

DOI: 10.11779/CJGE201505006

考虑时间效应的 K_0 各向异性 UH 模型

孔令明, 姚仰平*

(北京航空航天大学交通科学与工程学院, 北京 100191)

摘要: 将所建立的考虑时间效应的超固结土统一硬化模型(时间 UH 模型)推广为能够考虑 K_0 各向异性的弹黏塑性模型。基于广义非线性强度准则的变换应力三维化方法, 将新模型扩展到三维应力状态。使用新模型预测 K_0 固结土的一维和三轴等应变率加载试验, 预测结果表明新模型能够合理反映应变率对 K_0 固结土前期固结压力和应力应变曲线的影响。根据模型的基本方程, 推导三轴压缩条件下不排水抗剪强度的理论公式, 并将该公式的计算结果与试验结果进行对比, 发现该公式能够反映不排水抗剪强度随超固结度和应变率的增大而提高的性质。

关键词: 超固结; 各向异性; 流变性; 本构模型; 不排水抗剪强度

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2015)05-0812-09

作者简介: 孔令明(1988-), 男, 博士研究生, 从事土的弹黏塑性本构建模方面的研究。E-mail: lm.kong@foxmail.com。

K_0 -anisotropic UH model considering time effects

KONG Ling-ming, YAO Yang-ping

(School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: The time-dependent unified hardening constitutive model for overconsolidated clays (time-dependent UH model) proposed by the authors is extended to a constitutive model considering K_0 -anisotropy. Based on the generalized non-linear strength criterion and the corresponding transformed stress tensor, the new model is generalized to the three-dimensional stress state. The new model is then used to predict one-dimensional and triaxial CRS (constant rate of strain) tests on K_0 -consolidated clays. The predicted results indicate that the new model can reflect reasonably the influence of strain rate on preconsolidation pressure and stress-strain relationship of K_0 -consolidated clays. Moreover, a theoretical function of triaxial undrained shear strength is deduced from basic equations of the new model. The calculated results of the theoretical function are compared with the experimental ones, and it is shown that the theoretical function can describe the experimental phenomenon that triaxial undrained strength increases with the increasing overconsolidation degree or the strain rate.

Key words: overconsolidation; anisotropy; viscosity; constitutive model; undrained shear strength

0 引言

地基土往往表现出一定程度的超固结, 并且处于各向应力不等的 K_0 固结状态, 具有 K_0 各向异性。不仅如此, 黏土地基, 尤其是软黏土地基还表现出很强的流变特征。超固结性、 K_0 各向异性以及流变性对地基土的变形与强度具有重要影响。建立一个能够同时考虑以上 3 个因素影响的土本构模型具有理论价值和工程意义。

为了考虑 K_0 各向异性的影响, Sekiguchi 等^[1]、Wheeler 等^[2]采用旋转屈服面的方法建立了土的 K_0 各向异性本构模型。为了考虑黏土的流变特征, Adachi 等^[3]、Kutter 等^[4]、Yin 等^[5]基于过应力理论建立了弹黏塑性本构模型。Zhou 等^[6]、王立忠等^[7]将屈服面旋转和过应力理论的思想结合, 建立了 K_0 各向异性的弹黏塑性本构模型。姚仰平等^[8]提出了超固结土的 K_0 各

向异性本构模型。以上这些模型仅考虑了超固结性、 K_0 各向异性和流变性中一个或两个因素的影响, 尚不能做到对 3 个因素的全面反映。

统一硬化模型(UH 模型)^[9-13]是一个超固结土的弹塑性本构模型。Yao 等^[14]在 UH 模型的基础上, 通过在当前屈服面中引入时间效应参量(折算时间), 建立了一个与时间相关的当前屈服面方程, 进而建立了考虑时间效应的 UH 模型(时间 UH 模型)。时间 UH 模型不仅能够描述土的蠕变、松弛和应变率效应等流

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973 计划)项目(2014CB047001); 国家自然科学基金项目(11272031, 51179003); 北京市自然科学基金项目(8132042); 北京航空航天大学博士创新基金项目

收稿日期: 2014-06-24

*通讯作者

变现象, 还能描述土的剪胀、应变软化等超固结性质。而且, 时间 UH 模型仅比修正剑桥模型增加一个参数 (即次固结系数)。

本文拟通过旋转屈服面的方法, 将时间 UH 模型扩展到可以考虑 K_0 各向异性, 建立 K_0 各向异性时间 UH 模型。然后, 采用基于广义非线性强度准则的变换应力的三维化方法, 将 K_0 各向异性时间 UH 模型扩展到三维应力状态。接着, 根据模型的基本方程, 推导一个可同时反映超固结性、 K_0 各向异性和流变性影响的不排水抗剪强度公式。最后, 使用模型预测 K_0 固结土的一维单级和多级加载等应变率压缩试验、三轴不排水单级和多级加载等应变率剪切试验, 并将不排水抗剪强度公式的计算结果与试验结果比较, 验证模型与不排水抗剪强度公式的有效性。

1 模型理论框架

1.1 基本假定

Yao 等^[14]、Borja 等^[15]、Kaliakin 等^[16]认为土在时间影响下的总应变由弹性应变、塑性应变和黏性应变三部分组成:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p + d\epsilon_{ij}^t, \quad (1)$$

式中, $d\epsilon_{ij}^e$ 是弹性应变增量, $d\epsilon_{ij}^p$ 是塑性应变增量, 弹性应变增量和塑性应变增量是由有效应力的变化引起的, $d\epsilon_{ij}^t$ 是黏性应变增量, 由时间的变化引起。

弹性应变可恢复, 而且弹性应力应变关系不受时间、 K_0 各向异性的影响。弹性应变增量可用下式描述:

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{mm} \delta_{ij}, \quad (2)$$

式中, ν 是泊松比, E 是弹性模量, δ_{ij} 是 Kronecker 符号, σ_{ij} 是应力张量, $\sigma_{mm} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ 。

塑性应变和黏性应变不可恢复。塑性应变和黏性应变之和在本文称为黏塑性应变, 即黏塑性应变增量 $d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{ij}^p + d\epsilon_{ij}^t$ 。黏塑性应变增量的大小和方向需要通过屈服面方程和流动法则确定。

