

DOI: 10.11779/CJGE201505004

基于 Hansbo 渗流的理想砂井地基固结分析

刘忠玉¹, 焦 阳^{1, 2}

(1. 郑州大学土木工程学院, 河南 郑州 450001; 2. 郑州大学综合设计研究院有限公司, 河南 郑州 450002)

摘要: 室内试验和现场观测表明, 许多饱和黏性土中的渗流在小水力梯度时不能用 Darcy 定律描述, 这应该是导致基于 Darcy 渗流的传统砂井固结理论有时不能很好地解释某些砂井地基固结特性的原因。引入同时考虑低速渗流幂函数曲线段和较高速渗流直线段的 Hansbo 渗流方程描述非 Darcy 渗流, 在自由竖向应变假定下修正了 Barron 的理想砂井地基固结方程, 并给出了有限差分法数值求解格式。据此探讨了 Hansbo 渗流参数、地基厚度等对砂井地基固结进程的影响。计算结果表明: 和 Darcy 渗流相比, Hansbo 渗流延缓了砂井地基内的孔压消散速度, 导致固结速度变慢, 并且径向排水对孔压消散的作用会更显著。如将 Hansbo 渗流方程简化为幂函数形式, 则往往会产生高估砂井地基的固结程度, 特别是在固结的初期。最后对比了自由竖向应变假定和等竖向应变假定对计算结果的影响。

关键词: 理想砂井; 固结; Hansbo 渗流; 有限差分; 固结度

中图分类号: TU431 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2015)05-0792-10

作者简介: 刘忠玉(1968-), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为软土固结理论与数值计算。E-mail: zhyliu@zzu.edu.cn。

Consolidation of ground with ideal sand drains based on Hansbo's flow

LIU Zhong-yu¹, JIAO Yang^{1, 2}

(1. School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China; 2. Zhengzhou University Multi-functional Design and Research Academy Limited Company, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: A deviation of the pore water flow from the Darcian law is observed at small hydraulic gradients according to laboratory and field investigations on some saturated cohesive soils, which can account for that there are aspects of consolidation behaviour of ground with vertical drain system that cannot sometimes be explained on the basis of these conventional consolidation theories using the Darcian flow. In order to improve the computational accuracy of consolidation of vertical drains, the Hansbo's equation, described by the power function for lower seepage velocity and the linear function for higher seepage velocity, is introduced to describe the non-Darcian flow. Accordingly, the Barron's consolidation theory for clayey ground with vertical ideal sand drains is modified under the assumption that the vertical strains develop freely, and the numerical analysis is performed using the finite difference method. Then the effects of the parameters of Hansbo's flow and the ground thickness on the consolidation process of ground with vertical drains are investigated. The numerical results indicate that, compared with that of the Darcian flow, the behaviour of Hansbo's flow controls the dissipation of pore water pressure in clay ground, and thereby reduces the settlement rate of ground. In addition, the influence of radial drainage considering the Hansbo's flow has more influence on the dissipation of pore water pressure than that considering the Darcian flow. If the Hansbo's equation is simplified as the power function to describe the flow, the degree of consolidation of ground will be overestimated, especially in the preliminary stage of consolidation. Finally, the difference as regards the degree of consolidation obtained by assuming the equal strain theory or by assuming the free strain theory is investigated.

Key words: ideal sand drain; consolidation; Hansbo's flow; finite difference; degree of consolidation

0 引言

在软土地基的加固处理时, 砂井固结法被证实是一种行之有效的方法。Barron^[1]于1948年基于 Terzaghi 固结理论, 分别在等应变和自由应变假定下对理想砂井地基的固结度给出了解析解, 并得出两种假定下固结度相差不大的结论, 因此后人多基于等应变假定对

该理论进行修正。1958年, Hart 等^[2]给出了未打穿砂井地基平均固结度的近似计算式。1974年, Yoshikuni 等^[3]引入竖井流量连续性方程, 给出了等应变条件下

基金项目: 河南省教育厅自然科学研究计划项目(2010B560015)

收稿日期: 2014-08-14

考虑井阻作用时较为严密的砂井固结理论解答。后来, Hansbo 等^[4]、谢康和等^[5]发展了 Barron 理论, 分别给出了等应变条件下考虑井阻作用和涂抹效应的砂井固结问题的更为实用的解析解。1998 年, Tang^[6]发现用三角函数表示理想砂井地基孔压通式即可满足控制方程等求解条件, 可简化谢康和等^[5]的求解。Tang 等^[7]将砂井范围内土层及下卧层的固结分别视为轴对称和一维问题给出了未打穿砂井固结问题的解析解。Lekha 等^[8]在考虑地基非线性变形的基础上, 研究了变荷载对砂井地基固结的影响。Tang 等^[9]将 Tang^[6]的思路推广至非理想砂井多层地基。Hawlade 等^[10]通过数值计算研究了砂井地基固结的多种影响因素。刘加才等^[11]改进了未打穿砂井固结问题渗透面上的连续条件, 讨论了变荷载问题。闫富有^[12]将砂井下卧层视为虚拟排水井, 得出了将下卧层简化为一维固结与考虑其三维固结对计算结果影响很小的结论。Geng 等^[13]讨论了加载联合真空预压未打穿砂井地基处理方法的有效性。这些研究成果都加深了对砂井地基固结机制的理解, 有力推进了该方法的应用。然而, Hansbo 等^[4]通过对多个砂井地基实际观测资料的分析表明, 传统 Barron 固结理论并不能很好地解释这些地基的固结特性, 固结度计算值和观测值之间有时存在较大的偏差。究其原因, 很大程度上可归为是 Barron 理论假设砂井地基中的渗流符合 Darcy 定律, 而越来越多的室内试验和现场观测表明, Darcy 定律对渗透性较低的黏性土及软土却不一定适用^[14-17]。目前有多种形式的非 Darcy 渗流数学拟合式, 其中 Hansbo^[14]针对瑞典 Ska-Edeby 黏土首先建议

$$v = \begin{cases} ci^m & (i \leq i_1) \\ K(i - i_0) & (i > i_1) \end{cases}, \quad (1)$$

