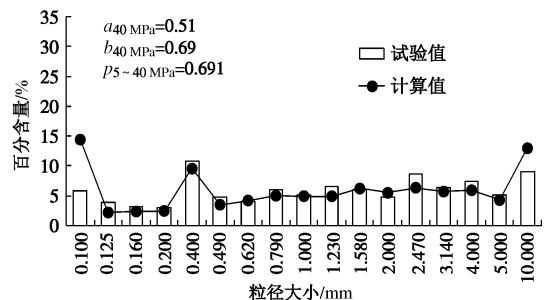
(a) 一维轴压 5 MPa → 7.5 MPa 时破碎状态的试验值与计算值



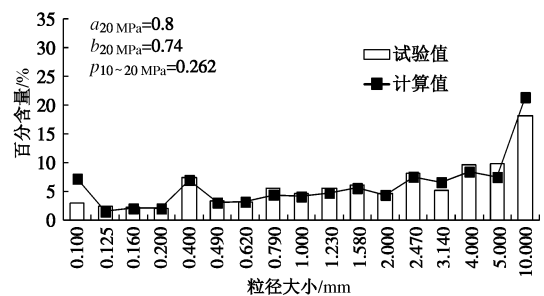
(b) 一维轴压 5 MPa → 10 MPa 时破碎状态的试验值与计算值



(c) 一维轴压 5 MPa → 20 MPa 时破碎状态的试验值与计算值



(d) 一维轴压 5 MPa → 40 MPa 时破碎状态的试验值与计算值



(e) 一维轴压 10 MPa → 20 MPa 时破碎状态的试验值与计算值

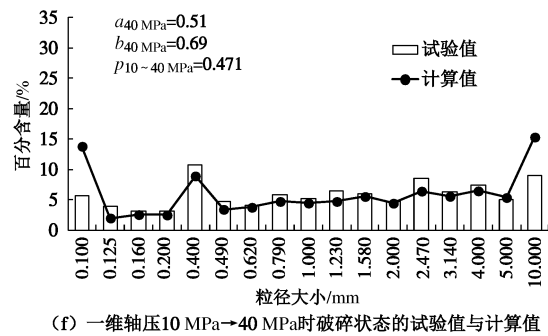


图 8 一维压缩试验下石油焦颗粒破碎状态的试验值与计算值

Fig. 8 Comparison between calculated and measured crushing states for petroleum coke under one-dimensional compression tests

图 8 (a) ~ (d) 表示以单一粒径石油焦颗粒在 5 MPa 轴向应力下破碎后的级配作为初始级配, 且分别在 7.5, 10, 20, 40 MPa 的轴向应力下进一步破碎后, 各粒径百分含量的试验值与计算值的对照; 图 8 (e)、(f) 表示以单一粒径石油焦颗粒在 10 MPa 轴向应力下破碎后的级配作为初始级配, 且分别在 20, 40 MPa 的轴向应力下进一步破碎后, 各粒径百分含量的试验值与计算值的对照。各破碎过程的有效破碎概率如表 4 所示。

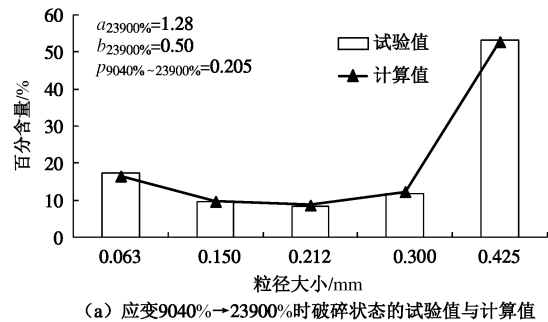
表 4 一维压缩试验下石油焦颗粒的有效破碎概率

Table 4 Effective breaking probabilities of petroleum coke under one-dimensional compression tests

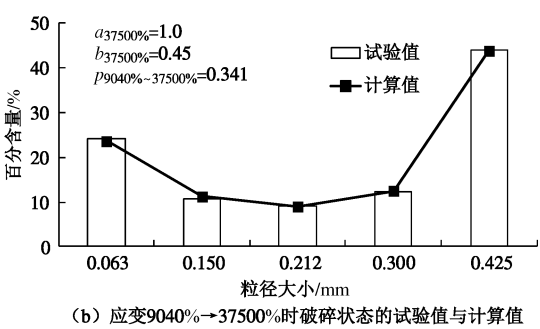
$P_{5\sim7.5\text{ MPa}}$	$P_{5\sim10\text{ MPa}}$	$P_{5\sim20\text{ MPa}}$	$P_{5\sim40\text{ MPa}}$	$P_{10\sim20\text{ MPa}}$	$P_{10\sim40\text{ MPa}}$
0.262	0.378	0.51	0.691	0.262	0.471