1.2 屈服面方程

如图 1 所示, 本文模型具有当前屈服面和参考屈服面两个屈服面。当前屈服面对应着超固结土的当前应力状态, 即超固结状态, 参考屈服面对应着土的正常固结状态。以一维压缩为例, 当前屈服面对应着超固结土当前实际的应力状态点, 参考屈服面对应着超固结土的前期固结压力点。当前屈服面与参考屈服面间的距离与土的超固结程度有关。超固结程度越大, 两者距离越大。当土为正常固结时, 当前屈服面和参考屈服面距离为零, 两者重合。

(1) 当前屈服面方程

当前屈服面采用倾斜的类椭圆表示, 如图 1 所示。

当前屈服面方程为

$$f = \ln \frac{p}{p_{or0}} + \ln \left(1 + \frac{\eta^{*2}}{M^{*2}} \right) + \frac{\bar{t}}{c_p} - \frac{1}{c_p} H = 0, \quad (3)$$

式中, p 是平均有效应力, p_{or0} 是当前屈服面与屈服面偏转轴 ω 线的交点 (图 1 中点 C) 所对应的平均有效应力的初始值。 $c_p = (\lambda - \kappa)/(1 + e_0)$, e_0 是初始孔隙比, λ 是 $e - \ln p$ 平面内土正常压缩线的斜率, κ 是 $e - \ln p$ 平面内土的弹性回弹线的斜率。下面分别详细介绍式 (3) 中的其它变量。

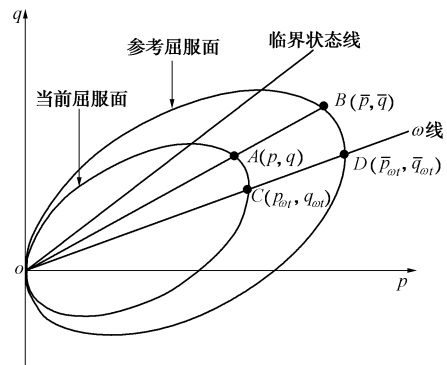


图 1 屈服面示意图

Fig. 1 Schematic plot of yield surfaces

a) 相对应力比 η^*

式 (3) 中 η^* 是 Sekiguchi 等^[1]提出的相对应力比:

$$\eta^* = \sqrt{\frac{3}{2} (\eta_{ij} - \eta_{\omega ij})(\eta_{ij} - \eta_{\omega ij})}, \quad (4)$$

式中, η_{ij} 是图 1 中点 A 的应力比张量, 可表示为

$$\eta_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - p\delta_{ij}}{p}. \quad (5)$$

式 (4) 中 $\eta_{\omega ij}$ 是屈服面偏转轴 ω 线所对应的应力比 η_{ω} 的张量形式, 也即图 1 中点 C 的应力比张量, 可表示为

$$\eta_{\omega ij} = \frac{\sigma_{\omega ij} - p_{\omega}\delta_{ij}}{p_{\omega}}, \quad (6)$$

式中, $\sigma_{\omega ij}$ 和 p_{ω} 分别是点 C 的应力张量和平均有效应力。本文为了简便, 没有采用屈服面的旋转硬化定律。因此, $\eta_{\omega ij}$ 在加载过程中是一常数。 η_{ω} 和 $\eta_{\omega ij}$ 取值的经验方法将在 3.1 节中详述。

b) 相对临界状态应力比 M^*

式 (3) 中 M^* 是相对临界状态应力比:

$$M^* = \sqrt{M^2 - \eta_{\omega}^2}, \quad (7)$$

式中, M 是三轴压缩时的临界状态应力比。目前多数研究者认为, 土的 K_0 各向异性不会改变土的临界状态应力比。因此, 等向固结土和 K_0 固结土的临界状态应力比是相同的。在 Sekiguchi 等^[1]模型的屈服面方程中没有使用 M^* , 而是直接使用 M 。这导致 Sekiguchi

等的模型所预测的三轴压缩最终应力比为 $\sqrt{M^2 + \eta^2}$, 超过 M 。因此, 本文在屈服方程中采用 M^* 来保证预测的三轴压缩最终应力比仍为 M 。

c) 统一硬化参数 H

式 (3) 中的 H 是统一硬化参数:

$$H = \int dH = \int \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^p, \quad (8)$$

式中, 黏塑性体积应变增量 $d\varepsilon_v^p$ 包括塑性部分 $d\varepsilon_v^p$ 和黏性部分 $d\varepsilon_v^t$ 。 η 是应力比, 即广义剪应力 q 与平均有效应力 p 之比, $\eta = q/p$ 。注意式 (8) 中是应力比 η 而非相对应力比 η^* 。 M_f 是潜在破坏应力比, 用以反映超固结土峰值应力比高于正常固结土峰值应力比的特性^[17]。

$$M_f = 3 - \left\langle 3 - \left(\frac{1}{R} - 1 \right) (M - M_h) - M \right\rangle, \quad (9)$$

式中, M_h 是超固结土强度包线 Hvorslev 线的斜率。 $\langle \rangle$ 是 MacCauley 括号, 满足以下特性: $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$ 。MacCauley 括号能够保证式 (9) 计算得到的 M_f 值不超过零拉力线的斜率 3。式 (9) 中 R 是超固结参数, 描述了土的超固结程度。 R 是当前应力与参考应力的比值:

$$R = \frac{p}{\bar{p}}. \quad (10)$$

当土为正常固结时, $R=1$ 。根据式 (9) 可知, 此时 $M_f = M$ 。当土为超固结时, $0 < R < 1$, 此时 $M < M_f < 3$ 。在土由正常固结变为超固结并且超固结度不断增加的过程中, R 从 1 逐渐减小, 此时 M_f 从 M 逐渐增大至 3。

d) 折算时间 \bar{t}

\bar{t} 是 Yao 等^[14]提出的折算时间:

$$\bar{t} = \frac{C_{ae}}{1 + e_0} \int \frac{M_f^4}{M^4} R^{(\lambda - \kappa)/C_{ae}} dt, \quad (11)$$

式中, dt 是时间增量, C_{ae} 是 $e - \ln t$ 坐标系内次固结曲线的斜率, 即次固结系数。

(2) 参考屈服面方程

参考屈服面和当前屈服面形状相似, 参考屈服面方程为

$$\bar{f} = \ln \frac{\bar{p}}{\bar{p}_{or0}} + \ln \left(1 + \frac{\bar{\eta}^{*2}}{M^{*2}} \right) - \frac{1}{c_p} \varepsilon_v^p = 0, \quad (12)$$