式中, v 为渗流速度, i 为水力梯度, m 为由试验确定的常数, c , K 分别为幂函数形式和线性关系表达式中的渗透系数, 且 $c = K / (mi_1^{m-1})$, i_0 和 i_1 分别为直线渗流计算起始水力梯度和直线渗流起始水力梯度, 且 $i_0 = i_1(m-1)/m$ 。式 (1) 由低速渗流段的幂函数和高速渗流段的直线函数两部分组成 (图 1), 是近年来讨论较多的非 Darcy 渗流形式, 国内已有试验验证了其适用性^[17]。

目前, 渗流非 Darcy 特性对固结的影响研究多集中于一维情况, 并且多采用式 (1) 或其简化形式来描述^[18-25]。研究结果表明, 基于 Hansbo 渗流的一维固结中, 其孔压消散速度和地基固结速度都会慢于基于 Darcy 渗流的分析结果。为考察非 Darcy 渗流对砂井地基固结的影响, Hansbo^[26-27]率先将式 (1) 引入, 但在具体计算固结度时, 却忽略了式 (1) 中的直线渗

流段, 即仅考虑了幂函数渗流的影响。Teh 等^[28]从 Biot 理论出发, 结合式 (1), 基于虚功原理给出了砂井地基耦合固结有限元分析控制方程, 讨论了非 Darcy 渗流参数的影响。周琦等^[29]则仅考虑式 (1) 的直线渗流段, 即不计幂函数渗流段, 推导了平均固结度的近似解, 讨论了渗流起始水力梯度对真空预压下砂井地基固结过程的影响。邓岳保等^[30]在经典 Biot 理论的基础上, 引入式 (1), 应用加权残数法给出了砂井地基三维固结有限元方程, 并与 Hansbo^[27]基于幂函数渗流的固结度进行了比较。

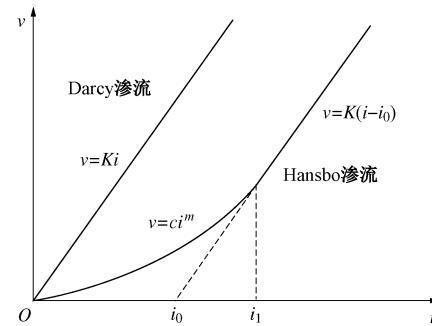


图 1 Darcy 渗流模型和 Hansbo 渗流模型

Fig. 1 Darcian and Hansbo's flow models

为进一步探讨非 Darcy 渗流对砂井固结的影响, 本文拟用式 (1) 所示的 Hansbo 渗流模型代替 Darcy 模型来描述理想砂井地基中的渗流, 在自由竖向应变条件下, 承认 Barron^[1]的其它假定, 重新推导理想砂井地基固结方程, 并初步探讨有关参数对砂井地基固结进程的影响。

1 分析模型

设某均质饱和黏性土层厚度为 H , 已在自重作用下完全固结, 顶面透水, 底面不透水, 砂井设置后于其顶面瞬时施加均布竖向荷载 p 。设砂井半径和影响区半径分别为 r_w 和 r_e , 井径比为 n (图 2), 忽略井阻和涂抹效应, 并假定: ①初始时刻, 上部荷载全部被超孔隙水压 u 承担; ②固结过程中, 地面均布荷载不会因差异沉降而改变其分布形式, 即竖向应变可以自由发展; ③土体仅发生竖向线性变形, 并且体积压缩系数 m_v 为常数; ④固结过程中的渗流可用式 (1) 描述, 其中各试验参数为常量。

设 t 时刻, 距离土层顶部为 z , 距离砂井竖向对称轴为 r 处的超孔压为 u , 体积应变为 ε_v , 速度 \vec{v} 的竖向和径向分量分别为 v_z 和 v_r ; 相应的水力梯度 \vec{i} 的竖向和径向分量分别为 $i_r = -\frac{1}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}$, $i_z = -\frac{1}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$, 则 $|\vec{i}| = \sqrt{i_r^2 + i_z^2}$ 。根据渗流连续性条件, 可得^[1]

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2)$$

由于

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = -m_v \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3)$$

由 (2)、(3) 可得^[1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{m_v} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (4)$$

把式 (1) 代入式 (4), 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{m_v \cdot m \cdot i_l^{m-1} \cdot \gamma_w^m} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\varphi^{m-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \varphi^{m-1} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi^{m-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (|i| \leq i_l) \quad (5a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{m_v \cdot \gamma_w} \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{(m-1)i_l \cdot \gamma_w}{m} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \right\} \quad (|i| > i_l) \quad (5a)$$

式中, $\varphi = \gamma_w |i|$ 。

本课题的初始条件和边界条件分别为

$$u(r, z, 0) = u_0 = p \quad (r_w \leq r \leq r_e, 0 \leq z \leq H), \quad (6)$$

$$\begin{cases} u(r_w, z, t) = 0, & u(r, 0, t) = 0, \\ \frac{\partial u(r_e, z, t)}{\partial r} = 0, & \frac{\partial u(r, H, t)}{\partial z} = 0 \quad (t > 0), \end{cases} \quad (7)$$

