

DOI: 10.11779/CJGE201505012

# 裂纹发生初始阶段的坚硬顶板内力变化和“反弹”特性分析

潘 岳<sup>1</sup>, 顾士坦<sup>2,3</sup>, 杨光林<sup>2</sup>

(1. 青岛理工大学土木工程学院, 山东 青岛 266520; 2. 山东科技大学矿山灾害预防控制省部共建国家重点实验室培育基地, 山东 青岛 266590;  
3. 山东科技大学矿业与安全工程学院, 山东 青岛 266590)

**摘要:** 为研究超前裂纹对坚硬顶板内力变化的影响和顶板“反弹”、“压缩”特性, 将煤壁前方煤层和直接顶视为弹性地基, 假定在裂纹发生初始阶段顶板上方荷载不变, 以最大拉应变强度条件为裂纹发生条件, 对初次来压前的坚硬顶板进行分析, 求得满足裂纹面边界条件、自然边界条件和连续条件的裂纹发生初始阶段顶板内力和挠度形式解中全部系数。据所得表达式, 采用 Matlab 软件给出算例。算例表明: ①裂纹面在煤壁前方, 其位置在见报导的顶板超前断裂位置范围内。采空区的顶板下沉量随超前裂纹生长而明显地增大。在裂纹面附近区域顶板挠度发生反弹, 在反弹区前方存在压缩区, 与现场监测到的顶板“反弹”、“压缩”特性一致。②末排支护为顶板弯矩反弯点, 随超前裂纹生长, 末排支护前方顶板上侧受拉弯矩全面减小, 而其后方顶板下侧受拉弯矩全面增大。煤壁前方顶板剪力随裂纹生长逐渐减小, 煤壁后方顶板剪力不变。所得结果对于采场顶板状况的判断有一定的参考价值。

**关键词:** 坚硬顶板; 弹性地基; 裂纹; 内力; 挠度; 反弹

中图分类号: TD31 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2015)05-0860-10

作者简介: 潘 岳(1947-), 男, 教授, 从事矿山岩体力学方面的研究工作。E-mail: panyue@qtech.edu.cn。

## Variation of internal force and rebound property of hard roof at initial stage of cracking

PAN Yue<sup>1</sup>, GU Shi-tan<sup>2,3</sup>, YANG Guang-lin<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Qingdao Technological University, Qingdao 266520, China; 2. State Key Laboratory of Mining Disaster Prevention and Control Co-founded by Shandong Province and the Ministry of Science and Technology, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China; 3. College of Mining and Safety Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

**Abstract:** To study the influence of advanced cracking on internal force of hard roof and rebound and compression properties of the roof, the coal seam and the immediate roof in front of coal wall are considered as elastic foundation, and the load above the roof is assumed to be invariable during the initial stage of cracking. The maximum strain is used as the criterion for crack occurrence. All coefficients for the internal force and deflection of hard roof at its initial stage of cracking due to the first weighting are derived to satisfy the boundaries of crack surfaces, natural boundaries and conditions of continuity. Numerical examples computed with MATLAB are presented. The results show: (1) Section of crack initiation is in front of coal wall, which can be seen from the reported scope of the advanced cracking location of the roof. The settlements of the gob roof increase remarkably with the development of cracks. The deflection of the roof in front of the cracked surface rebounds and also a compression region exists ahead of the rebound region, which agrees with the characteristics of the monitored field results. (2) The place of the end row supports is an unbending point. The values of the bending moments of the roof in front of the end row supports decrease entirely because of crack initiation, while those behind the end row supports increase. The shear forces in front of coal wall decrease because of crack initiation, while those behind coal wall are invariant. It has some reference value for the evaluation of stope roof condition.

**Key words:** hard roof; elastic ground; crack; internal force; deflection; rebound

基金项目: 国家自然科学基金项目(51204102, 51374140)

收稿日期: 2014-06-20



## 0 引言

坚硬顶板于煤层开采后可大面积暴露, 这使得顶板最大弯矩在煤壁前方, 而发生超前断裂。对于超前断裂的坚硬顶板, 工作面每经过断裂线都会受到不同程度的冲击, 且有工作面到达断裂线下方, 当支架支护力且岩层间摩擦力均不足时, 顶板会在发生台阶式下沉, 造成压架或压、推垮事故。现场重视顶板断裂线位置<sup>[1-9]</sup>的预测, 为探讨开采中初次来压、周期来压期间坚硬顶板上覆荷载和煤层支承力对坚硬顶板形变、运动和超前断裂的影响, 研究者做了包括现场实测、相似材料模拟试验和数值模拟在内的大量研究<sup>[1-16]</sup>, 取得很多有价值、有意义的成果。

在顶板发生超前断裂时曾检测到断裂线附近顶板挠曲面发生反弹。据此特性, 资兴矿务局周源山煤矿<sup>[2]</sup>、门头沟煤矿<sup>[5]</sup>和卧龙湖煤矿<sup>[7]</sup>等利用顶板反弹信息成功测定坚硬顶板的初次断裂位置; 姜福兴等<sup>[5]</sup>绘出门头沟矿顶板超前断裂前、断裂中和断裂后实测顶板挠度分布状况如图1, 其中反弹量最大值(曲线2)为8 mm, 位置在煤壁前方3.5 m处; 谭云亮等<sup>[6]</sup>根据若干矿山断裂顶板的监测资料, 绘出顶板断裂线与反弹位置关系(图2), 指出反弹区前方还存在“压缩区”<sup>[2-7]</sup>。目前尚未见有文献对从理论上对上述顶板“反弹”特性有过描述。因此, 从理论上对超前断裂引起顶板“反弹”、“压缩”现象进行研究, 完备、增强人们对断裂顶板特性的认识, 是一件有积极意义的工作。

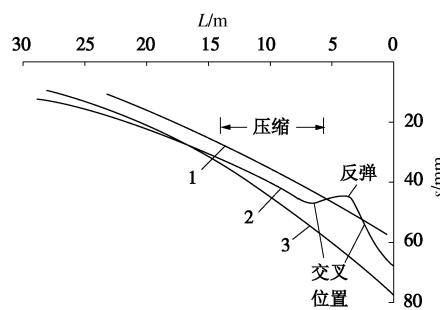


图1 门头沟矿顶板断裂时的反弹特性<sup>[5]</sup>

Fig. 1 Rebound property of roof at its cracking in Mentougou mine<sup>[5]</sup>

钱鸣高等<sup>[10]</sup>对覆岩关键层上方荷载分布所作的有限元分析表明, 与煤层所受支承压力类似, 除均布荷载外, 煤壁前方的顶板岩层也承受隆起分布的增压荷载(图3)。实际煤层是变形体, 煤壁前方稍远处煤层处于弹性状态, 煤壁附近煤层处于极限平衡状态或软化状态。将煤壁近旁煤层作弹性地基处理与实际有差异, 但比一些文献按刚性地基处理要接近实际。

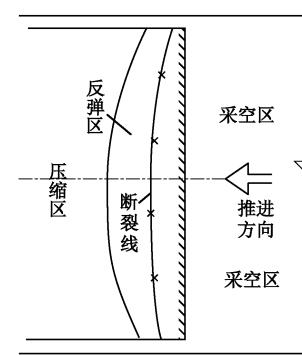


图2 坚硬顶板的断裂与反弹位置关系<sup>[6]</sup>

Fig. 2 Relation between cracking place and rebound place of hard roof<sup>[6]</sup>

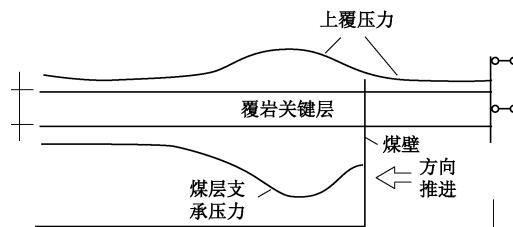


图3 采场覆岩力学模型<sup>[10]</sup>

Fig. 3 Mechanical model for overlying strata<sup>[10]</sup>

采场工作面很长, 工作面中部顶板弯矩大, 也最先发生断裂<sup>[1, 7]</sup>, 故可在图2采场中部沿推进方向取单位宽岩层结构, 对坚硬顶板的内力、挠度进行分析。按此处理方法, 李新元等<sup>[16]</sup>对受弹性地基支承的初次开采后煤壁前方坚硬顶板的弯矩、挠度和超前断裂进行分析。分析中顶板受超前线性分布增压荷载, 最大荷载位于煤壁上方; 受到图3覆岩隆起增压荷载形式的启示, 潘岳等<sup>[17]</sup>将煤层-直接顶视为弹性地基, 对初次来压前坚硬顶板的力学特性进行分析, 分析中顶板受荷载峰位于煤壁前方的隆起增压荷载作用。

李新元等<sup>[16]</sup>对顶板的断裂分析较为初步, 潘岳等<sup>[17]</sup>未对顶板的断裂进行分析。图4中顶板先发生超前断裂, 之后顶板回转于采空区跨中发生断裂。深度断裂时顶板上覆荷载发生很大变化而难以确定, 在裂纹发生初始阶段顶板荷载变化很小相对容易确定, 且顶板断裂与顶板内力有关。本文拟在下一节参照图4顶板的断裂秩序, 给出顶板裂纹发生初始阶段的分析模型、顶板“反弹”和内力变化研究基础及裂纹发生强度条件。