式中, \bar{p} 是参考应力点 B (见图 1) 的平均应力, \bar{p}_{or0} 是点 D 的平均应力的初始值。如图 1 所示, 参考应力点 B 和当前应力点 A 具有相同的相对应力比, 即 $\bar{\eta}^* = \eta^*$ 。虽然在参考屈服面方程中没有引入折算时间 \bar{t} , 但是参考屈服面仍然会随着时间的发展而硬化。因为, 参考屈服面方程中 $\varepsilon_v^p = \varepsilon_v^p + \varepsilon_v^t$ 。

将式 (12) 代入式 (10), 可得超固结参数 R 具体的表达式:

$$R = \frac{p}{\bar{p}} = \frac{p}{\bar{p}_{or0}} \left(1 + \frac{\eta^{*2}}{M^{*2}} \right) \exp \left(-\frac{\varepsilon_v^p}{c_p} \right). \quad (13)$$

1.3 流动法则

在不考虑时间的修正剑桥模型和 UH 模型中, 塑性应变增量的方向被假定为与应力方向共轴。例如, 塑性剪应变增量 $d\varepsilon_d^p$ 与广义剪应力 q 共轴, 塑性体积应变增量 $d\varepsilon_v^p$ 与 p 共轴。在本文模型中, 仍采用类似的假定, 认为黏塑性应变增量均与应力共轴, 并且满足以下流动法则:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (14)$$

式中, Λ 是黏塑性标量因子, 用来反映黏塑性应变增量的大小。 g 是黏塑性势函数, 其法线方向即为黏塑性应变增量的方向。黏塑性势面也是倾斜的类椭圆, 因此黏塑性势函数的表达式如下:

$$g = \ln p + \ln \left(1 + \frac{\eta^{*2}}{M^{*2}} \right) + C = 0, \quad (15)$$

式中, C 为积分常数。

2 模型三维化

2.1 广义非线性强度准则

不同材料的破坏特征不同, 在 π 平面上的破坏曲线的形状不同。为了能够统一描述不同材料的破坏曲线, Yao 等^[18]基于广义 Mises 准则和 SMP 准则, 提出了广义非线性强度准则。广义非线性强度准则在 π 平面上的破坏曲线公式为

$$\alpha \sqrt{I_1^2 - 3I_2} + \frac{2(1 - \alpha)I_1}{3\sqrt{(I_1I_2 - I_3)/(I_1I_2 - 9I_3)} - 1} = \frac{MI_1}{3}, \quad (16)$$

式中, I_1 , I_2 和 I_3 分别是第一、第二、第三应力不变量。 α 是材料参数, 描述了 π 平面上破坏曲线的形状, 反映了不同材料的中主应力效应。如图 2 所示, 当 $\alpha=0$ 时, π 平面上的破坏曲线符合 SMP 准则, 当 $\alpha=1$ 时, 破坏曲线符合广义 Mises 准则。当 $0 < \alpha < 1$ 时, 破坏曲线介于广义 Mises 准则和 SMP 准则的破坏线之间。

2.2 变换应力的三维化方法

当式 (16) 中的 $\alpha \neq 1$ 时, 广义非线性强度准则在 π 平面上的破坏线是非圆的, 它无法直接与式 (3) 所示的屈服方程结合。姚仰平等^[19-20]提出了基于广义非线性强度准则的变换应力的三维化方法。如图 3 所示, 引入一个变换应力 $\bar{\sigma}_i$, 与主应力 σ_i 共轴。在变换应力空间 $\bar{\sigma}_i$ 内, 广义非线性强度准则的强度包线被转

化为一个圆。该圆的半径为 r_0 , r_0 是真实应力空间 σ_i 内的广义非线性强度准则破坏线在三轴压缩时的半径。变换后的广义非线性强度准则可以和屈服方程在变换应力空间 $\tilde{\sigma}_i$ 内直接结合。

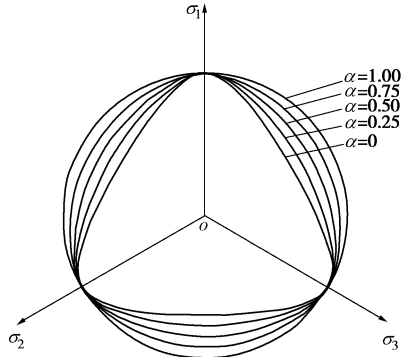


图2 广义非线性强度准则破坏线示意图

Fig. 2 Schematic plot of envelope of generalized nonlinear strength criterion

变换应力空间 $\tilde{\sigma}_i$ 内破坏点 A (见图3) 的状态量与真实应力空间 σ_i 内破坏点 B 的状态量具有以下关系:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p} &= p, \\ \tilde{q} &= q_c, \\ \tilde{\theta} &= \theta, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中, \tilde{p} , \tilde{q} 和 $\tilde{\theta}$ 分别是点 A 的剪应力、平均应力和罗德角。 p , θ 是点 B 的平均应力和罗德角, q_c 是点 B 的应力不变量的函数, 表达式为

$$q_c = \alpha \sqrt{I_1^2 - 3I_2} + \frac{2(1-\alpha)I_1}{3\sqrt{(I_1I_2 - I_3)/(I_1I_2 - 9I_3)} - 1} \quad (18)$$

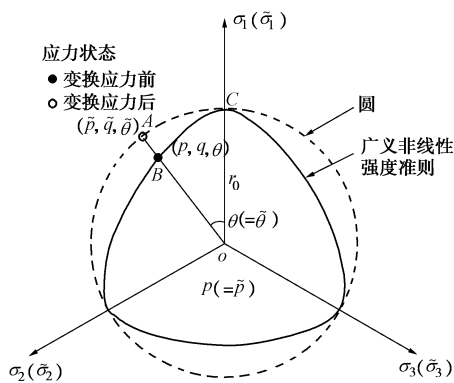


图3 变换应力的三维化方法示意图

Fig. 3 Schematic plot of transformed stress method

从式(17)可知,相较于点 B , 点 A 的 \tilde{p} 和 $\tilde{\theta}$ 没有改变, 只是 \tilde{q} 变了。因此, 变换应力只是改变了强度包线的半径。根据式(17)可进一步得到变换应力张量 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 和真实应力张量 σ_{ij} 之间的关系:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = p\delta_{ij} + \frac{q_c}{q}(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}) \quad (19)$$

将式(3)~(15)中的所有原始应力量均用变换应力量代替, 得到三维应力空间的屈服方程和流动法则, 如下所示:

当前屈服面方程

$$\tilde{f} = \ln \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_{or0}} + \ln \left(1 + \frac{\tilde{\eta}^{*2}}{M^{*2}} \right) + \frac{\tilde{t}}{c_p} - \frac{1}{c_p} \tilde{H} = 0 \quad (20)$$

参考屈服面方程

$$\tilde{f} = \ln \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_{or0}} + \ln \left(1 + \frac{\tilde{\eta}^{*2}}{M^{*2}} \right) - \frac{1}{c_p} \varepsilon_v^p = 0 \quad (21)$$

流动法则

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^p &= \tilde{A} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}, \\ \tilde{g} &= \ln \tilde{p} + \ln \left(1 + \frac{\tilde{\eta}^{*2}}{M^{*2}} \right) + C = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式(20)~(22)中变量上方的“ \sim ”表明该变量为变换应力空间的变量。

王乃东等^[20]、Yao等^[21]指出, 与采用函数 $g(\theta)$ 对 K_0 各向异性模型进行三维化相比, 采用变换应力的三维化方法对 K_0 各向异性模型进行三维化, 能够克服采用函数 $g(\theta)$ 所引起的屈服面内凹和不连续的问题。

2.3 三维弹黏塑性应力应变关系

微分式(20), 可得一致性条件:

$$d\tilde{f} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} d\tilde{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}} d\tilde{t} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{H}} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varepsilon_v^p} d\varepsilon_v^p = 0 \quad (23)$$

将式(22)代入式(23)中, 解得黏塑性标量因子 \tilde{A} :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A} &= \tilde{A}^p + \tilde{A}^t = \frac{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}}{X} + \frac{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}} d\tilde{t}}{X}, \\ X &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} D_{ijkl}^e \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{\sigma}_{kl}} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{H}} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{\sigma}_{mm}}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中, D_{ijkl}^e 表示弹性刚度矩阵。黏塑性标量因子 \tilde{A} 由两项组成, 其中第一项 \tilde{A}^p 与 UH 模型中的塑性标量因子相同, 而第二项 \tilde{A}^t 则体现了时间对变形的贡献。

式(24)中各偏导数公式如下:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} = \frac{1}{3\tilde{p}} \delta_{$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{q_c}{q} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{3}{2q^2} s_{ij} s_{kl} \right) + \frac{s_{kl}}{q} \frac{\partial q_c}{\partial I_m} \frac{\partial I_m}{\partial \sigma_{ij}} \quad (27)$$

根据胡克定律, 应力增量与弹性应变增量满足以下关系:

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^e = D_{ijkl}^e (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p - d\varepsilon_{kl}^t) \quad (28)$$

式(28)中塑性应变增量 $d\varepsilon_{kl}^p = \tilde{\lambda}^p \partial \tilde{g} / \partial \tilde{\sigma}_{ij}$, 黏性应变增量 $d\varepsilon_{kl}^t = \tilde{\lambda}^t \partial \tilde{g} / \partial \tilde{\sigma}_{ij}$ 。整理式(28)可得

$$d\sigma_{ij} + D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^t = D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl} - D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^p \quad (29)$$

式(29)只有 $D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^t$ 和时间有关。如果令 $d\sigma_{ij}^t = D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^t$ 。那么, 式(29)可写为

$$d\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}^t = D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl} - D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^p = D_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl} \quad (30)$$

式中, D_{ijkl}^{ep} 表示弹塑性刚度矩阵, 该刚度矩阵与不考虑时间的 UH 模型的刚度矩阵相同,

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^e - D_{ijmn}^e \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{\sigma}_{mn}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\sigma}_{st}} D_{stkl}^e / X \quad (31)$$

通过式(30)可以看出, 时间效应对土应力应变关系的影响相当于对土施加了一个等效荷载 $d\sigma_{ij}^t$ 。令式

(30)中各项同除以时间增量, 可得速率表示的应力应变关系:

$$\dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}^t = D_{ijkl}^{ep} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (32)$$

3 不排水抗剪强度

3.1 初始应力状态

土在一维状态下的正常压缩过程是一个等应力比加载过程, 它的应力路径在 $p-q$ 平面上是个倾斜直线, 如图4中 OB 所示, 称为 K_{0nc} 线。过屈服面最右端点的屈服面偏转轴 ω 线一般与 K_{0nc} 线不重合。有时为了简便, 假设 ω 线与 K_{0nc} 线重合, 但这样的处理会导致模型无法预测一维正常压缩过程中产生的剪应变。在本文模型中, ω 线与 K_{0nc} 线不重合。

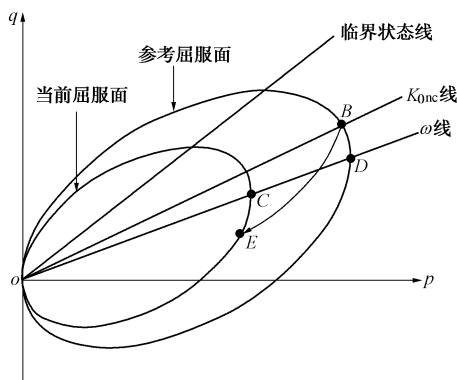


图4 初始应力状态示意图

Fig. 4 Schematic plot of initial stress state

正常 K_0 固结土的 K_0 系数称为 K_{0nc} , 可根据经验

公式 $K_{0nc} = 1 - \sin \varphi'$ 取值, 其中 φ' 是有效内摩擦角。

由 K_{0nc} 可计算 K_{0nc} 线所对应的应力比 η_{0nc} :

$$\eta_{0nc} = \frac{3(1 - K_{0nc})}{1 + 2K_{0nc}} \quad (33)$$

Wheeler 等^[2]给出了 ω 线所对应的应力比 η_ω 与 K_{0nc} 线所对应的应力比 η_{0nc} 之间的关系:

$$\eta_\omega = \frac{\eta_{0nc}^2 + 3\eta_{0nc} - M^2}{3} \quad (34)$$

如图4所示, 土初始位于一维正常压缩点 B , 然后在一维侧限条件下减小竖向应力, 卸载路径为 BE 。在卸载过程中, 土的超固结度增大, K_0 系数也随之增大。研究发现, 超固结状态点 E 的 K_0 系数和超固结比 OCR 具有一定的经验关系。针对不同种类的土, 人们提出了不同的经验公式, 比如下式就是较为常用的经验公式^[22]:

$$K_0 = K_{0nc} \text{OCR}^a \quad (35)$$

式中, a 是材料参数。

通过现场和室内试验测得点 E 的竖向压力 σ_{110} 以及 OCR 的大小, 根据经验式(35)计算点 E 的 K_0 值, 则点 E 的应力状态可以完全确定。点 C 和 E 处于同一个屈服面上, 根据屈服面方程可得点 C 的应力与点 E 应力间的关系:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\omega 110} &= \frac{1 + 2K_0}{1 + 2K_\omega} \left(1 + \frac{\eta_0^{*2}}{M^{*2}} \right) \sigma_{110} \\ \sigma_{\omega 220} &= \sigma_{\omega 330} = K_\omega \sigma_{\omega 110} \\ p_{\omega 0} &= p_0 \left(1 + \frac{\eta_0^{*2}}{M^{*2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