为便于讨论, 引入如下无量纲参数: $U = \frac{u}{p}$, $R = \frac{r}{r_e}$, $Z = \frac{z}{H}$, $\alpha = \frac{r_e}{H}$, $T = \frac{Kt}{4m_v \cdot \gamma_w \cdot r_e^2}$, $I = \frac{r_e \gamma_w |i|}{p}$,

$I_l = \frac{r_e \gamma_w i_l}{p}$ 。则式 (5) ~ (7) 化为

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{4}{m I_l^{m-1}} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(I^{m-1} \cdot \frac{\partial U}{\partial R} \right) + I^{m-1} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial U}{\partial R} + \alpha^2 \cdot \frac{\partial}{\partial Z} \left(I^{m-1} \cdot \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right] \quad (I \leq I_l) \quad (8a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} = 4 \left\{ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial U}{\partial R} + \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right) - \frac{(m-1)I_l}{m} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{I} \cdot \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{IR} \cdot \frac{\partial U}{\partial R} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{I} \cdot \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right] \right\} \quad (I > I_l), \quad (8b)$$

$$U(R, Z, 0) = 1 \quad (1/n \leq R \leq 1, 0 \leq Z \leq 1), \quad (9)$$

$$U \left(\frac{1}{n}, Z, T \right) = 0, U(R, 1, T) = 0, \frac{\partial U(1, Z, T)}{\partial R} = 0, \frac{\partial U(R, 1, T)}{\partial Z} = 0 \quad (T > 0) \quad (10)$$

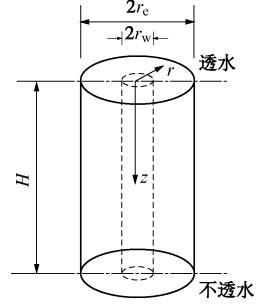


图 2 理想砂井地基计算简图

Fig. 2 Cylindrical unit cell for a vertical sand drain ground

2 方程的有限差分格式及求解步骤

考虑到上述非线性偏微分方程难以取得解析解, 这里拟用有限差分法求其数值解。孙志忠^[3]详细介绍了 20 世纪由 Crank 等发展的一种用于求解抛物型方程混合初值问题的 Crank-Nicolson 隐式有限差分法。对于常系数抛物型方程, 该方法在空间上和时间上都具有 2 阶精度, 且是无条件稳定的。对该法稍加修改, 即可用于求解上述轴对称偏微分方程。不过由于上述方程的系数不是常数, 这里用迭代法求解离散后的代数方程组。具体做法如下。

首先, 在 $1/n \leq R \leq 1$, $0 \leq Z \leq 1$ 范围内, 径向以 ΔR 为步长将土层均匀离散为 N 层, 并由内向外从 0 到 N 对节点编号, 坚向以 ΔZ 为步长将土层均匀离散为 M 层, 并由上到下从 0 到 M 对节点编号, 同时以步长 ΔT 对时间进行离散。在时刻 $T_k + \Delta T/2$, 空间点 (R_i, Z_j) 处考虑微分方程 (8), 其中的偏微分项用中心差分表示, 所用网格点如图 3 所示(图 3 中 \times 点表示差分格式是在这点列出的, \bullet 点表示差分方程中用到的点)。这样, 式 (8) 离散后整理可得

$$U_{i,j}^{k+1} = U_{i,j}^k + \frac{a_1}{m I_l^{m-1}} \left[F_{Ri,j}^k + F_{Ri,j}^{k+1} + w_i (G_{i,j}^k + G_{i,j}^{k+1}) \right] + \frac{a_2}{m I_l^{m-1}} \cdot \alpha^2 (F_{Zi,j}^k + F_{Zi,j}^{k+1}) \quad (0 < I \leq I_l), \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{k+1} = U_{i,j}^k + a_1 \left\{ E_{Ri,j}^k + E_{Ri,j}^{k+1} + w_i (D_{Ri,j}^k + D_{Ri,j}^{k+1}) - \frac{(m-1)I_l}{m} \left[P_{Ri,j}^k + P_{Ri,j}^{k+1} + w_i (Q_{i,j}^k + Q_{i,j}^{k+1}) \right] \right\} + a_2 \alpha^2 \left[E_{Zi,j}^k + E_{Zi,j}^{k+1} - \frac{(m-1)I_l}{m} (P_{Zi,j}^k + P_{Zi,j}^{k+1}) \right] \quad (I > I_l). \end{aligned} \quad (11b)$$

式中 i 为径向节点编号, $1 \leq i \leq N-1$; j 为坚向节点编号, $1 \leq j \leq M-1$; k 为时间节点编号; $a_1 = 2\Delta T/(\Delta R)^2$, $a_2 = 2\Delta T/(\Delta Z)^2$, $w_i = \Delta R / [2(r_w/r_e + i\Delta R)]$, $F_{Ri,j}^k = \varphi_{i+1/2,j}^k \cdot C_{Ri,j}^k - \varphi_{i-1/2,j}^k \cdot C_{Ri-1,j}^k$, $F_{Zi,j}^k =$