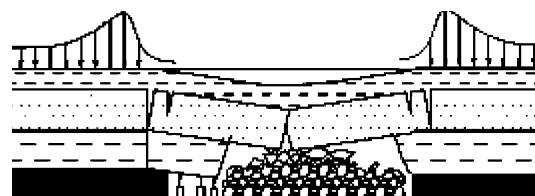


图4 坚硬顶板断裂后岩层结构和应力状态<sup>[16]</sup>

Fig. 4 Constitution of surrounding rock and stress distribution after initial-fracturing of hard roof<sup>[16]</sup>

# 1 分析模型、研究基础与断裂强度条件

## 1.1 分析模型

沿图 2 中轴线取单位宽度岩层结构——岩梁, 可得开采后顶板裂纹发生前的分析模型如图 5 所示, 图 5 中压力曲线为坚硬顶板层位所受的荷载曲线。隆起的增压荷载大于远方的均布荷载, 且隆起荷载的峰值位置在煤壁前方, 与煤壁距离为  $l$ , 在远离荷载峰的顶板荷载分别趋于均布荷载  $q_1$ ,  $q_2$ 。

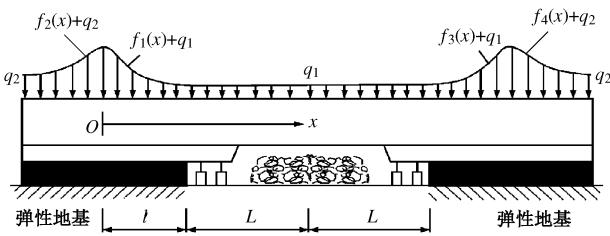


图 5 坚硬顶板初次来压前岩层结构及荷载状况

Fig. 5 Constitution of surrounding rock and loading state of hard roof before first weighting

在图 5 的  $0 \leq x \leq l+L$  和  $x \leq 0$  区间上, 可用

$$f_1(x) = \frac{f_{c1} e}{x_{c1}} (x + x_{c1}) e^{-\frac{x+x_{c1}}{x_{c1}}} \quad (0 \leq x \leq l+L), \quad (1)$$

$$f_2(x) = \frac{f_{c2} e}{x_{c2}} (x_{c2} - x) e^{\frac{x-x_{c2}}{x_{c2}}} \quad (x \leq 0), \quad (2)$$

模拟图 5 左方顶板承受的隆起增压荷载。因为在定义区间上  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  均为负指数函数, 且注意到在  $x=0$  处,  $f_1(0)=f_{c1}$ ,  $f_2(0)=f_{c2}$  ( $f_{c1}$ ,  $f_{c2}$  为  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  的峰值), 故可通过改变式 (1)、(2) 中的  $f_{c1}$ ,  $f_{c2}$  值来调节图 5 增压荷载峰的大小。此外, 还可通过增减  $x_{c1}$  或  $x_{c2}$  去调节  $x \rightarrow l+L$  或  $x \rightarrow -\infty$  过程中,  $f_1(x) \rightarrow 0$ , 或  $f_2(x) \rightarrow 0$  的缓急程度。若记

$$k_1 = f_{c1} e / x_{c1}, \quad k_2 = f_{c2} e / x_{c2}, \quad (3)$$

则以图 5 上  $o$  点位置为原点, 可写出图 5 左方坚硬顶板层位岩层所受分布荷载的表达式分别为

$$F_1(x) = q_1 + k_1 (x + x_{c1}) e^{-\frac{x+x_{c1}}{x_{c1}}} \quad (0 \leq x \leq l+L), \quad (4)$$

$$F_2(x) = q_2 + k_2 (x_{c2} - x) e^{\frac{x-x_{c2}}{x_{c2}}} \quad (x \leq 0). \quad (5)$$

式 (3) ~ (5) 中  $k_1$ ,  $k_2$  单位为  $\text{N/m}^2$ , 并有

$q_1 + f_{c1} = q_2 + f_{c2}$ , 或  $f_{c1} - f_{c2} = q_2 - q_1 > 0$ 。 (6) 式(6)可以保证图 5 原点上方顶板荷载的光滑连续性。

假定采场两侧均有支护, 则图 5 结构与荷载关于采空区跨中截面正对称。由结构力学, 正对称体系在跨中截面的剪力为 0, 即  $Q(l+L)=0$ ; 跨中截面转角为 0, 即  $y'_i(L+l)=0$ 。故可采用图 5 中的采空区部分

跨长为  $L$ , 右端为定向支承的半结构图 6, 来对裂纹发生初始阶段的图 5 顶板进行研究。

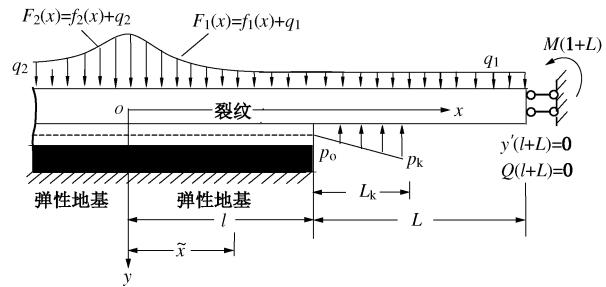


图 6 裂纹发生初始阶段坚硬顶板的半结构模型

Fig. 6 Semi-constitution model for hard roof at its initial stage of cracking

## 1.2 研究基础

顶板断裂是在无裂纹顶板的基础上发生的。文献 [17] 对荷载作用下无裂纹顶板的力学特性进行了分析。本文以文献[17]中完好顶板内力和挠度的形式解为基础, 来对裂纹发生初始阶段的顶板行为进行分析。

对图 5, 假定地层刚度  $C = 0.8 \times 10^9 \text{ Pa}$ ,  $l = 10 \text{ m}$ ,  $2L = 40 \text{ m}$ ; 由文献[10], 煤壁前方坚硬顶板的荷载峰值约为平均荷载的 1.21 倍, 对于 320 m 采深, 取  $q_2 = 8 \times 10^6 \text{ N/m}$ ,  $f_{c2} = 0.21q_2$ ; 假定顶板重度  $\gamma = 2500 \text{ N/m}^3$ , 厚  $h = 6 \text{ m}$ , 取  $q_1 = 0.15 \times 10^6 \text{ N/m}$ , 由式 (6) 得  $f_{c2} = q_1 + f_{c1} - q_2$ ; 取控顶距  $L_k = 5 \text{ m}$ , 支护力  $p_o = 1 \times 10^6 \text{ N/m}$ ,  $p_k = 1.2 \times 10^6 \text{ N/m}$ ; 取式 (4), (5) 中  $x_{c2} = 8 \text{ m}$ ,  $x_{c1} = 4 \text{ m}$ 。据文献[17]中弯矩表达式, 用 Matlab 软件绘得裂纹发生前岩梁半结构弯矩分布如图 7。

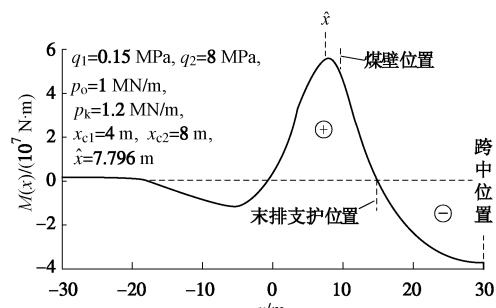


图 7 裂纹发生前的岩梁弯矩曲线<sup>[17]</sup>

Fig. 7 Curve of bending moments of rock beam before cracking<sup>[17]</sup>

从图 7 弯矩曲线看到, 大致以末排支护为界, 在末排支护前方岩梁主要承受使其向上弯曲的正弯矩; 从末排支护到采空区跨中截面, 岩梁承受向下弯曲的负弯矩; 在  $\hat{x} = 7.796 \text{ m}$  即煤壁前方 2.204 m 处取得峰值  $M_{\max} = 5.54 \times 10^7 \text{ N}\cdot\text{m}$ ; 在  $x = -30 \text{ m}$  处已接近 0 (增压荷载的影响在  $x = -30 \text{ m}$  已很小); 在  $L + l = 30 \text{ m}$  处岩梁跨中弯矩为  $M(L+l) = -3.60 \times$

$10^7 \text{ N}\cdot\text{m}$ , 因图 6 结构跨中剪力  $Q(L+l)=0$ , 由弯矩 - 剪力关系  $M'(x)=Q(x)$ , 跨中位置为负弯矩极值点, 弯矩曲线有水平切线。

图 8 为同一荷载系列下与图 7 弯距曲线对应岩梁剪力曲线。由弯矩 - 剪力关系  $M'(x)=Q(x)$  知, 图 8 中剪力曲线与零值虚线在  $7.796 \text{ m}$  处的交点, 与图 7 上  $\hat{x}=7.796 \text{ m}$  的弯矩峰位置相对应。以  $\hat{x}=7.796 \text{ m}$  为界, 在  $\hat{x}$  前方岩梁主要承受逆时针向正剪力; 在  $\hat{x}$  后方岩梁承受顺时针向的负剪力(规定岩梁向上弯曲弯矩为正, 故顺时针向剪力为负); 图中剪力曲线在  $x=-30 \text{ m}$  处接近 0, 在  $3.27 \text{ m}$  处取得一峰值; 在煤壁处岩梁剪力的绝对值为最大。剪力曲线不光滑是因为图 6 支护段两端荷载分布有突变。