式中, $\sigma_{\omega 110}$ 为点 C 的竖向应力, σ_{110} 为点 E 的竖向应力。 $p_{\omega 0}$ 是点 C 的平均应力, p_0 是点 E 的平均应力。 K_ω 是点 C 对应的 K_0 系数, $K_\omega = (3 - \eta_\omega) / (3 + 2\eta_\omega)$ 。 η_0^* 是点 E 的初始相对应力比, 其公式可根据式(4)推导得到:

$$\eta_0^* = \frac{9|K_0 - K_\omega|}{(1 + 2K_\omega)(1 + 2K_0)} \quad (37)$$

将式(36)所示的点 C 的应力代入式(6)可得 $\eta_{\omega ij}$ 。

3.2 三轴压缩不排水抗剪强度公式

在三轴压缩这一特殊条件下, 变换应力等于真实应力。所以在不排水抗剪强度公式的推导过程中, 均直接采用真实应力表示。

如式(3)所示, 当前屈服面方程中的统一硬化参数 H 是积分形式, 因此, 通过当前屈服面方程无法直接得到当前应力点 (比如图1中点 A) 的黏塑性体积应变全量 ε_v^p 的大小。然而, 土的当前应力点和其所对应的参考应力点 (如图1中点 B) 具有相同的 ε_v^p 。所以, 可以根据参考屈服面方程 (式(12)) 求解 ε_v^p ,

得到

$$\varepsilon_v^{\text{tp}} = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \left[\ln \frac{\bar{p}}{\bar{p}_{\text{or}0}} + \ln \left(1 + \frac{\eta^{*2}}{M^{*2}} \right) \right]. \quad (38)$$

假设土在加载初始时的超固结参数为 R_0 , 在破坏时的超固结参数为 R , 则 $R_0 = p_{\text{or}0} / \bar{p}_{\text{or}0}$, $R = p / \bar{p}$ 。将这两个关系代入式 (38), 可得

$$\varepsilon_v^{\text{tp}} = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \left[\ln \frac{p}{p_{\text{or}0}} \frac{R_0}{R} + \ln \left(1 + \frac{\eta^{*2}}{M^{*2}} \right) \right]. \quad (39)$$

图 1 中点 A 的弹性体积应变可根据平均应力直接求得

$$\varepsilon_v^e = \frac{\kappa}{1 + e_0} \ln \frac{p}{p_0}. \quad (40)$$

在不排水路径中, 总体积不变, 所以 $\varepsilon_v^{\text{tp}} = -\varepsilon_v^e$, 也即

$$\frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \left[\ln \frac{p}{p_{\text{or}0}} \frac{R_0}{R} + \ln \left(1 + \frac{\eta^{*2}}{M^{*2}} \right) \right] = -\frac{\kappa}{1 + e_0} \ln \frac{p}{p_0}. \quad (41)$$

将式 (36) 中 $p_{\text{or}0}$ 表达式代入式 (41) 并整理, 可得

$$p = p_0 \left(\frac{R}{R_0} \frac{M^{*2} + \eta_0^{*2}}{M^{*2} + \eta^{*2}} \right)^{\frac{\lambda - \kappa}{\lambda}}, \quad (42)$$

式中, $p_0 = (1 + 2K_0)\sigma_{110}/3$ 。在三轴压缩条件下, 可根据式 (4) 推导出相对应力比 η^* 的特殊表达式: $\eta^* = \eta - \eta_\omega$ 。在破坏时, 又有 $\eta^* = M - \eta_\omega$ 。根据以上条件, 式 (42) 可进一步写为

$$p = \frac{(1 + 2K_0)\sigma_{110}}{3} \left[\frac{1}{R_0} \frac{M^2 - \eta_\omega^2 + \eta_0^{*2}}{2M(M - \eta_\omega)} \right]^{\frac{\lambda - \kappa}{\lambda}} R^{\frac{\lambda - \kappa}{\lambda}}. \quad (43)$$

则三轴压缩条件下的不排水抗剪强度:

$$S_u = \frac{q}{2} = \frac{Mp}{2} = \frac{(1 + 2K_0)\sigma_{110}M}{6} \left[\frac{1}{R_0} \frac{M^2 - \eta_\omega^2 + \eta_0^{*2}}{2M(M - \eta_\omega)} \right]^{\frac{\lambda - \kappa}{\lambda}} R^{\frac{\lambda - \kappa}{\lambda}}, \quad (44)$$

式 (44) 又可写为

$$\frac{S_u}{\sigma_{110}} = \frac{(1 + 2K_0)M}{6} \left[\frac{1}{R_0} \frac{M^2 - \eta_\omega^2 + \eta_0^{*2}}{2M(M - \eta_\omega)} \right]^{\frac{\lambda - \kappa}{\lambda}} R^{\frac{\lambda - \kappa}{\lambda}}. \quad (45)$$

对于某一种土, 土性参数是确定的, M , η_ω , λ , κ , K_{onc} 是常数, 则式 (45) 中的变量只有 K_0 , R_0 , η_0^* 和 R 。由式 (37) 可知, η_0^* 是 K_0 的函数。所以变量仅有 K_0 , R_0 和 R 。其中 K_0 和 R_0 分别反映了 K_0 各向异性 and 初始超固结度对不排水抗剪强度的影响。 R 表示土在破坏时的超固结度。在不考虑时间的 UH 模型中, 无论土的初始超固结度是多少, 土在破坏时始终有 $R=1$ 。因此, 在不考虑时间的 K_0 各向异性 UH 模型^[23]中, 不排水强度就只和土的 K_0 各向异性程度

和初始超固结度有关。但在时间 UH 模型中, 应变率会影响 R 的大小。因此, 不排水抗剪强度还受土的应变率 (即流变性) 的影响。另外, 对于某一种土, K_0 系数和土的初始超固结度具有一定的经验关系, 如式 (35) 所示。因此, 不排水抗剪强度的影响因素可以简化为初始超固结度和应变率两个。