$$\begin{aligned}
& \varphi_{i,j+1/2}^k \cdot C_{Zi,j}^k - \varphi_{i,j-1/2}^k \cdot C_{Zi,j-1}^k, \quad P_{Ri,j}^k = C_{Ri,j}^k / I_{i+1/2,j}^k - \\
& C_{Ri-1,j}^k / I_{i-1/2,j}^k, \quad P_{Zi,j}^k = C_{Zi,j}^k / I_{i,j+1/2}^k - C_{Zi,j-1}^k / I_{i,j-1/2}^k, \\
& G_{i,j}^k = \varphi_{i,j}^k \cdot D_{i,j}^k, \quad Q_{i,j}^k = D_{i,j}^k / I_{i,j}^k, \quad C_{Ri,j}^k = U_{i+1,j}^k - U_{i,j}^k, \\
& C_{Zi,j}^k = U_{i,j+1}^k - U_{i,j}^k, \quad E_{Ri,j}^k = U_{i-1,j}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i+1,j}^k, \\
& E_{Zi,j}^k = U_{i,j-1}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i,j+1}^k, \quad \varphi_{i,j}^k = (I_{i,j}^k)^{m-1}, \quad I_{i+1/2,j}^k = \\
& \sqrt{(C_{Ri,j}^k / \Delta R)^2 + [0.25\alpha(D_{Zi+1,j}^k + D_{Zi,j}^k) / \Delta Z]^2}, \quad I_{i,j+1/2}^k = \\
& \sqrt{(C_{Zi,j}^k / \Delta Z)^2 + [0.25\alpha(D_{Ri,j}^k + D_{Zi,j}^k) / \Delta R]^2}, \quad I_{i,j}^k = 0.25 \cdot \\
& \sqrt{(D_{Ri,j}^k / \Delta R)^2 + (\alpha D_{Zi,j}^k / \Delta Z)^2}, \quad D_{Zi,j}^k = U_{i,j+1}^k - U_{i,j-1}^k, \\
& D_{Ri,j}^k = U_{i+1,j}^k - U_{i-1,j}^k.
\end{aligned}$$

初始条件式(9)和边界条件式(10)分别离散为

$$U_{i,j}^0 = 1, \quad (12)$$

$$U_{0,j}^k = 0, \quad U_{i,0}^k = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
U_{N,j}^{k+1} &= U_{N,j}^k + \frac{2a_1}{m \cdot I_1^{m-1}} (S_{N,j}^k + S_{N,j}^{k+1}) + \frac{a_2}{m \cdot I_1^{m-1}} \cdot \\
& \alpha^2 (F_{ZN,j}^k + F_{ZN,j}^{k+1}), \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{i,M}^{k+1} &= U_{i,M}^k + \frac{a_1}{m I_1^{m-1}} \left[F_{Ri,M}^k + F_{Ri,M}^{k+1} + w_M (G_{i,M}^k + G_{i,M}^{k+1}) \right] + \\
& \frac{2a_2}{m \cdot I_1^{m-1}} \cdot \alpha^2 (L_{i,M}^k + L_{i,M}^{k+1}), \quad (15)
\end{aligned}$$

式中, $L_{i,M}^k = \varphi_{i,M-1/2}^k \cdot (U_{i,M-1}^k - U_{i,M}^k)$, $S_{N,j}^k = \varphi_{N-1/2,j}^k \cdot (U_{N-1,j}^k - U_{N,j}^k)$ 。

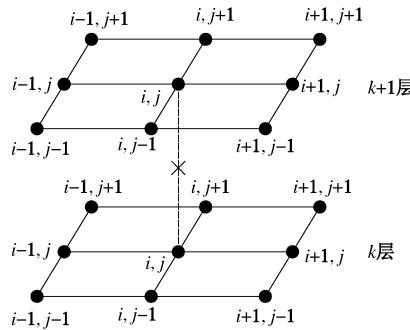


图3 Crank-Nicolson 差分格式节点示意图

Fig. 3 Nodes of Crank-Nicolson finite difference method

这样式(11)~(15)构成封闭方程组, 可按以下步骤求出各点的孔压和每个时刻的固结度: ①按式(12)给定各节点的孔压初值, 按式(13)给定透水边界处的孔压为零, 给定迭代精度 δ 。②由时刻 T_k 的孔压 $U_{i,j}^k$ 用迭代法求时刻 T_{k+1} 的孔压 $U_{i,j}^{k+1}$ 。这里, 首先以 $U_{i,j}^k$ 作为时刻 T_{k+1} 的孔压初值 $U_{i,j,0}^{k+1}$, 分别代入式(11)和(14)~(15)等号右边进行计算, 得出 $U_{i,j}^{k+1}$ 的第一次迭代值 $U_{i,j,1}^{k+1}$ 。如果 $|U_{i,j,0}^{k+1} - U_{i,j,1}^{k+1}| < \delta$, 则停止迭代, 进入下一时刻的计算, 否则将 $U_{i,j,1}^{k+1}$ 赋给 $U_{i,j,0}^{k+1}$ 再次迭代。③计算时刻 T_k 的砂井地基固结度。这里, 采用按孔压定义的平均固结度式(16)描述砂井地基孔

压的整体消散速度。由于这里考虑的是均匀地基, 且其变形是线性的, 所以, 式(16)也可反映其平均固结速率。

$$\begin{aligned}
U_p &= 1 - \frac{\int_0^H dz \int_{r_w}^{r_e} 2\pi r u dr}{\int_0^H dz \int_{r_w}^{r_e} 2\pi r p dr} \\
&= 1 - \frac{2\Delta Z}{1 - 1/n^2} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} (A_{1i,j} + A_{2i,j} + A_{3i,j}), \quad (16)
\end{aligned}$$

式中, $A_{1i,j} = \frac{1}{3} C_{Ri,j}^k (R_{i+1}^3 - R_i^3) / \Delta R$, $A_{2i,j} = \frac{1}{2} (R_{i+1}^2 - R_i^2)$

$$(U_{i,j}^k - C_{Ri,j}^k / \Delta R), \quad A_{3i,j} = \frac{1}{4} C_{Ri,j}^k (R_{i+1}^2 - R_i^2)。$$