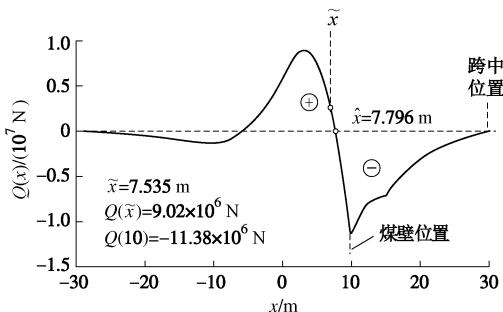


图 8 裂纹发生前的岩梁剪力曲线<sup>[17]</sup>

Fig. 8 Curve of shear of rock beam before cracking<sup>[17]</sup>

### 1.3 裂纹发生的强度条件

坚硬顶板裂纹发生条件可采用最大拉应力条件或最大拉应变强度条件。如按最大拉应力强度条件, 煤壁前方顶板最大弯矩所在的截面  $\hat{x}=7.796 \text{ m}$  处岩梁的上缘将出现裂缝。最大拉应力计算公式为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_t} = \frac{M(\hat{x})}{bh^2/6}, \quad (7)$$

式中,  $W_t$  为岩梁抗弯截面模量,  $b$  为梁宽。将  $M_{\max} = 5.54 \times 10^7 \text{ Nm}$ ,  $h=6 \text{ m}$ ,  $b=1 \text{ m}$  代入式 (7), 可得

$$\sigma_{\max} = 9.23 \times 10^6 \text{ Pa} \quad (8)$$

最大拉应变所在的  $\tilde{x}$  截面在最大拉应力截面  $\hat{x}$  的附近。由材料力学, 可写出最大拉应变公式:

$$\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]/E \quad (9)$$

注意到沿图 2 中轴线取单位宽度顶板所成岩梁可按平面应变问题处理及顶板上方荷载为压应力  $-f_1(x) - q_1$ , 可得式 (9) 中的主应力分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= M(x)/W_t = M(x)/(bh^2/6), \\ \sigma_2 &= \nu[\sigma_1 + \sigma_3] = \nu[M(x)/W_t - f_1(x) - q_1], \\ \sigma_3 &= -[f_1(x) + q_1] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

将式 (10) 代入式 (9), 可得用弯距和岩梁上方荷载表示的岩梁上侧面的拉应变表达式为

$$\varepsilon_1(x) = \left\{ (1-\nu^2) \frac{M(x)}{W_t} + \nu(1+\nu)[f_1(x) + q_1] \right\} / E \quad (11)$$

据式 (11) 用 Matlab 绘得岩梁上侧最大拉应变曲线如图 9 所示, 图 9 中对于  $\nu=0.2$  的曲线 1, 最大拉应变在  $\tilde{x}=7.535 \text{ m}$  即煤壁前方  $2.465 \text{ m}$  处取得峰值:

$$\varepsilon_{\max} = \tilde{\varepsilon}_1 \approx 3.95 \times 10^{-4} \quad (12)$$

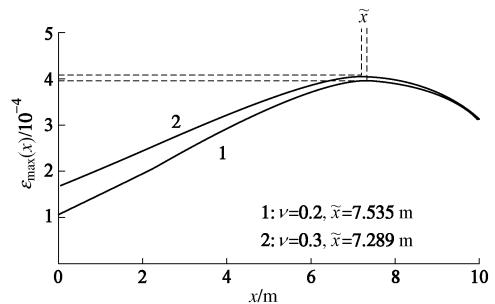


图 9 岩梁上侧最大拉应变图

Fig. 9 Curves of tensile strain at upper side of rock beam

在一些文献记载有大致的坚硬顶板超前断裂位置。其中文献[5, 7, 8]记载的超前断裂位置出现煤壁前方  $2\sim3 \text{ m}$  处, 且煤质越硬, 裂缝与煤壁的距离越近。由文献[18], 坚硬岩石裂缝出现时的拉应力和拉应变大致为

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\max} &\approx (9\sim10) \text{ MPa}, \\ \varepsilon_{\max} &= \varepsilon_1 \approx (3\sim4) \times 10^{-4} \end{aligned} \right. \quad (13)$$

式 (8)、(12) 与式 (13) 的比较表明, 可以将图 7 左上所示荷载作为图 5 岩梁发生超前裂纹的荷载系列。

由于受到周边煤岩体限制, 裂纹不是一出现立即贯穿顶板, 而是在工作面推进、放炮等采动影响下逐步扩展的。休班期间裂纹停止扩展或处于微扩展中。裂纹发生是微观行为, 在裂纹微扩展中岩梁裂纹面原本承受的弯距、剪力在逐步减小。本文研究重点是最大拉应变截面裂纹发生初始阶段整个岩梁(或顶板)的挠度和内力的变化, 而不是裂纹尖端的微观行为。故可用裂纹载面逐步减小的弯距、剪力为边界条件对整个岩梁内力和挠度变化的研究, 来替代裂纹尖端应力场对整个岩梁内力和挠度变化的研究。

由上所述, 可写出在裂纹发生初始阶段, 最大拉应变截面  $\tilde{x}$  上岩梁弯距, 剪力边界条件为

$$\left. \begin{aligned} EIy''_{22}(\tilde{x}) &= kM(\tilde{x}) = EIy''_{21}(\tilde{x}), \\ EIy'''_{22}(\tilde{x}) &= kQ(\tilde{x}) = EIy'''_{21}(\tilde{x}), \\ 0.8 &\leq k < 1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

由图 7, 8 可得  $\tilde{x}=7.535 \text{ m}$  截面上,  $M(\tilde{x})=5.52 \times 10^7 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  $Q(\tilde{x})=1.03 \times 10^6 \text{ N}$ 。式 (14) 中规定  $k \geq 0.8$ , 表示裂纹深入岩梁表面很浅, 岩梁还可以传

递较大弯矩和剪力，故用  $0.8 \leq k < 1$  定义顶板处于裂纹发生初始阶段。图 5, 6 模型中顶板处于某一深度，埋深定了，顶板上方荷载也就基本确定。注意到文献 [2, 6~10] 记载裂纹发生时顶板挠度有反弹现象，故可假定裂纹发生初始阶段岩梁上方荷载不变。

本文拟以图 6 为岩梁破裂模型，以最大拉应变强度条件为岩梁破裂条件，式 (14) 为裂纹面边界条件，在文[17]的基础上对初次来压前受弹性地基支承的，裂纹发生初始阶段坚硬顶板内力变化与其“反弹”特性从理论上进行分析与描述。分析中假定岩梁上方荷载不变（即始终为图 7 左上所示荷载系列）。

## 2 顶板挠度方程的形式解与边界条件

将图 6 中  $\tilde{x}$  截面左侧  $(-\infty, 0]$  区段和  $[0, \tilde{x}]$  区段岩梁的挠度方程分别记为  $\bar{y}_{23}(x)$ ,  $\bar{y}_{22}(x)$ 。将  $\tilde{x}$  截面右侧  $[\tilde{x}, l]$  区段和  $[l, l+L]$  区段岩梁的的挠度方程分别记为  $\tilde{y}_{21}(x)$ ,  $\tilde{y}_{11}(x)$ 。

挠度微分方程与边界条件无关，图 6 裂纹模型中  $(-\infty, 0]$  区段上单元长度岩梁的微分挠度方程同文[17]，积分后有相同的挠度方程形式解（形式解中待定系数由边界条件确定，故裂纹模型形式解中的待定系数要全部重新运算确定。）参照文献[17]， $(-\infty, 0]$  区段弹性地基梁的挠度方程  $\bar{y}_{23}(x)$  的形式解为

$$\begin{aligned} \bar{y}_{23}(x) = & e^{\beta x} (\bar{d}_1 \cos \beta x + \bar{d}_2 \sin \beta x) + \frac{q_2}{4\beta^4 EI} + \\ & \frac{k_2}{EI} \cdot \frac{x_{c2}^5}{1+4\beta^4 x_{c2}^4} \left[ \frac{x_{c2}-x}{x_{c2}} + \frac{4}{1+4\beta^4 x_{c2}^4} \right] e^{-\frac{x-x_{c2}}{x_{c2}}} \quad (x \leq 0). \end{aligned} \quad (15)$$

与  $\bar{y}_{23}(x)$  形式解有相同理由，参照文献[17]，图 6 裂纹面左侧  $[0, \tilde{x}]$  段有限长弹性地基梁挠度方程的形式解为

$$\begin{aligned} \bar{y}_{22}(x) = & \bar{d}_3 \sin \beta x \sinh \beta x + \bar{d}_4 \sin \beta x \cosh \beta x + \\ & \frac{k_1}{EI} \frac{x_{c1}^5}{1+4\beta^4 x_{c1}^4} \left[ \frac{x+x_{c1}}{x_{c1}} + \frac{4}{1+4\beta^4 x_{c1}^4} \right] e^{-\frac{x+x_{c1}}{x_{c1}}} , \\ & (0 \leq x \leq \tilde{x}). \end{aligned} \quad (16)$$