3.3 应变率与破坏时超固结参数 R 的关系

根据式 (23) 所示的一致性条件, 可得三轴压缩条件下黏塑性体积应变增量为

$$d\varepsilon_v^{\text{tp}} = - \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) / \left(\frac{\partial f}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_v^{\text{tp}}} \right). \quad (46)$$

在临界状态时, 应力不再变化, $d\sigma_{ij} = 0$, 所以结合式 (46) 和式 (3)、(8)、(11) 可得

$$d\varepsilon_v^{\text{tp}} = - \frac{\partial f}{\partial t} dt / \left(\frac{\partial f}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_v^{\text{tp}}} \right) = \frac{M^4 - \eta^4}{M_f^4 - \eta^4} \frac{C_{ae}}{1 + e_0} \frac{M_f^4}{M^4} R^{(\lambda - \kappa)/C_{ae}} dt. \quad (47)$$

根据当前屈服面方程 (式 (3)) 可推导得三轴压缩条件下的剪胀方程为

$$\frac{d\varepsilon_d^{\text{tp}}}{d\varepsilon_v^{\text{tp}}} = \frac{2(\eta - \eta_\omega)}{M^2 - \eta^2}. \quad (48)$$

将式 (47) 代入式 (48), 可得三轴压缩条件下轴向应变率与破坏时 R 的关系如下:

$$\dot{\varepsilon}_a = \dot{\varepsilon}_d \approx \dot{\varepsilon}_d^{\text{tp}} = \frac{4M_f^4(M - \eta_\omega)}{M^2(M_f^4 - M^4)} \frac{C_{ae}}{1 + e_0} R^{(\lambda - \kappa)/C_{ae}}, \quad (49)$$

式中, $\dot{\varepsilon}_a$ 是轴向应变率, 在不排水条件下, $\dot{\varepsilon}_a = \dot{\varepsilon}_d$ 。由于在临界状态时, 弹性剪应变率比黏塑性剪应变率小很多, 所以近似有 $\dot{\varepsilon}_d \approx \dot{\varepsilon}_d^{\text{tp}}$ 。

根据式 (9) 可知, 式 (49) 中的 M_f 是 R 的函数, 因此式 (49) 给出了轴向应变率 $\dot{\varepsilon}_a$ 和破坏时的超固结参数 R 之间的一一对应的关系。当轴向应变率已知时, 可以根据式 (49) 得到该速率对应的 R , 然后将 R 的值代入式 (45) 即可得该速率对应的不排水强度。

4 对室内试验的预测模拟

4.1 模型参数取值

本文模型所用到的土性参数有 λ , κ , ν , M , M_h , η_ω , C_{ae} 。其中 λ , κ , ν , M 四个参数和修正剑桥模型相同。 η_ω 的经验公式已在式 (34) 给出。 M_h 是 Hvorslev 线的斜率。受时间影响较为显著的土一般都是塑性指数较高的软黏土。该类土的 M_h 的取值范围一般为 0.1~0.5。 C_{ae} 是 $e - \ln t$ 坐标系内次固结曲线的斜率。当没有次固结曲线的试验数据时, C_{ae} 可按照 Mesri 等^[24]的建议, 取 $C_{ae} \approx 0.05\lambda$ 。

4.2 一维等应变率压缩试验

但汉波^[25]针对温州黏土进行了一维单级和多级加载的等应变率（CRS）压缩试验。试验中加载由应变控制，分单级加载和多级加载两种。单级加载中竖向应变率始终为一常数。多级加载中，每级加载中竖向应变率恒定，但不同级之间的应变率大小不同。使用本文模型对一维单级和多级加载 CRS 压缩试验进行模拟，计算所用土性参数如表 1 中系列 I 所示。其中 λ 和 κ 由图 5 的试验曲线确定， C_{ae} 取 0.05λ 。 M 和 η_{ω} 采用但汉波^[25]给的试验值。土在一维压缩前，处于超固结状态，初始 OCR = 11。土的初始 K_0 系数被假设为 0.7。预测结果和试验数据的对比见图 5，6。

图 5 是单级加载试验的预测和试验结果。图中有 3 条压缩曲线，它们对应的竖向应变率分别是 20 %/h，2 %/h 和 0.2 %/h。从预测和试验结果可以看出，应变率越大，压缩曲线位置越高，土所表现出的前期固结压力越大。图 6 是多级加载试验的预测和试验结果。加载分五级进行，各级加载的竖向应变率如图 6 中所示。为了方便对比，将图 5 中单级加载的计算结果也放入了图 6。由图 6 可知，压缩曲线仍然满足速率越大位置越高的规律。而且，多级加载预测曲线与相应速率下的单级加载预测曲线吻合。

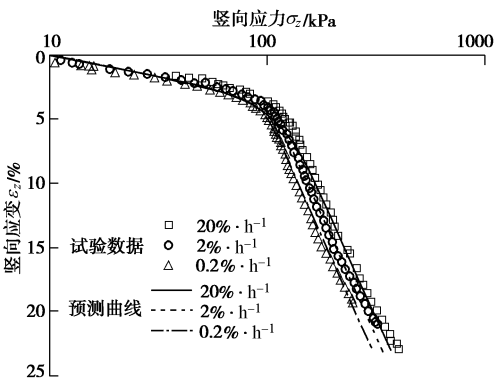


图 5 一维单级加载 CRS 试验压缩曲线
Fig. 5 Compression curves of one-dimensional one-staged CRS tests

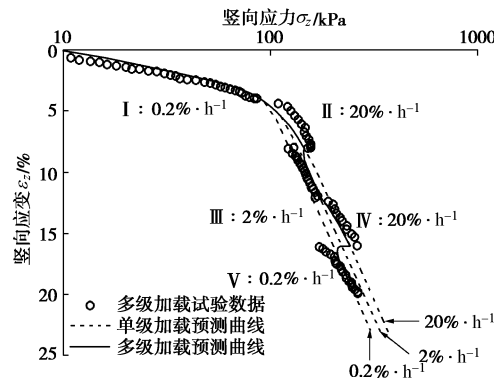


图 6 一维多级加载 CRS 试验压缩曲线
Fig. 6 Compression curves of one-dimensional multi-staged CRS tests