3 解法验证

令 $m=1$ 或 $i_1=0$, 本文模型退化为 Barron^[1]基于 Darcy 渗流在自由应变假定下的砂井固结方程。取 $\Delta R=0.02$, $\Delta Z=0.02$, $\Delta T=10^{-5}$, 迭代精度 $\delta=10^{-7}$, 按上述数值解法对符合 Barron 假定的两个特例($n=5$, $\alpha=0.2$ 和 $n=10$, $\alpha=0.1$)分别计算了平均固结度 U_p , 结果示于图4。为便于比较, 图4中也分别给出了 Barron 在自由应变和等应变假定的解析解。很明显, 本文解答和 Barron 自由应变假定下的解析解差异很小, 且在固结的初期明显大于 Barron 等应变假定下的解答, 这说明本文的数值解法是有效的。

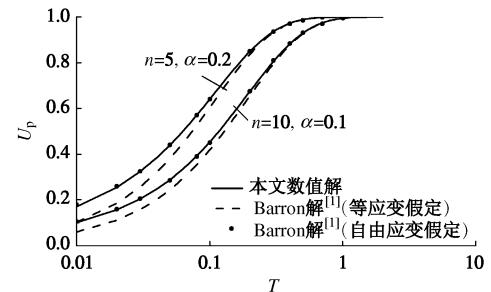


图4 基于 Darcy 渗流的平均固结度 U_p 和时间因子 T 的关系

Fig. 4 Relation between degree of consolidation U_p based on Darcy flow and time factor T

4 数值分析

为便于探讨 Hansbo 渗流的影响, 这里先对其参数取值范围进行探讨。对于指数 m , Hansbo^[14]和 Dubin 等^[15]认为 $m=1.5$ 较符合其试验结果, 孙丽云等^[17]的试验结果则为 $m=1.42\sim 1.82$, 因此较多研究者^[19-22, 24-28, 30]取 $m>1$ 进行分析。但是也有 $m<1$ 的情况, 比如齐添等^[16]对萧山黏土的试验结果就是 $m=0.50\sim 0.57$ 。考虑到 m 的不同取值可能对应不同的渗流机制, 这里仅分析 $m>1$ 的情况, 并取 $m=1.2$, 1.5 和 1.8。

对于直线渗流起始水力梯度 i_1 , 不同土的试验结

表 1 计算参数

Table 1 Parameters

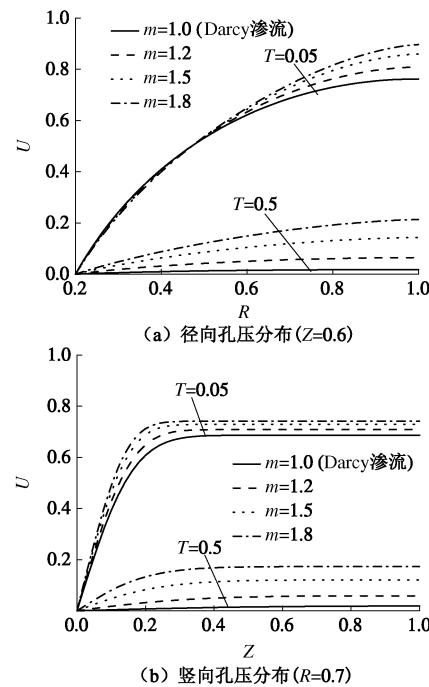
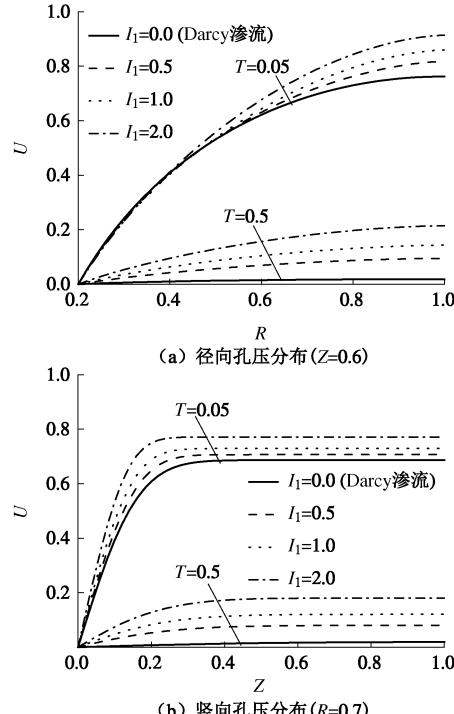
参数	n	α	m	I_1	T	R	Z	ΔZ	ΔR	ΔT	δ
表达式	$\frac{r_e}{r_w}$	$\frac{r_e}{H}$	—	$\frac{r_e \gamma_w I_1}{p}$	$\frac{Kt}{4m \gamma_w r_e^2}$	$\frac{r}{r_e}$	$\frac{z}{H}$	—	—	—	—
计算取值	5	0.2	[1.0, 1.8]	[0, 2.0]	[0, 10]	[1/n, 1]	[0, 1]	0.02	0.02	10^{-5}	10^{-7}

果差别也较大, 比如 Hansbo^[14]、Dubin 等^[15]、齐添等^[16]和孙丽云等^[17]的试验结果分别为 4~10, 8~35, 49~90 和 1.5~31.7。在数值分析时, 谢海澜等^[19]和 Teh 等^[28]取其最大为 40, 邓岳保等^[30]则取其最大为 20。考虑到砂井的影响半径可达 0.7~2.0 m, 如取地面堆载 $p=100$ kPa, $i_1=0\sim 20$, 则 $I_1\approx 0\sim 4$ 。这里分别取 $I_1=0.5, 1$ 和 2 进行讨论。