类似于式 (16)，图 6 裂纹面右侧  $[\tilde{x}, l]$  段有限长弹性地基梁挠度方程的形式解可写为

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{21}(x) = & \tilde{d}_3 \sin \beta x \sinh \beta x + \tilde{d}_4 \sin \beta x \cosh \beta x + \\ & \tilde{d}_5 \cos \beta x \sinh \beta x + \tilde{d}_6 \cos \beta x \cosh \beta x + \frac{q_1}{4\beta^4 EI} + \\ & \frac{k_1}{EI} \frac{x_{c1}^5}{1+4\beta^4 x_{c1}^4} \left[ \frac{x+x_{c1}}{x_{c1}} + \frac{4}{1+4\beta^4 x_{c1}^4} \right] e^{-\frac{x+x_{c1}}{x_{c1}}} \\ & (\tilde{x} \leq x \leq l). \end{aligned} \quad (17)$$

图 10 为图 6 悬空部分的隔离图。从图 10 左端对图中任一  $x$  截面写出的弯矩方程同文献[17]，积分两次可得图 6 采空区的岩梁挠度方程形式解：

$$\begin{aligned} EI\tilde{y}_{11}(x) = & \frac{M_l}{2}(x-l)^2 - \frac{Q_l}{6}(x-l)^3 + \frac{q_1}{24}(x-l)^4 + k_1 x_{c1}^5 \cdot \\ & \left[ \left[ \frac{x+x_{c1}}{x_{c1}} + 4 \right] e^{-\frac{x+x_{c1}}{x_{c1}}} - \left\{ \left[ \left( \frac{l+x_{c1}}{x_{c1}} \right)^2 + 2 \left( \frac{l+x_{c1}}{x_{c1}} \right) + 2 \right] \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{x^2}{2x_{c1}^2} - \frac{1}{6} \left( \frac{l+x_{c1}}{x_{c1}} + 1 \right) \left( \frac{x+x_{c1}}{x_{c1}} \right)^3 \right\} e^{-\frac{l+x_{c1}}{x_{c1}}} \right] - \\ & \frac{p_o(x-l)^4}{24} - \frac{(p_k-p_o)}{120L_k} (x-l)^5 + \tilde{c}_1 x + \tilde{c}_2 \\ & (l \leq x \leq l+L_k), \end{aligned} \quad (18)$$

而  $[l+L_k, l+L]$  区段悬空岩梁挠度方程的形式解为

$$\begin{aligned} EI\tilde{y}_{12}(x) = & \frac{M_l}{2}(x-l)^2 - \frac{Q_l}{6}(x-l)^3 + \frac{q_1}{24}(x-l)^4 + k_1 x_{c1}^5 \cdot \\ & \left[ \left[ \frac{x+x_{c1}}{x_{c1}} + 4 \right] e^{-\frac{x+x_{c1}}{x_{c1}}} - \left\{ \left[ \left( \frac{l+x_{c1}}{x_{c1}} \right)^2 + 2 \left( \frac{l+x_{c1}}{x_{c1}} \right) + 2 \right] \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{x^2}{2x_{c1}^2} - \frac{1}{6} \left( \frac{l+x_{c1}}{x_{c1}} + 1 \right) \left( \frac{x+x_{c1}}{x_{c1}} \right)^3 \right\} e^{-\frac{l+x_{c1}}{x_{c1}}} \right] - \\ & p_o L_k \left[ \frac{(x-l)^3}{6} - \frac{L_k}{4}(x-l)^2 \right] - \frac{(p_k-p_o)L_k}{2} \left[ \frac{(x-l)^3}{6} - \right. \\ & \left. \frac{L_k(x-l)^2}{3} \right] + \tilde{c}_3 x + \tilde{c}_4, \quad (l+L_k \leq x \leq l+L). \end{aligned} \quad (19)$$

式 (15) ~ (19) 中的  $E$  为平面应变条件下顶板弹性模量， $I$  为单位宽度顶板的惯性距， $\beta = [C/(4EI)]^{1/4}$ 。式 (18)、(19) 中  $Q_l$ ,  $M_l$  为图 10 中  $x=l$  处的弯距、剪力。与文献[17]相比，本文多了方程式 (17)、系数  $\tilde{d}_3 \sim \tilde{d}_6$  和边界条件式 (14)，故式 (15)、(16)、(18)、(19) 系数  $\bar{d}_1 \sim \bar{d}_6$ ,  $\tilde{c}_1 \sim \tilde{c}_4$  与文献[17] 中对应关系式系数的求法不同，所得系数的数值结果将是完全不同。

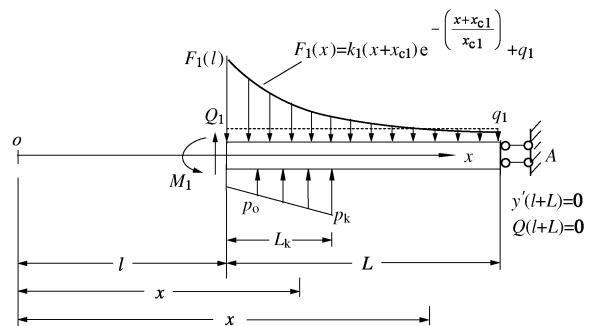


图 10 岩梁的隔离体图

Fig. 10 Isolating body of rock beam

由图 10 的平衡条件  $\sum F_y = 0$  可得

$$\begin{aligned} Q_l &= q_1 L + \int_l^{L+l} k_1(x+x_{c1}) e^{-\frac{x+x_{c1}}{x_{c1}}} dx - p_o L_k - \\ \frac{(p_k - p_o)L_k}{2} &= q_1 L + k_1 x_{c1}^2 \left[ \left( \frac{l+x_{c1}}{x_{c1}} + 1 \right) e^{-\frac{l+x_{c1}}{x_{c1}}} - \right. \\ \left. \left( \frac{l+x_{c1}}{x_{c1}} + 1 \right) e^{-\frac{l+x_{c1}}{x_{c1}}} \right] - p_o L_k - \frac{(p_k - p_o)L_k}{2}, \quad (20) \end{aligned}$$

图 10 及式 (18)、(19) 中的  $M_l$  为未知待求量。

式 (15)~(19) 中的系数  $\tilde{d}_1 \sim \tilde{d}_6$ ,  $\tilde{c}_1 \sim \tilde{c}_4$ , 要据裂纹面条件式 (14) 和  $x=0$ ,  $x=l$ ,  $x=l+L_k$  及岩梁跨中截面的位移和内外力连续条件

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} \bar{y}_{23}(-\infty) = q_2/C, \bar{y}'_{23}(-\infty) = 0, \\ \textcircled{2} \bar{y}_{23}(0) = \bar{y}_{22}(0), \bar{y}'_{23}(0) = \bar{y}'_{22}(0), \bar{y}''_{23}(0) = \\ \bar{y}''_{22}(0), \bar{y}'''_{23}(0) = \bar{y}'''_{22}(0), \\ \textcircled{3} \tilde{y}_{21}(l) = \tilde{y}_{11}(l), \tilde{y}'_{21}(l) = \tilde{y}'_{11}(l), \tilde{y}''_{21}(l) = \\ M_l/EI, \tilde{y}'''_{21}(l) = -Q_l/EI, \\ \textcircled{4} \tilde{y}_{11}(l+L_k) = \tilde{y}_{12}(l+L_k), \tilde{y}'_{11}(l+L_k) = \\ \tilde{y}'_{12}(l+L_k), \\ \textcircled{5} \tilde{Q}(l+L) = 0, \tilde{y}'_{12}(l+L) = 0 \end{array} \right\} \quad (21)$$

来求解。

对式 (15)~(19) 求 2, 3 阶导数, 再分别代入

$$M(x) = EI y''(x), \quad (22)$$

$$Q(x) = M'(x) = EI y'''(x), \quad (23)$$

可得各区段弯矩和剪力表达式, 限于篇幅不写出显式。

### 3 挠度方程形式解中待定系数的确定

#### 3.1 式 (18)、(19) 中待定系数 $\tilde{c}_1 \sim \tilde{c}_4$ 间的关系式

由式 (21) 中第⑤个的  $\tilde{y}'_{12}(l+L)=0$  条件, 可得式 (19) 中的  $c_3$ , 即有

$$\tilde{c}_3 = \frac{Q_l L^2}{2} - M_l L - \tilde{D}_1, \quad (24)$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_1 &= \frac{q_1 L^3}{6} + k_1 x_{c1}^4 \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{l+x_{c1}}{x_{c1}} + 1 \right) \left( \frac{l+x_{c1}}{x_{c1}} \right)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{l+l}{x_{c1}} \left[ \left( \frac{l+x_{c1}}{x_{c1}} \right)^2 + 2 \left( \frac{l+x_{c1}}{x_{c1}} \right) + 2 \right] \right] e^{-\frac{l+x_{c1}}{x_{c1}}} - \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{l+x_{c1}}{x_{c1}} + 3 \right) e^{-\frac{l+x_{c1}}{x_{c1}}} \right\} - p_o L_k \left[ \frac{L^2}{2} - \frac{L_k L}{2} \right] - \\ &\quad \frac{(p_k - p_o)L_k}{2} \left[ \frac{L^2}{2} - \frac{2L_k L}{3} \right]. \quad (25) \end{aligned}$$