4.3 三轴不排水单级加载 CRS 压缩试验

Hinchberger 等^[26]提供了 K_0 正常固结土在不排水条件下三轴等轴向应变率（CRS）压缩试验的数据，如图 7，8 所示。图中 σ_a 是轴向应力， σ_r 是径向应力。土的初始 K_0 系数为 0.8，初始径向压力为 56 kPa。三轴压缩分别在 0.54%/h，6%/h 和 68.4%/h 三种轴向应变率下进行。使用本文模型对试验进行模拟，模拟所用参数如表 1 中系列 II 所示，从图 7，8 中的预测和试验结果可知，轴应变率越大，土最终破坏时的应力差（ $\sigma_a - \sigma_r$ ）越大。

表 1 土性参数

Table 1 Material constants of soils								
系列	λ	κ	C_{ae}	M	M_h	ν	η_{ω}	α
I	0.464	0.035	0.023	1.23	0.2	0.3	0.40	0.7
II	0.280	0.060	0.010	1.72	0.2	0.3	0.70	0.7
III	0.200	0.045	0.006	1.24	0.2	0.3	0.47	0.7

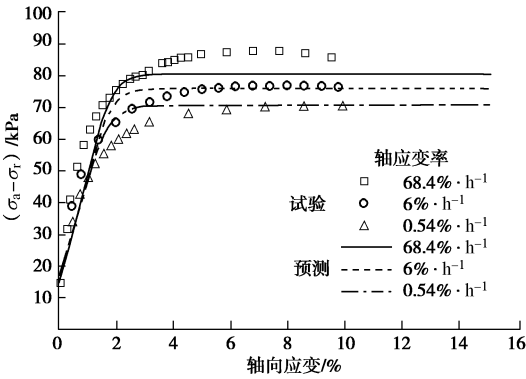


图 7 三轴不排水单级加载 CRS 压缩试验应力应变曲线
Fig. 7 Stress-strain curves of triaxial undrained one-staged CRS compression tests

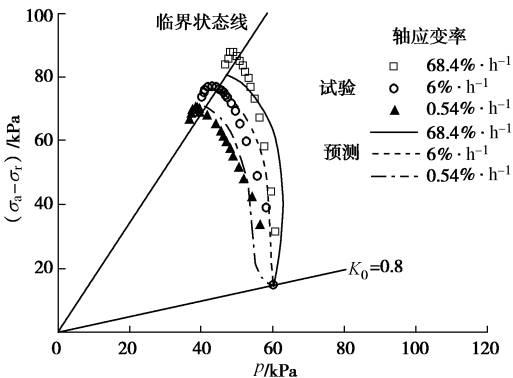


图 8 三轴不排水单级加载 CRS 压缩试验应力路径
Fig. 8 Stress paths of triaxial undrained one-staged CRS compression tests

4.4 三轴不排水多级加载 CRS 压缩和拉伸试验

Zhou 等^[6]提供了香港海滩沉积土的三轴不排水多级加载 CRS 压缩和拉伸试验的数据，如图 9 所示。土初始处于 K_0 正常固结状态，径向压力为 150 kPa。

试验中有五级加载, 在每级加载过程中, 轴向应变率是恒定的, 分别为 $2\%/h$, $0.2\%/h$, $20\%/h$, $-2\%/h$ (卸载) 和 $2\%/h$ 。使用本文模型对三轴压缩和拉伸试验进行预测, 预测结果见图 9。预测所用参数如表 1 中系列 III 所示。土样的初始 K_0 系数 ($K_0 = K_{0nc}$) 根据试验数据确定, 三轴压缩试样的 K_0 系数为 0.485, 三轴拉伸试样的 K_0 系数为 0.6。

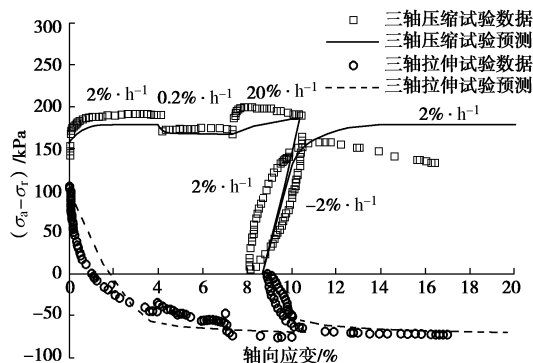


图 9 三轴不排水多级加载 CRS 压缩和拉伸试验应力应变曲线
Fig. 9 Stress-strain curves of triaxial undrained multi-staged CRS compression and extension tests

4.5 不排水抗剪强度公式的验证

使用不排水抗剪强度公式 (45) 预测不同初始 OCR 的 K_0 超固结土的三轴不排水剪切强度与轴应变率的关系, 并与 Zhu^[27] 提供的香港海滩土的试验数据进行了对比, 如图 10 所示。预测所用参数表 1 中系列 III 所示。正常固结土 (OCR=1) 的 K_{0nc} 系数为 0.485, 与图 9 中三轴压缩预测所用的值相同。对于超固结土 (OCR=2, 4, 8), K_0 系数根据式 (35) 计算, 其中土性参数 $a=0.25$ 。计算所得的 OCR 为 2, 4, 8 的土所对应的初始 K_0 系数分别为 0.577, 0.686 和 0.816。从图 10 中可以看出, 土的不排水抗剪强度随着超固结度的增大而增大。在同一超固结度下, 随着应变率的增大, 不排水抗剪强度有一定程度的升高。而且超固结度越大, 应变率对不排水强度的影响越明显。

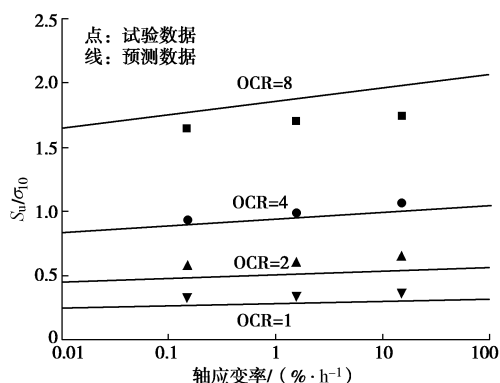


图 10 三轴压缩不排水抗剪强度与 OCR 和应变率的关系
Fig. 10 Relationship among triaxial undrained shear strength, OCR and strain rate