为清楚起见, 将后文数值分析时各有关参数的取值汇总于表 1。

4.1 Hansbo 渗流对孔压的影响

图 5, 6 分别给出了 $\alpha=0.2$, $n=5$ 时 Hansbo 渗流参数 m 和 I_1 值对径向和竖向孔压 U 的影响曲线 (为便于比较, 图中以实线形式给出了 Darcy 渗流时的结果)。很明显, 和一维固结^[19-21]相似的是, 在同一时刻, Hansbo 渗流时的孔压比按 Darcy 渗流时的要大, 并且 Hansbo 渗流参数 m 或 I_1 越大, 则前者就越大; 时间因子越大, 两种渗流模型算得的孔压差异就越明显, 即比起 Darcy 渗流, Hansbo 渗流延缓了孔压的消散速度。进一步分析图 5 (a)、6 (a) 可知, 距离砂井越远, 这种孔压差异就越大, 即 Hansbo 渗流对孔压消散的延缓效应就越明显。同时由图 5 (b)、6 (b) 可知, 对于同一时刻, 在同一半径处, 孔压随离开排水面的距离而增大, 但超过某一距离后, 孔压几乎不再变化, 并且当 m 或 I_1 较大时, 这个距离相对较小。也就是说, 砂井地基中, 由于竖向排水路径较长, 导致其对孔压消散的影响仅在排水面附近表现显著, 所以径向排水导致的孔压消散才是主要的, 而且渗流越偏离 Darcy 定律, 径向排水的作用就越显著。这一点从分别示于图 7 的 Darcy 渗流和 Hansbo 渗流 ($m=1.5$, $I_1=1$) 下砂井地基内同一时间因子 ($T=0.1$) 的孔压等值线图上看得更加明显。图 7 中, 不论 Darcy 渗流还是 Hansbo 渗流, 远离排水面处的孔压等值线几乎都呈直线状地平行于 Z 轴, 这说明这些地方水力梯度的竖向分量很小, 相应的渗流速度的竖向分量也小。同时可以看出, Hansbo 渗流条件下孔压等值线的“直线段”明显长于 Darcy 渗流。这说明 Hansbo 渗流条件下, 竖向排水引起的孔压消散在更大范围内是次要的。因此, 考虑这种非 Darcy 渗流时, 砂井地基固结应更加重视径向排水。

图 5 m 值对孔压的影响 ($I_1=1$, $\alpha=0.2$, $n=5$)Fig. 5 Influunce of m on pore water pressure ($I_1=1$, $\alpha=0.2$, $n=5$)图 6 I_1 值对孔压的影响 ($m=1.5$, $\alpha=0.2$, $n=5$)Fig. 6 Influunce of I_1 on pore water pressure ($m=1.5$, $\alpha=0.2$, $n=5$)

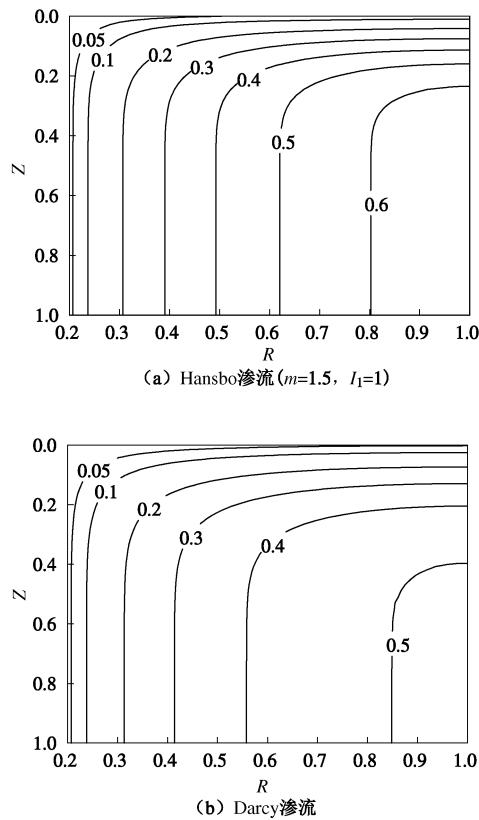


图 7 砂井影响范围内孔压的等值线图 ($\alpha = 0.2$, $n=5$, $T=0.1$)

Fig. 7 Contours of pore pressure within zone of influence by sand drain ($\alpha = 0.2$, $n=5$, $T=0.1$)

4.2 Hansbo 渗流对固结度的影响

为考察 Hansbo 渗流参数对固结度的影响, 以 $n=5$, $\alpha = 0.2$ 为例, 图 8 给出了 Hansbo 渗流时平均固结度 U_p 随时间因子 T 的变化曲线。图 8 表明, 和一维固结^[19-21]类似的是, 当采用 Hansbo 渗流模型描述砂井地基固结过程中的渗流时, 砂井地基中孔压的整体消散速度比采用 Darcy 渗流时要慢, 并且由于 Hansbo 渗流参数 m 或 I_1 数值越大, 砂井地基中的孔压就越难以消散, 这导致径向固结和竖向固结速度都越慢, 因而达到某一平均固结度需要的时间就越长。例如, 要达到一般工程要求的固结度 $U_p=0.90$, 与 Darcy 渗流对应的时间因子 $T=0.249$, 如按 Hansbo 渗流计算, 取 $I_1=1.0$, 对应 $m=1.2$, 1.5 和 1.8 的时间因子 T 分别等于 0.322, 0.472 和 0.690, 即分别为 Darcy 渗流的 1.3 倍, 1.9 倍和 2.8 倍; 如取 $m=1.5$, 对应 $I_1=0.5$ 和 2.0 的时间因子分别等于 0.359 和 0.654, 即分别为 Darcy 渗流的 1.4 和 2.6 倍。这充分说明了砂井地基固结分析时考虑渗流非 Darcy 特性的重要性。