对式 (18)、(19) 的一阶导数, 并据式 (21) 条件④中  $\tilde{y}'_{11}(l+L_k) = \tilde{y}'_{12}(l+L_k)$ , 可得

$$\tilde{c}_3 = \tilde{c}_1 - \frac{p_o L_k^3}{6} - \frac{(p_k - p_o)L_k^3}{8}. \quad (26)$$

对式 (18)、(19), 由式 (21) 条件④中  $\tilde{y}_{11}(l+L_k) = \tilde{y}_{12}(l+L_k)$ , 可得

$$\tilde{c}_4 = (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_3)(l+L_k) + \tilde{c}_2 - \frac{p_o L_k^4}{8} - \frac{11(p_k - p_o)L_k^4}{120}. \quad (27)$$

#### 3.2 系数 $\tilde{d}_3 \sim \tilde{d}_6$ 和 $\tilde{c}_1 \sim \tilde{c}_4$ 的确定

将式 (17) 的 2, 3 阶导数代入裂纹面边界条件式 (14), 解代数方程可将  $\tilde{d}_5$ ,  $\tilde{d}_6$  用  $\tilde{d}_3$ ,  $\tilde{d}_4$  表示为

$$\begin{aligned} \tilde{d}_5 &= \{\tilde{d}_3 [\sin \beta \tilde{x} \cos \beta \tilde{x} + \sinh \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x}] + \\ &\quad \tilde{d}_4 \sinh^2 \beta \tilde{x} - \tilde{D}_2 [\sin \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x} + \cos \beta \tilde{x} \sinh \beta \tilde{x}] / \sin^2 \beta \tilde{x} \}, \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}_6 &= \{-\tilde{d}_3 \cosh^2 \beta \tilde{x} + \tilde{d}_4 [\sin \beta \tilde{x} \cos \beta \tilde{x} - \sinh \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x}] + \\ &\quad \tilde{D}_2 [\sin \beta \tilde{x} \sinh \beta \tilde{x} + \cos \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x}] - \\ &\quad \tilde{D}_3 \sin \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x}\} / \sin^2 \beta \tilde{x}. \quad (29) \end{aligned}$$

式 (28)、(29) 中,

$$\tilde{D}_2 = \frac{k \tilde{M}}{2 \beta^2 EI} - \frac{\tilde{A}_1 x_{c1}}{2 \beta^2} \left[ B_1 + \frac{\tilde{x}}{x_{c1}} - 1 \right], \quad (30)$$

$$\tilde{D}_3 = \frac{k \tilde{Q}}{2 \beta^3 EI} + \frac{\tilde{A}_1}{2 \beta^3} \left[ B_1 + \frac{\tilde{x}}{x_{c1}} - 2 \right], \quad (31)$$

$$\tilde{A}_1 = \frac{k_1 x_{c1}^2 \exp[-(\tilde{x} + x_{c1})/x_{c1}]}{EI(1 + 4\beta^4 x_{c1}^4)}. \quad (32)$$

由式 (17)、(18) 及其 1~3 阶导数, 并据式 (21) 条件③中  $x=l$  时的挠度、倾角、弯矩和剪力连续条件, 可写出以下 4 个关于  $\tilde{d}_3 \sim \tilde{d}_6$ ,  $M_l$  的代数方程:

$$\begin{aligned} &[\tilde{d}_3 \sin \beta l \sinh \beta l + \tilde{d}_4 \sin \beta l \cosh \beta l + \\ &\quad \tilde{d}_5 \cos \beta l \sinh \beta l + \tilde{d}_6 \cos \beta l \cosh \beta l] + \tilde{D}_4 \\ &= \frac{\tilde{c}_1 l}{EI} + \frac{\tilde{c}_2}{EI} + \tilde{D}_5, \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\beta \{ [\cos \beta l \sinh \beta l + \sin \beta l \cosh \beta l] \tilde{d}_3 + \\ &\quad [\cos \beta l \cosh \beta l + \sin \beta l \sinh \beta l] \tilde{d}_4 + \\ &\quad [\cos \beta l \cosh \beta l - \sin \beta l \sinh \beta l] \tilde{d}_5 + \\ &\quad [\cos \beta l \sinh \beta l - \sin \beta l \cosh \beta l] \tilde{d}_6 \} - \tilde{D}_6 \\ &= \frac{\tilde{c}_1}{EI} + \tilde{D}_7, \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2\beta^2 \{ \cos \beta l [\tilde{d}_3 \cosh \beta l + \tilde{d}_4 \sinh \beta l] - \sin \beta l \times \\ &\quad [\tilde{d}_5 \cosh \beta l + \tilde{d}_6 \sinh \beta l] \} + \tilde{D}_8 = \frac{M_l}{EI}, \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2\beta^3 \{ [\cos \beta l \sinh \beta l - \sin \beta l \cosh \beta l] \tilde{d}_3 + \\ &\quad [\cos \beta l \cosh \beta l - \sin \beta l \sinh \beta l] \tilde{d}_4 - \\ &\quad [\cos \beta l \sinh \beta l + \sin \beta l \cosh \beta l] \tilde{d}_5 - \\ &\quad [\cos \beta l \cosh \beta l + \sin \beta l \sinh \beta l] \tilde{d}_6 \} - \tilde{D}_9 = \frac{-Q_l}{EI}. \quad (36) \end{aligned}$$

式 (33)~(36) 中,

$$\tilde{D}_4 = A_{1l} x_{c1}^3 \left[ B_1 + \frac{l}{x_{c1}} + 1 \right] + \frac{q_1}{4\beta^4 EI} + \tilde{c}_5, \quad (37)$$

$$\tilde{D}_5 = \frac{k_1 x_{cl}^5}{EI} \left\{ \left[ \frac{l+x_{cl}}{x_{cl}} + 4 \right] + \frac{1}{6} \left( \frac{l+x_{cl}}{x_{cl}} + 1 \right) \left( \frac{l+x_{cl}}{x_{cl}} \right)^3 - \frac{l^2}{2x_{cl}^2} \left[ \left( \frac{l+x_{cl}}{x_{cl}} \right)^2 + 2 \left( \frac{l+x_{cl}}{x_{cl}} \right) + 2 \right] \right\} e^{-\frac{l+x_{cl}}{x_{cl}}}, \quad (38)$$

$$\tilde{D}_6 = A_{ll} x_{cl}^2 \left[ B_1 + \frac{l}{x_{cl}} \right], \quad (39)$$

$$\tilde{D}_7 = \frac{k_1 x_{cl}^4}{EI} \left\{ - \left[ \frac{l+x_{cl}}{x_{cl}} + 3 \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{l+x_{cl}}{x_{cl}} + 1 \right) \left( \frac{l+x_{cl}}{x_{cl}} \right)^2 - \frac{l}{x_{cl}} \left[ \left( \frac{l+x_{cl}}{x_{cl}} \right)^2 + 2 \left( \frac{l+x_{cl}}{x_{cl}} \right) + 2 \right] \right\} e^{-\frac{l+x_{cl}}{x_{cl}}}, \quad (40)$$

$$\tilde{D}_8 = A_{ll} x_{cl} \left[ B_1 + \frac{l}{x_{cl}} - 1 \right], \quad (41)$$

$$\tilde{D}_9 = A_{ll} \left[ B_1 + \frac{l}{x_{cl}} - 2 \right], \quad (42)$$

$$A_{ll} = \frac{k_1}{EI} \frac{x_{cl}^2}{1+4\beta^4 x_{cl}^4} e^{-\frac{l+x_{cl}}{x_{cl}}}. \quad (43)$$

通过式(24), 式(26)中的 $\tilde{c}_1$ 可用 $\tilde{c}_3$ 表示。通过式(26), 式(34)中的 $\tilde{c}_3$ 可用 $Q_l$ ,  $M_l$ 表示。由于 $Q_l$ 已知,  $\tilde{d}_5$ ,  $\tilde{d}_6$ 用 $\tilde{d}_3$ ,  $\tilde{d}_4$ 表示, 故式(34)~(36)是关于 $M_l$ ,  $\tilde{d}_3$ ,  $\tilde{d}_4$ 的三元一次方程组。

通过由式(24)、(35)消去 $M_l$ 后得到的关系式, 再由该关系式结合式(36), 可解得 $\tilde{d}_3$ ,  $\tilde{d}_4$ 为

$$\begin{cases} \tilde{d}_3 = \frac{\tilde{b}_1 \tilde{a}_{22} - \tilde{b}_2 \tilde{a}_{12}}{\tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12} \tilde{a}_{21}}, \\ \tilde{d}_4 = \frac{\tilde{a}_{11} \tilde{b}_2 - \tilde{a}_{21} \tilde{b}_1}{\tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{12} \tilde{a}_{21}}, \end{cases} \quad (44)$$