表 4 表明: 初始应力一定, 最终应力越大; 或者最终应力一定, 初始应力越小, 有效破碎概率越大。

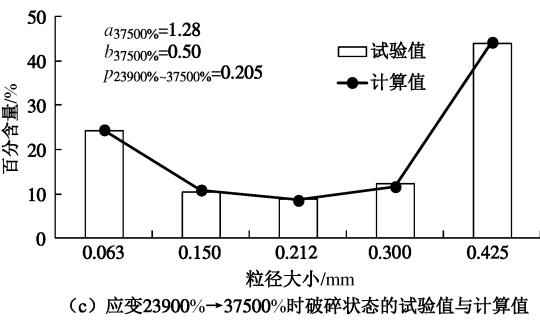
图 9 (a)、(b) 表示以单一粒径钙质砂颗粒在 $\gamma=9040\%$ 的剪切应变下破碎后的级配作为初始级配, 且分别在 $\gamma=23900\%$, 37500% 的剪切应力下进一步破碎, 各粒径百分含量的试验值与计算值对照。图 9 (c) 表示以单一粒径钙质砂颗粒在 $\gamma=23900\%$ 的剪切应变下破碎后的级配作为初始级配, 且在 $\gamma=37500\%$ 的剪切应力下进一步破碎, 各粒径百分含量的试验值与计算值对照。各破碎过程的有效破碎概率如表 5 所示。



(a) 应变9040%→23900%时破碎状态的试验值与计算值



(b) 应变9040%→37500%时破碎状态的试验值与计算值



(c) 应变23900%→37500%时破碎状态的试验值与计算值

图 9 环剪试验下钙质砂破碎状态的试验值与计算值

Fig. 9 Comparison between calculated and measured crushing state for calcareous sand under ring shear tests

表 5 环剪试验下钙质砂的有效破碎概率

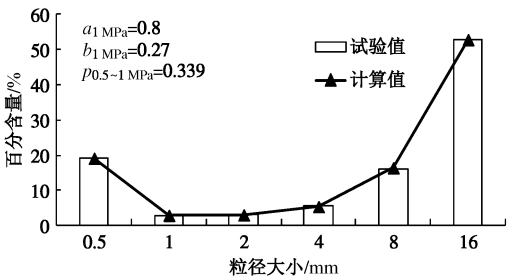
Table 5 Effective breaking probabilities of calcareous sand under ring shear tests

$P_{9040\%\sim23900\%}$	$P_{9040\%\sim37500\%}$	$P_{23900\%\sim37500\%}$
0.205	0.341	0.167

表 5 表明, 初始应变一定, 最终应变越大; 或者最终应变一定, 初始应变越小, 有效破碎概率越大。

图 10 (a)、(b) 表示以单一粒径砂岩颗粒在 0.5 MPa 的最大荷载下破碎后的级配作为初始级配, 且分别在 1.0, 3.0 MPa 的最大荷载下进一步破碎, 各粒径百分含量的试验值与计算值对照。图 10 (c) 表示以单一粒径砂岩颗粒在 1.0 MPa 的最大荷载下破碎后的级配作为初始级配, 且在 3.0 MPa 的最大荷载下进一步破碎, 各粒径百分含量的试验值与计算值对照。各破碎过程的有效破碎概率如表 6 所示。

表 6 表明, 初始最大荷载一定, 最终最大荷载越大或者最终最大荷载一定, 初始最大荷载越小, 有效破碎概率越大。



(a) 荷载0.5 MPa→1 MPa时破碎状态的试验值与计算值

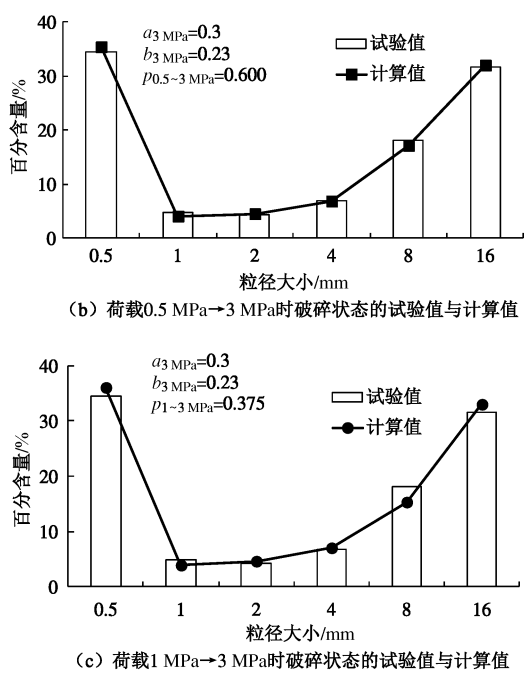


图 10 单调加载试验下砂岩颗粒破碎状态的试验值与计算值

Fig. 10 Comparison between calculated and measured crushing states for sandstone under monotonic loading