从图 5, 6, 8 可以看出, m 或 I_1 越小, 按 Hansbo 渗流计算得到的孔压和固结度越靠近按 Darcy 渗流计算的数值, 因此当 m 或 I_1 足够小时, 按相对简单的 Darcy 渗流计算的结果是完全可以满足工程需要的。

图 9 给出了基于 Hansbo 渗流与基于 Darcy 渗流的固结度的相对偏差 ε 与时间因子 T 的关系。可以看出, 在本文计算参数取值范围内, 相对偏差最大值都出现在 $T=0.1 \sim 0.3$ 之间, 其中当 $m=1.5$ 且 $I_1=2.0$ 时其相对偏差最大可达 22.8%, 而当 $m=1.2$ 且 $I_1=0.5$ 时, 其相对偏差最大值仅有 3.6%。所以如果 $m < 1.2$ 且 $I_1 < 0.5$, 那么按 Darcy 渗流计算固结度则是适宜的。

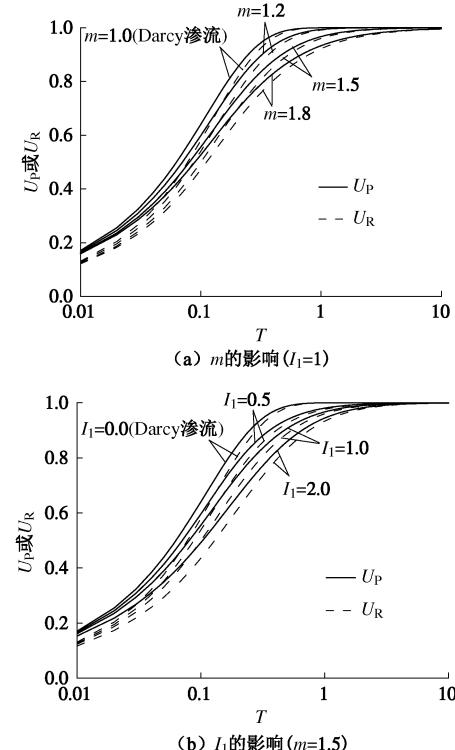


图 8 Hansbo 渗流对平均固结度的影响($n=5$, $\alpha = 0.2$)

Fig. 8 Influence of Hansbo's flow on degree of consolidation ($n=5$, $\alpha = 0.2$)

如前所述, 当砂井地基较厚时, 在远离排水面的地方, 渗流将以径向为主, 因而砂井地基的固结也将以径向固结为主。在以上各式中, 如果假定孔压与深度 Z 无关, 则可退化为理想砂井地基的径向固结方程, 同样可求得径向固结度 U_R 。为便于与同时考虑径向和竖向渗流的平均固结度 U_p 比较, 这里以同样参数计算了相应时间因子 T 的径向固结度 U_R , 并将有关曲线也绘制于图 8 中。很明显, 在其他参数相同时, 在同一时刻, 径向固结度 U_R 小于平均固结度 U_p , 并且二者的绝对差值 $(U_p - U_R)$ 在固结的初期和末期较小而中期较大; 其相对差值 $(U_p - U_R)/U_p$ 在固结的初期较大, 且随 Hansbo 渗流参数 m , I_1 数值的增大而略有增大, 但随时间而迅速减小。比如, 在本文的计算参数范围内, 当 $T=0.01$ 时, 相对差值约在 23.3%~24.1%, 而当 $T=0.1$ 和 0.5 时, 相对差值则分别降低到 9.3%~11.6% 和 2.9% 以下。所以在固结的中后期, 对于较厚的地基, 可以忽略竖向渗流的影响。这一点也可从图

10 所示的 $n=5$, $I_1=0.5$, $m=1.5$ 时不同砂井地基厚度时平均固结度 U_p 与时间因子 T 的关系曲线上看出。图 10 表明, 尽管较厚地基的整体固结速率较慢, 但是图示工况同一时刻的平均固结度相差却并不大, 且其差值随时间因子增大而迅速减小。比如, 当 $T=0.01$ 时, 将地基厚度 H 从 $5r_e$ 增大到 $10r_e$ 时, 其固结度相对差值约为 11.8%, 当 T 增大到 0.1 后其相对差值仅为 4.9%; 地基厚度 H 从 $10r_e$ 增大到 $100r_e$ 时, $T=0.01$ 和 0.1 时其固结度相对差值也仅分别为 7.2% 和 4.2%。特别地, 地基厚度 H 分别为 $30r_e$ 和 $100r_e$ 时, 两条 U_p - T 曲线几乎重合。所以, 当地基厚度超过 $10r_e$ 时可采用计算相对简单的径向固结度 U_R 代替 U_p 来估计地基的固结程度。因此, 在后文的分析中, 仅计算径向固结度 U_R 。