其中,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= [\cos \beta l \sinh \beta l + \sin \beta l \cosh \beta l + 2\beta L \cos \beta l \cosh \beta l] + \\ &\quad \{[\cos \beta l \cosh \beta l - \sin \beta l \sinh \beta l - 2\beta L \sin \beta l \cosh \beta l] \cdot [\sin \beta \tilde{x} \cos \beta \tilde{x} + \sinh \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x}] - [\cos \beta l \sinh \beta l - \sin \beta l \cosh \beta l - 2\beta L \sin \beta l \cosh \beta l] \cosh^2 \beta \tilde{x}\} / \sin^2 \beta \tilde{x}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{12} &= \sinh \beta l] + \{[\cos \beta l \cosh \beta l - \sin \beta l \sinh \beta l - 2\beta L \cdot \sin \beta l \cosh \beta l] \sinh^2 \beta \tilde{x} + [\cos \beta l \sinh \beta l - \sin \beta l \cosh \beta l] [\sin \beta \tilde{x} \cos \beta \tilde{x} - \sinh \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x}]\} / \sin^2 \beta \tilde{x}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{21} &= [\cos \beta l \sinh \beta l - \sin \beta l \cosh \beta l] - \{[\cos \beta l \cosh \beta l + \sin \beta l \sinh \beta l] \cdot [\sin \beta \tilde{x} \cos \beta \tilde{x} + \sinh \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x}] - [\cos \beta l \sinh \beta l + \sin \beta l \cosh \beta l] \cosh^2 \beta \tilde{x}\} / \sin^2 \beta \tilde{x}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{22} &= [\cos \beta l \cosh \beta l - \sin \beta l \sinh \beta l] - \{[\cos \beta l \cosh \beta l + \sin \beta l \sinh \beta l] \sinh^2 \beta \tilde{x} + [\cos \beta l \sinh \beta l + \sin \beta l \cosh \beta l] \cosh^2 \beta \tilde{x}\} / \sin^2 \beta \tilde{x}, \end{aligned}$$

$$\cosh \beta l] [\sin \beta \tilde{x} \cos \beta \tilde{x} - \sinh \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x}] / \sin^2 \beta \tilde{x}, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= \tilde{D}_{10} + [\cos \beta l \cosh \beta l - \sin \beta l \sinh \beta l - 2\beta L \sin \beta l \cosh \beta l] \tilde{D}_{11} - [\cos \beta l \sinh \beta l - \sin \beta l \cosh \beta l - 2\beta L \sin \beta l \sinh \beta l] \tilde{D}_{12}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_2 &= \frac{\tilde{D}_9 EI - Q_l}{2\beta^3 EI} - [\cos \beta l \cosh \beta l + \sin \beta l \sinh \beta l] \tilde{D}_{11} + [\cos \beta l \sinh \beta l + \sin \beta l \cosh \beta l] \tilde{D}_{12}. \end{aligned} \quad (50)$$

式(49)、(50)中,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{10} &= \frac{1}{\beta EI} \left[ \frac{Q_l L^2}{2} - \tilde{D}_1 + \frac{p_o L_k^3}{6} + \frac{(p_k - p_o)L_k^3}{8} \right] + \frac{\tilde{D}_6 + \tilde{D}_7}{\beta} - \frac{L}{\beta} \tilde{D}_8, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{11} &= \{\tilde{D}_2 [\sin \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x} + \cos \beta \tilde{x} \sinh \beta \tilde{x}] - \tilde{D}_3 \sin \beta \tilde{x} \sinh \beta \tilde{x}\} / \sin^2 \beta \tilde{x}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{12} &= \{\tilde{D}_2 [\sin \beta \tilde{x} \sinh \beta \tilde{x} + \cos \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x}] - \tilde{D}_3 \sin \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x}\} / \sin^2 \beta \tilde{x}. \end{aligned} \quad (53)$$

式(45)~(53)的右端均为已知量, 故由式(44)、(28)、(29)知,  $\tilde{d}_3 \sim \tilde{d}_6$ 已全部确定。将 $\tilde{d}_3 \sim \tilde{d}_6$ 代入式(34)、(35)、(33)可确定 $\tilde{c}_1$ ,  $M_l$ ,  $\tilde{c}_2$ 。将 $\tilde{c}_1$ ,  $\tilde{c}_2$ 代入式(26)、(27)可确定 $\tilde{c}_3$ ,  $\tilde{c}_4$ 。

### 3.3 式(15)、(16)中待定系数 $\bar{d}_1 \sim \bar{d}_6$ 的确定

与得到式(28)、(29)的过程类似, 将式(16)的2, 3阶导数代入式(14), 可将 $\bar{d}_5$ ,  $\bar{d}_6$ 用 $\bar{d}_3$ ,  $\bar{d}_4$ 表示为

$$\begin{aligned} \bar{d}_5 &= \{\bar{d}_3 [\sin \beta \tilde{x} \cos \beta \tilde{x} + \sinh \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x}] + \bar{d}_4 \sinh^2 \beta \tilde{x} - \tilde{D}_2 [\sin \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x} + \cos \beta \tilde{x} \sinh \beta \tilde{x}] + \tilde{D}_3 \sin \beta \tilde{x} \sinh \beta \tilde{x}\} / \sin^2 \beta \tilde{x}, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \bar{d}_6 &= \{-\bar{d}_3 \cosh^2 \beta \tilde{x} + \bar{d}_4 [\sin \beta \tilde{x} \cos \beta \tilde{x} - \sinh \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x}] + \tilde{D}_4 \sinh \beta \tilde{x} + \tilde{D}_2 [\sin \beta \tilde{x} \sinh \beta \tilde{x} + \cos \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x}] - \tilde{D}_3 \sin \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x}\} / \sin^2 \beta \tilde{x}. \end{aligned} \quad (55)$$

对挠度方程式(15)、(16)及其1, 2, 3阶导数, 据式(21)条件②中 $x=0$ 的挠度、倾角、弯矩和剪力连续条件, 可写出关于 $\bar{d}_1 \sim \bar{d}_6$ 的4个代数方程, 解得

$$\bar{d}_4 = e^{-2\beta \tilde{x}} \cdot \bar{D}_4, \quad (56)$$

$$\bar{d}_3 = \bar{d}_4 - \bar{D}_5, \quad (57)$$

$$\bar{d}_1 = \bar{d}_6 + \frac{q_1 - q_2}{4\beta^4 EI} + A_1 x_{cl}^3 (B_1 + 1) - A_2 x_{cl}^3 (B_2 + 1), \quad (59)$$

$$\bar{d}_2 = \bar{d}_3 + \frac{A_1 x_{cl} (B_1 - 1) - A_2 x_{cl} (B_2 - 1)}{2\beta^2}. \quad (58)$$

式(56)~(58)中,

$$\begin{aligned} \bar{D}_4 &= \tilde{D}_2 [\sin \beta \tilde{x} + \cos \beta \tilde{x}] [\sinh \beta \tilde{x} + \cosh \beta \tilde{x}] - \tilde{D}_3 \sin \beta \tilde{x} [\sinh \beta \tilde{x} + \cosh \beta \tilde{x}] + \bar{D}_5 [\sin \beta \tilde{x} \cos \beta \tilde{x} + \sinh \beta \tilde{x} \cosh \beta \tilde{x}] + \bar{D}_6 \sin^2 \beta \tilde{x}, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\bar{D}_5 = \frac{A_1 x_{c1}^2 B_1 + A_2 x_{c2}^2 B_2}{2\beta} + \frac{A_1 x_{c1} (B_1 - 1) - A_2 x_{c2} (B_2 - 1)}{2\beta^2} + \frac{A_1 (B_1 - 2) + A_2 (B_2 - 2)}{4\beta^3}, \quad (60)$$

$$\bar{D}_6 = \frac{q_1 - q_2}{4\beta^4 EI} + A_1 x_{c1}^3 (B_1 + 1) - A_2 x_{c2}^3 (B_2 + 1) + \frac{A_1 x_{c1}^2 B_1 + A_2 x_{c2}^2 B_2}{2\beta} - \frac{A_1 (B_1 - 2) + A_2 (B_2 - 2)}{4\beta^3}, \quad (61)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{4}{1 + 4\beta^4 x_{c1}^4}, \\ B_2 &= \frac{4}{1 + 4\beta^4 x_{c2}^4}, \\ A_1 &= \frac{k_1}{EI} \frac{x_{c1}^2 e^{-1}}{1 + 4\beta^4 x_{c1}^4}, \\ A_2 &= \frac{k_2}{EI} \frac{x_{c2}^2 e^{-1}}{1 + 4\beta^4 x_{c2}^4}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

将  $\bar{d}_3$ ,  $\bar{d}_4$  代入式(54), (55) 可得  $\bar{d}_5$ ,  $\bar{d}_6$ 。至此, 挠度方程式(15)~(19) 中 14 个待定系数已完全确定。