表 6 单调加载试验下砂岩颗粒的有效破碎概率

Table 6 Effective breaking probabilities of sandstone under monotonic loading

$p_{0.5\sim1\text{ MPa}}$	$p_{0.5\sim3\text{ MPa}}$	$p_{1\sim3\text{ MPa}}$
0.339	0.600	0.375

综上，图 8~10 表明本文提出的模型能较好地描述各种试验条件下多粒径组颗粒破碎的演化规律。表 4~6 则说明在相同的初始应力（应变）条件下，颗粒的有效破碎概率随着最终应力（应变）的增加而增加；在相同的最终应力（应变）条件下，颗粒的有效破碎概率随着初始应力（应变）的减少而增加。需指出的是本文所说的多粒径组颗粒是由单一粒径组颗粒进一步破碎得到的，对于任意的多粒径组颗粒因无法得之其破碎状态，故不能直接代入模型计算，需进一步研究。

5 结 论

本文对单一粒径组及多粒径组颗粒破碎的演化规律进行了研究，得到以下 4 点结论。

- (1)提出了能描述单一粒径组颗粒破碎状态的两参数 Weibull 分布函数，函数参数的演化与破碎的发展存在对应关系。
- (2)建立了能描述多粒径组颗粒破碎演化规律的 Markov 链模型，结合试验数据，对模型进行了验证。
- (3)提出了有效破碎概率的概念，不仅能够从宏观上描述破碎的发展，也能够使多粒径组颗粒破碎这

一复杂问题的研究得到简化。

(4)进一步的研究可以从模型 3 个参数在不同荷载及变形条件下的演化规律入手：如采用剑桥模型，需进一步研究参数对屈服面位置及大小的影响等。

参考文献:

[1] LEE K L, FARHOOMAND I. Compressibility and crushing of granular soil in anisotropic triaxial compression[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1967, 4(1): 68 - 86.

[2] MARSAL R J. Large scale testing of rockfill materials[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1967, 93(2): 27 - 43.

[3] HARDIN B O. Crushing of soil particles[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, 111(10): 1177 - 1192.

[4] LADE P V, YAMAMURO J A, BOPP P A. Significance of particle crushing in granular materials[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1996, 122(4): 309 - 316.

[5] EINAV I. Breakage mechanics—part I: theory[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2007, 55(6): 1274 - 1297.

[6] 徐日庆, 畅 帅, 李雪刚, 等. 基于裂离参量的粒状土颗粒破碎量化方法[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(12): 2179 - 2185. (XU Ri-qing, CHANG Shuai, LI Xue-gang, et al. Quantitative method for crushing of granular soils based on discarding parameters[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(12): 2179 - 2185. (in Chinese))

[7] 魏 松, 朱俊高, 钱七虎, 等. 粗粒料颗粒破碎三轴试验研究[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(4): 533 - 538. (WEI Song, ZHU Jun-gao, QIAN Qi-hu, et al. Particle breakage of coarse-grained materials in triaxial tests[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(4): 533 - 538. (in Chinese))

[8] 傅 华, 凌 华, 蔡正银. 粗颗粒土颗粒破碎影响因素试验研究[J]. 河海大学学报 (自然科学版), 2009, 37(1): 75 - 79. (FU Hua, LING Hua, CAI Zheng-yin. Influencing factors for particle breaking of coarse grained soil[J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2009, 37(1): 75 - 79. (in Chinese))

[9] 郭熙灵, 胡 辉, 包承纲. 堆石料颗粒破碎对剪胀性及抗剪强度的影响[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(3): 83 - 88. (GUO Xi-ling, HU Hui, BAO Cheng-gang. Experimental studies of the effects of grain breakage on the dilatancy and shear strength of rockfill[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, 19(3): 83 - 88. (in Chinese))