5 结 语

本文通过旋转时间 UH 模型的屈服面, 建立了一个能够同时考虑超固结性、 K_0 各向异性和流变性影响的本构模型。然后使用基于广义非线性强度准则的变换应力的三维化方法, 将该模型扩展到三维应力空间。随后, 根据模型的基本方程, 推导了三轴压缩不排水抗剪强度的理论公式。该公式表明, 对于某特定种类的土, 土的不排水抗剪强度分别随着超固结度和应变率的增大而增大。最后, 使用模型对室内一维单级和多级加载 CRS 试验、三轴不排水单级和多级加载 CRS 压缩和拉伸试验进行了预测模拟, 并将预测结果与试验数据进行了比较。结果表明模型可以用于室内三轴试验的定量预测。

参考文献:

- [1] SECHIGUCHI H, OHTA H. Induced anisotropy and time dependency in clays[C]//Proceeding of the 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Tokyo, 1977.
- [2] WHEELER S J, NAATANEN A, KARSTUNEN M, et al. An anisotropic elastoplastic model for soft clays[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, 40: 403 - 418.
- [3] ADACHI T, OKA F. Constitutive equations for normally consolidated clay based on elasto-viscoplasticity[J]. Soils and Foundations, 1982, 22(4): 57 - 70.
- [4] KUTTER B L, SATHIALINGAM N. Elastic viscoplastic modeling of the rate-dependent behavior of clays[J]. Géotechnique, 1992, 42(3): 427 - 441.
- [5] YIN J H, ZHU J G, GRAHAM J. A new elastic viscoplastic model for time-dependent behaviour of normally consolidated and overconsolidated clays[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2002, 39(1): 157 - 173.
- [6] ZHOU C, YIN J H, ZHU J G, et al. Elastic anisotropic viscoplastic modeling of the strain-rate-dependent stress-strain behavior of K_0 -consolidated natural marine clays in triaxial shear tests[J]. International Journal of Geomechanics, 2005, 5(3): 218 - 232.
- [7] 王立忠, 但汉波. K_0 软黏土的弹黏塑性本构模型[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(9): 1344 - 1354. (WANG Li-zhong, DAN Han-bo. Elastic viscoplastic constitutive model for K_0 -consolidated soft clays[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(9): 1344 - 1354. (in Chinese))
- [8] 姚仰平, 侯伟. K_0 超固结土的统一硬化模型[J]. 岩土工

- 程学报, 2008, **30**(3): 316 - 322. (YAO Yang-ping, HOU Wei. A unified hardening model for K_0 overconsolidated clays [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(3): 316 - 322. (in Chinese))
- [9] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. UH model: three-dimensional unified hardening model for overconsolidated clays[J]. Géotechnique, 2009, **59**(5): 451 - 469.
- [10] LUO T, YAO Y P, CHU J. Asymptotic state behaviour and its modeling for saturated sand[J]. Science China-Technological Sciences, 2009, **52**(8): 2350 - 2358.
- [11] 姚仰平, 余亚妮. 基于统一硬化参数的砂土临界状态本构模型[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(12): 1827 - 1832. (YAO Yang-ping, YU Ya-ni. Extended critical state constitutive model for sand based on unified hardening parameter[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(12): 1827 - 1832. (in Chinese))
- [12] YAO Y P, GAO Z W, ZHAO J D, et al. Modified UH model: constitutive modeling of overconsolidated clays based on a parabolic Hvorslev envelope[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2012, **138**(7): 860 - 868.
- [13] YAO Y P, KONG Y X. Extended UH Model: three-dimensional unified hardening model for anisotropic clays[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2012, **138**(7): 853 - 866.
- [14] YAO Y P, KONG L M, HU J. An elastic-viscous-plastic model for overconsolidated clays[J]. Science China-Technological Sciences, 2013, **56**(2): 441 - 457.
- [15] BORJA R I, KAVAZANJIAN E. A constitutive model for the stress-strain-time behavior of 'wet clays'[J]. Géotechnique, 1985, **35**(3): 283 - 298.
- [16] KALIAKIN V N, DAFALIAS Y F. Theoretical aspects of elastoplastic-viscoplastic bounding surface model for cohesive soils[J]. Soils and Foundations, 1990, **30**(3): 11 - 24.
- [17] YAO Y P, ZHOU A N. Non-isothermal unified hardening model: a thermo-elasto-plastic model for clays[J]. Géotechnique, 2013, **63**(15): 1328 - 1345.
- [18] YAO Y P, LU D C, ZHOU A N, et al. Generalized non-linear strength theory and transformed stress space[J]. Science China-Technological Sciences, 2004, **47**(6): 691 - 709.
- [19] 姚仰平, 路德春, 周安楠. 岩土类材料的变换应力空间及其应用[J]. 岩土工程学报, 2005, **27**(1): 24 - 29. (YAO Yang-ping, LU De-chun, ZHOU An-nan. Transformed stress space for geomaterials and its application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, **27**(1): 24 - 29. (in Chinese))
- [20] 王乃东, 姚仰平. 基于变换应力方法的各向异性模型三维化[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(1): 50 - 56. (WANG Nai-dong, YAO Yang-ping. Generalization of anisotropic constitutive models using transformed stress method [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(1): 50 - 56. (in Chinese))
- [21] YAO Y P, WANG N D. Transformed stress method for generalizing soil constitutive models[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2014, **140**(3): 614 - 629.
- [22] 李作勤. 影响黏土静止土压力的一些问题[J]. 岩土力学, 1995, **16**(1): 9 - 16. (LI Zuo-qin. Some problems affecting lateral earth pressure at rest in clays[J]. Rock and Soil Mechanics, 1995, **16**(1): 9 - 16. (in Chinese))
- [23] 侯伟, 姚仰平, 崔文杰. K_0 超固结土的不排水抗剪强度[J]. 力学学报, 2008, **40**(6): 795 - 803. (HOU Wei, YAO Yang-ping, CUI Wen-jie. Undrained shear strength for K_0 overconsolidated clays[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2008, **40**(6): 795 - 803. (in Chinese))
- [24] MESRI G, CHOI Y K. Settlement analysis of embankments on soft clays[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, **111**(4): 441 - 464.
- [25] 但汉波. 天然软黏土的流变特性[D]. 杭州: 浙江大学, 2009. (DAN Han-bo. Time-dependent behavior of natural soft clays[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2009. (in Chinese))
- [26] HINCHBERGER S D, ROWE R K. Evaluation of the predictive ability of two elastic-viscoplastic constitutive models[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2005, **42**: 1675 - 1694.
- [27] ZHU J G. Experimental study and elastic visco-plastic modeling of the time-dependent stress-strain behaviour of Hong Kong marine deposits[D]. Hong Kong: The Hong Kong Polytechnic University, 2000.