## 4 顶板内力变化及其“反弹”特性算例

需要说明, 实际采场岩层状况和岩性复杂, 非理想模型所能完全替代。第 2, 3 节解的应用是采用 Matlab 软件, 据所求得的系数  $\bar{d}_1 \sim \bar{d}_6$ ,  $\tilde{d}_3 \sim \tilde{d}_6$ ,  $\tilde{c}_1 \sim \tilde{c}_4$  和式(15)~(19), (22), (23), 进行数值计算和绘图分析, 从理论上阐述裂纹发生初始阶段的顶板内力变化趋势与顶板的“反弹”、“压缩”特性。

### 4.1 裂纹发生初始阶段顶板中部的弯矩变化

图 11 中  $k=1$  的弯矩曲线 1 同图 7, 为尚未发生裂纹时的岩梁弯矩图; 图 11 中曲线 2, 3 为相同荷载参数下, 受采动影响而启动的坚硬顶板裂纹发生初始阶段, 即图中裂纹截面 ( $\tilde{x}=7.535$  m) 尚能传递原截面的 0.9 和 0.8 倍弯矩值、剪力值时的岩梁弯矩图。从图 11 曲线 2, 3 看到, 因裂纹发生, 末排支护前方使岩梁向上弯曲的正弯矩值全面减小, 从末排支护到采空区跨中截面使岩梁向下弯曲的负弯矩的绝对值

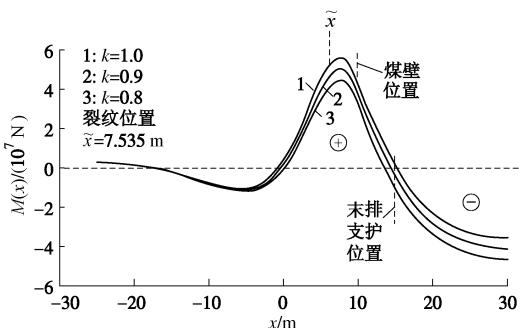


图 11 裂纹发生初始阶段的岩梁弯矩变化

Fig. 11 Variation of bending moment of rock beam at its initial stage of cracking

全面增大。在  $x=-25$  m 前方 3 条曲线趋于重合, 这是由于煤层一直接顶基础的支承, 使  $\tilde{x}=7.535$  m 截面裂纹的影响在  $x=-25$  m 前方有很大减弱。

利用 Matlab 绘图的精确放大功能, 从图 11 得到裂纹面  $\tilde{x}$  附近弯矩曲线的放大图为 12。图 12 中在裂纹面  $\tilde{x}$  处曲线 2, 3 的弯矩值是  $4.97$ ,  $4.42 \times 10^7$  N·m, 分别为裂纹出现前的曲线 1 之  $\tilde{x}$  截面弯矩值  $5.52 \times 10^7$  N·m 的 0.9 和 0.8 倍。

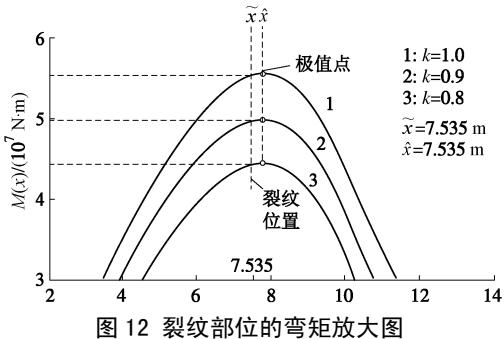


图 12 裂纹部位的弯矩放大图

Fig. 12 Enlarged drawing of bending moment at cracking part

### 4.2 裂纹发生初始阶段顶板中部的剪力变化

图 13 为与图 11 中各弯矩曲线对应的岩梁剪力曲线, 其中的曲线 1 同图 8。因裂纹发生, 图 13 中裂纹面  $\tilde{x}$  前方曲线 2, 3 的剪力值全面减小, 在  $x=-25$  m 前方 3 条曲线趋于重合; 岩梁剪力在煤壁截面 ( $x=10$  m) 处取到最大值  $-1.138 \times 10^7$  N。图 13 中从煤壁到采空区跨中 ( $l+L=30$  m), 3 条曲线相重合, 是因为岩梁裂纹模型图 6 中该区段的荷载不变, 故该区段每一截面上 3 条曲线的剪力值都相同。

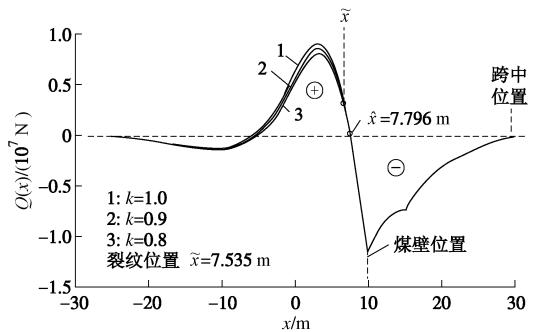


图 13 裂纹发生初始阶段的岩梁剪力变化

Fig. 13 Variation of shear of rock beam at its initial stage of cracking

图 14 为从图 13 中得到的裂纹面  $\tilde{x}$  附近岩梁剪力曲线的精确放大图。在裂纹面 ( $\tilde{x}=7.535$  m) 曲线 2, 3 的剪力值是  $9.30$ ,  $8.27 \times 10^5$  N, 分别为裂纹出现前曲线 1 上  $\tilde{x}$  面剪力值  $10.36 \times 10^6$  N 的 0.9 和 0.8 倍。

### 4.3 顶板挠度变化与顶板“反弹”、“压缩”特性

图 15 中的曲线 1, 2, 3 为与图 11 中岩梁弯矩曲线对应的岩梁挠度曲线。由于岩梁在  $\tilde{x}=7.535$  m 截面传递弯矩、剪力的能力从 1 倍降低到 0.9 和 0.8 倍, 故曲线 2, 3 在裂纹面  $\tilde{x}$  后方的岩梁挠度明显增大; 在

$l+L=30\text{ m}$  的岩梁跨中, 达到曲线 1, 2, 3 各自的最大值 29.0, 32.0, 34.8 mm。由于裂纹发生与扩展, 曲线 2, 3 的跨中挠度比曲线 1 的跨中挠度分别增大了 2.8, 5.8 mm。与现场顶板超前断裂后, 顶板回转, 采空区顶板下沉量明显增大特性一致。

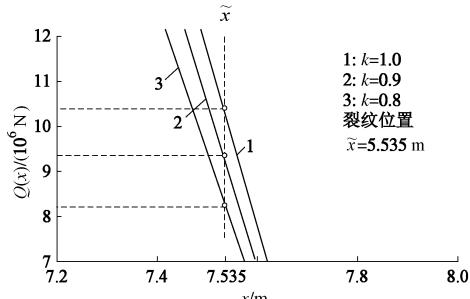


图 14 裂纹部位的剪力放大图

Fig. 14 Enlarged drawing of shear at cracking part

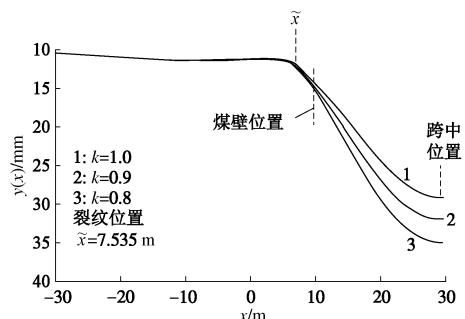


图 15 裂纹发生初始阶段的岩梁挠度变化

Fig. 15 Deflection changes of the rock beam at its initial stage of cracking

图 16 为图 15 中裂纹面  $\tilde{x}$  附近挠曲线的精确放大图。从图 16 看到, 岩梁未发生裂纹时的挠曲线 1 为光滑曲线。3 条曲线在 2.43 m 和 8 m 附近发生交叉。曲线 2, 3 在裂纹面  $\tilde{x}$  呈小折角, 使得岩梁挠度减小或顶板发生“反弹”, 反弹量为 1~2 mm; 图 16 中曲线 2, 3 在  $x=2.43\text{ m}$  前方位于曲线 1 下方, 呈“压缩”状。从而形成裂纹面  $\tilde{x}$  附近的岩梁挠度“反弹”区及其前方的“压缩”区, 与姜福兴等<sup>[5]</sup>、谭云亮等<sup>[6]</sup>、黄洋等<sup>[7]</sup>在工程中实际监测得到的断裂顶板“反弹”、“压缩”顺序及曲线交叉点位置关系完全一致(详见图 1 中曲线 1, 2 和图 2)。

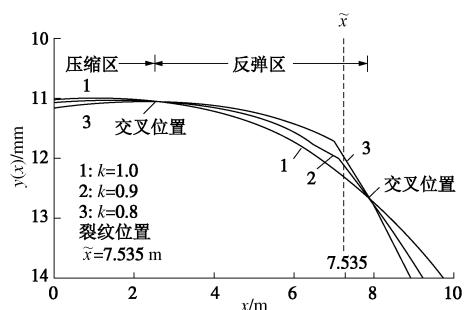


图 16 裂纹发生部位顶板反弹特性放大图

Fig. 16 Enlarged drawing of rebound and compression property of roof at cracking part