[10] 陈生水, 韩华强, 傅 华. 循环荷载下堆石料应力变形特

- 性研究[J]. 岩土工程学报, 2010, **32**(8): 1151 - 1157. (CHEN Sheng-shui, HAN Hua-qiang, FU Hua. Stress and deformation behaviors of rockfill under cyclic loading[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **32**(8): 1151 - 1157. (in Chinese))
- [11] 姚仰平, 万征, 陈生水. 考虑颗粒破碎的动力 UH 模型[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(7): 1036 - 1044. (YAO Yang-ping, WAN Zheng, CHEN Sheng-shui. Dynamic UH model considering particle crushing[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(7): 1036 - 1044. (in Chinese))
- [12] KWOK C Y, BOLTON M D. DEM simulations of soil creep due to particle crushing[J]. *Géotechnique*, 2013, **63**(16): 1365 - 1376.
- [13] 史旦达, 周建, 贾敏才, 等. 考虑颗粒破碎的砂土高应力一维压缩特性颗粒流模拟[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(5): 736 - 742. (SHI Dan-da, ZHOU Jian, JIA Min-cai, et al. Numerical simulations of particle breakage property of sand under high pressure 1D compression condition by use of particle flow code[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(5): 736 - 742. (in Chinese))
- [14] BARD E. Comportement des matériaux granulaires secs et à liant hydrocarboné[D]. Paris: Ecole Centrale de Paris, 1993. (BARD E. Behavior of dry and hydrocarbon binder granular materials[D]. Paris: Ecole Centrale de Paris, 1993. (in French))
- [15] NAKATA Y, HYODO M, HYDE A F L, et al. Microscopic particle crushing of sand subjected to high pressure one-dimensional compression[J]. *Soils and Foundations*, 2001, **41**(1): 69 - 82.
- [16] MCDOWELL G R. On the yielding and plastic compression of sand[J]. *Soils and Foundations*, 2002, **42**(1): 139 - 145.
- [17] COOP M R, SORENSEN K K, FREITAS T B, et al. Particle breakage during shearing of a carbonate sand[J]. *Géotechnique*, 2004, **54**(3): 157 - 163.
- [18] 张季如, 祝杰, 黄文竞. 侧限压缩下石英砂砾的颗粒破碎特性及其分形描述[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(6): 783 - 789. (ZHANG Ji-ru, ZHU Jie, HUANG Wen-jing, et al. Crushing and fractal behaviors of quartz sand-gravel particles under confined compression[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(6): 783 - 789. (in Chinese))
- [19] ZHANG B Y, JIE Y X, KONG D Z. Particle size distribution and relative breakage for a cement ellipsoid aggregate[J]. *Computers and Geotechnics*, 2013, **53**: 31 - 39.
- [20] 黄俊宇, 徐松林, 王道荣, 等. 脆性颗粒材料的动态多尺度模型研究[J]. 岩土力学, 2013, **34**(4): 922 - 932. (HUANG Jun-yu, XU Song-lin, WANG Dao-rong, et al. Investigation on dynamic multiscale model for brittle granular materials[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2013, **34**(4): 922 - 932. (in Chinese))
- [21] 孙逸飞, 刘汉龙, 杨贵. 考虑颗粒破碎引起级配演变的粗粒料屈服函数研究[J]. 岩土力学, 2013, **34**(12): 3479 - 3484. (SUN Yi-fei, LIU Han-long, YANG Gui. Yielding function for coarse aggregates considering gradation evolution induced by particle breakage[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2013, **34**(12): 3479 - 3484. (in Chinese))
- [22] LACKENBY J, INDRARATNA B, MCDOWELL G, et al. Effect of confining pressure on ballast degradation and deformation under cyclic triaxial loading[J]. *Géotechnique*, 2007, **57**(6): 527 - 536.
- [23] CHUHAN F A, KJELDSTAD A, BJØRLYKKE K, et al. Porosity loss in sand by grain crushing-Experimental evidence and relevance to reservoir quality[J]. *Marine and Petroleum Geology*, 2002, **19**(1): 39 - 53.
- [24] KARIMPOUR H, LADE P V. Time effects relate to crushing in sand[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2010, **136**(9): 1209 - 1219.
- [25] OZKAN G, ORTOLEVA P J. Evolution of the gouge particle size distribution: A Markov model[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 2000, **157**(3): 449 - 468.
- [26] LOBO-GUERRERO S, VALLEJO L E. Application of Weibull statistics to the tensile strength of rock aggregates[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2006, **132**(6): 786 - 790.
- [27] 刘瑜, 周甲伟, 杜长龙. 基于分形统计强度理论的煤颗粒冲击破碎概率研究[J]. 固体力学学报, 2012, **33**(6): 631 - 636. (LIU Yu, ZHOU Jia-wei, DU Chang-long. Impact crushing probability of coal particles based on fractal statistical strength theory[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2012, **33**(6): 631 - 636. (in Chinese))
- [28] MAYORAZ F, VULLIET L, LALOUI L. Attrition and particle breakage under monotonic and cyclic loading[J]. *Comptes Rendus Mécanique*, 2006, **334**(1): 1 - 7.