与门头沟矿顶板断裂反彈量<sup>[5]</sup>相比, 图 16 中反彈量小是因为顶板处于裂纹发生初始阶段。

## 5 结 论

本文将煤壁前方煤层和直接顶视为弹性地基, 在文[17]无裂纹顶板内力和挠度表达式的基础上, 以最大拉应变强度条件为顶板破裂条件, 在假定裂纹发生初始阶段顶板上覆荷载不变的条件下, 对初次来压前超前裂纹发生初始阶段的顶板内力变化和“反彈”特性进行分析, 通过 Matlab 算例分析得到以下 4 点结论。

(1) 所得到裂纹发生初始阶段的五段式弯矩曲线光滑连续, 挠度、剪力曲线分段光滑连续, 满足裂纹面边界条件式(14)及式(21)所有的连续和边界条件。

(2) 按最大拉应变强度条件确定的裂纹面在煤壁前方, 其位置在现场报导的顶板超前断裂位置范围内。采空区顶板下沉量随煤壁前方裂纹发生、扩展明显地增大, 在采空区跨中顶板下沉增量达到最大, 与现场通常的观察结果一致。在裂纹面附近区域顶板挠度发生反彈, 在反彈区前方存在压缩区, 与现场监测到的顶板“反彈”、“压缩”特性一致。

(3) 末排支护为顶板弯矩反弯点, 随煤壁前方裂纹生长, 末排支护前方顶板向上弯曲的正弯矩全面减小, 而其后方顶板向下弯曲的弯矩全面增大(其趋向将导致顶板采空区跨中截面出现裂纹); 煤壁前方顶板剪力随裂纹生长逐渐减小, 煤壁后方顶板剪力不变。

(4) 从本文结果可导得基于最大拉应力强度条件的顶板裂纹发生初始阶段坚硬顶板内力、挠度变化, 在相应解中煤壁前方裂纹位置要略接近煤壁。现场通过测量顶板“反彈”、“压缩”(下沉)量及其速度变化, 去反演顶板断裂位置。对于存在“多断来压”的坚硬顶板, 用反彈频率和次数作为来压预报指标。本文从理论上阐明了来压前顶板存在“反彈”、“压缩”特性, 达到增强人们对于断裂顶板特性认识的目的。

## 参 考 文 献:

- [1] 李其仁, 赵军, 赵文宏. 我矿采场坚硬顶板破断规律及控制[J]. 煤炭科学技术, 1993, 21(11): 2~4. (LI Qi-ren, ZHAO Jun, ZHAO Wen-hong. Breaking law of hard roof and control of the roof in our coal mine[J]. Coal Science and Technology, 1993, 21(11): 2~4. (in Chinese))
- [2] 钟新谷. 老顶的断裂位置与顶板的反彈[J]. 湘潭矿业学院学报, 1993, 8(增刊): 47~51. (ZHONG Xingu. Breaking place of hard roof and anti-elasticity of the roof[J]. Journal of Xingtian Mining Institute, 1993, 8(S0): 47~51. (in Chinese))
- [3] 吴兴荣, 杨茂田. 厚层坚硬顶板的断裂与初次垮落[J]. 矿山压力与顶板管理, 1990, 7(2): 22~25. (WU Xing-rong, YANG Mao-tian. Breakage and initial collapse of thick hard roof[J]. Mine Pressure and Roof Management, 1990, 7(2): 22~25. (in Chinese))

- YANG Mao-tian. Fracture and the first caving in hard and massive overlying strata[J]. Ground Pressure and Strata Control, 1990, 7(2): 22 - 25. (in Chinese))
- [4] 高存宝, 钱鸣高, 翟明华, 等. 坚硬顶板来压前的多次断裂现象及其应用[J]. 矿山压力与顶板管理, 1993, 10(1): 37 - 40. (GAO Cun-bao, QIAN Ming-gao, ZHAI Ming-hua, et al. Many times fracture phenomenon and its application of hard roof before weighting[J]. Ground Pressure and Strata Control, 1993, 10(1): 37 - 40. (in Chinese))
- [5] 姜福兴, 蒋国安, 谭云亮. 印度浅埋坚硬顶板厚煤层开采方法探讨[J]. 矿山压力与顶板管理, 2002, 19(1): 57 - 59. (JIANG Fu-xing, JIANF Guo-an, TAN Yun-liang. Study on mining method on the condition of hard roof and shallow thick coal seam in india[J]. Ground Pressure and Strata Control, 2002, 19(1): 57 - 59. (in Chinese))
- [6] 谭云亮, 杨永杰. 关于“反弹”及其工程意义的评述[J]. 东北煤炭技术, 1995(2): 27 - 31. (TAN Yun-liang, YANG Yong-jie. Discussion of anti-elasticity and its engineering significance[J]. Coal Technology of Northeast China, 1995(2): 27 - 31. (in Chinese))
- [7] 黄 洋, 姚强岭, 丁效雷, 等. 坚硬顶板条件下老顶来压预测预报[J]. 煤炭工程, 2008(12): 56 - 57. (Coal engineering, 2008, 12, 56-57. HUANG Yang, YAO Qiang-ling, DING Xiao-lei, et al. Basic roof pressure forecasting on the condition of hard roof[J]. Coal Engineering, 2008(12): 56 - 57. (in Chinese))
- [8] 杨宝详.综采工作面顶板压力周期来压规律[J]. 内蒙古科技与经济, 2010, 10(16): 69 - 70. (YANG Bao-xiang. Law of periodic roof pressure on fully mechanized coal mining face[J]. Inner Mongolia Science Technology and Economy, 2010, 10(16): 69 - 70. (in Chinese))
- [9] 吴志刚, 程明华, 周庭振. 徐州西部矿区坚硬顶板来压预测预报[J]. 岩石力学与工程学报, 1996, 15(2): 163 - 170. (WU Zhi-gang, ZHAI Ming-hua, ZHOU Ting-zhen. Prediction to pressure of the west mine in Xuzhou[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1996, 15(2): 163 - 170. (in Chinese))
- [10] 钱鸣高, 茅献彪, 缪协兴. 采场覆岩中关键层上载荷的变化规律[J]. 煤炭学报, 1998, 23(2): 135 - 139. (QIAN Ming-gao, MAO Xian-biao, MIAO Xie-xing. Variation of loads on the key layer of the overlying strata above the working[J]. Journal of China Coal Society, 1998, 23(2): 135 - 139. (in Chinese))
- [11] 钱鸣高, 石平五. 矿山压力与岩层控制[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 2003. (QIAN Ming-gao, SHI Ping-wu. Mine pressure and controlling of rock stratum[M]. Xuzhou: China University of Mining and Technology Press, 2003. (in Chinese))
- [12] 闵长江, 卜凡启, 周廷振, 等. 煤矿冲击矿压及防治技术[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1998. (MIN Chang-jiang, PIAO Fan-qi, ZHOU Ting-zhen, et al. The rock burs in coal mine and prevention technology[M]. Xuzhou: China University of Mining and Technology Press, 1998. (in Chinese))
- [13] 窦林名, 何学秋. 冲击矿压防治理论与技术[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 2001. (DOU Lin-ming, HE Xue-qiu. The prevention theory and technology of rock burst[M]. Xuzhou: China University of Mining and Technology Press, 2001. (in Chinese))
- [14] 徐连满, 潘一山, 李忠华, 等. 深部开采覆岩应力变化规律模拟试验研究[J]. 中国地质灾害与防治学报, 2011, 22(3): 61 - 66. (XU Lian-men, PAN Yi-shan, LI Zhang-hua, et al. Simil, similarity simulation experiment of deformation of deep mining -induced overburden stress[J]. Zhongguo Dizhizaihai yu Fangzi Xuebao, 2011, 22(3): 61 - 66. (in Chinese))
- [15] 刘正和, 赵阳升, 弓培林, 等. 大采高放顶煤工作面矿压显现规律的研究[J]. 太原理工大学学报, 2011, 42(5): 524 - 527. (LIU Zheng-he, ZHAO Yang-shng, GONG Pei-lin, et al. The laws of strata behavior on the high seam top coal working face[J]. Journal of Taiyuan University of Technology, 2011, 42(5): 524 - 527. (in Chinese))
- [16] 李新元, 马念杰, 钟亚平, 等. 坚硬顶板断裂过程中弹性能量积聚与释放的分布规律[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(增刊 1): 2786 - 2793. (LI Xin-yuan, MA Nian-jie, ZHONG Ya-ping, et al. Storage and release regular of elastic energy distribution in hard roof fracturing[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(S1): 2786 - 2793. (in Chinese))
- [17] 潘 岳, 顾士坦, 戚云松. 初次来压前受超前增压荷载作用的坚硬顶板弯矩、挠度和剪力的解析解[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(8): 1544 - 1553. (PAN Yue, GU Shi-tan, QI Yun-song. Analytic solution of the hard roof's bending moment, deflection and shear under advanced supercharger load and supporting resistance before first weighting[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, 32(8): 1544 - 1553. (in Chinese))
- [18] 王 瑶, 吴胜兴, 周继凯, 等. 花岗岩动态轴向拉伸力学性能试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(11): 2328 - 2336. (WANG Yao, WU Sheng-xing, ZHOU Ji-kai, et al. Experimental study of dynamic axial tensile mechanical properties of Granite[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(11): 2329 - 2336. (in Chinese))