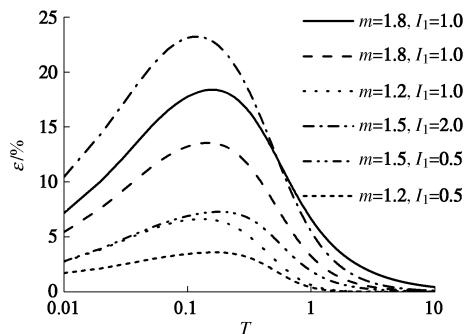


图 9 基于 Hansbo 渗流的固结度对基于 Darcy 渗流的偏离

Fig. 9 Relative deviation of degree of consolidation based on Hansbo's flow from that based on Darcian flow

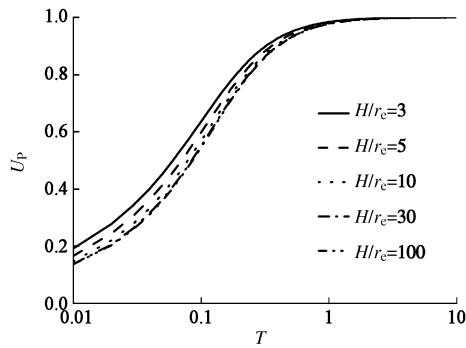


图 10 砂井地基厚度对固结度 U_p 的影响 ($n=5$, $I_1=0.5$, $m=1.5$)

Fig. 10 Influence of thickness of foundation on degree of consolidation ($n=5$, $I_1=0.5$, $m=1.5$)

4.3 将 Hansbo 渗流简化为幂函数形式渗流的影响

Hansbo 渗流方程 (式 (1)) 由幂函数段和直线段两部分组成, 这给计算带来了一定的麻烦, 因此有学者在计算中将其简单地取一种函数进行分析。例如刘忠玉等^[18]、李传勋等^[23]、Hansbo^[27]、周琦等^[28]曾分别取仅考虑渗流起始水力梯度的直线形式或幂函数形式进行过一维固结分析或等应变条件下的砂井地基固

结分析, 但并没有讨论这样简化对计算结果的影响。这里为讨论自由应变条件下仅考虑幂函数形式渗流的影响, 在图 11 中同时给出了基于幂函数渗流和式 (1) 所示的 Hansbo 渗流的径向固结度曲线。很明显, 在同一时刻, 幂函数渗流下的径向固结度要大于同时考虑幂函数段和直线段的 Hansbo 渗流下的计算值, 并且在其他条件相同时, 指数 m 值越大或直线渗流起始水力梯度 I_1 越小, 幂函数渗流下的径向固结度越大, 甚至在固结的初期大于 Darcy 渗流, 不过随着时间的增长, 两种模型计算值之间的差异将很快变小。比如, 图 11 (a) 中, 取 $I_1=1.0$ 且 $m=1.2$, 1.5, 1.8, 在 $T=0.01$ 时, 按幂函数渗流计算的固结度比按 Hansbo 渗流计算的分别大 9.3%, 23.5%, 37.2%, 但当 T 分别大于 0.04, 0.11, 0.16 后, 二者之差已小于 5%; 图 11 (b) 中, 取 $m=1.5$ 且 $I_1=0.5$, 1.0, 2.0, 在 $T=0.01$ 时, 按幂函数渗流计算的固结度比按 Hansbo 渗流计算的分别大 43.8%, 23.5%, 9.2%, 但当 T 分别大于 0.22, 0.11, 0.03 后, 二者之相对差值已小于 5%。所以, 在分析砂井地基固结时, 如 m 较大或 I_1 较小, 在固结的初期, 是不宜忽略 Hansbo 渗流模型中直线段的, 否则将会高估砂井地基的孔压消散速度和固结速度; 但对于 $m<1.2$ 且 $I_1>2.0$ 的情形, 忽略 Hansbo 渗流模型中的直线段, 仅采用相对简单的幂函数形式, 则不会产生过大的误差。

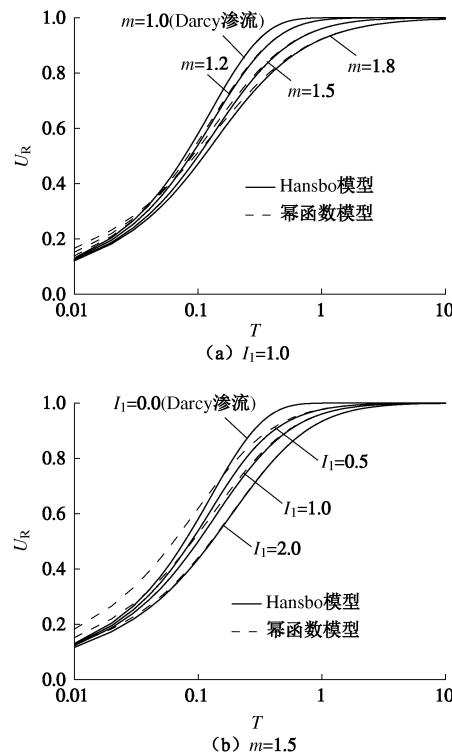


图 11 幂函数渗流和 Hansbo 渗流时径向固结度的对比($n=5$)

Fig. 11 Comparison of degrees of radial consolidation based on power and Hansbo flows ($n=5$)

实际上, 这种简化带来的误差同样存在于基于等竖向应变假定的分析中。Teh 等^[28]指出, 为了克服这种简化带来的误差, Hansbo 在计算中利用试算法根据井间距、初始孔压以及 λ/c_h (这里 $\lambda = K/(m\gamma_w m_v i_1^{m-1})$, $c_h = K/(m_v \gamma_w)$) 对 i_1 进行了调整, 因此, 在 Hansbo^[26-27] 基于等应变假定和幂函数渗流形式的径向固结度解析解 (见后文的式 (17)) 中, i_1 不能理解为直线渗流水力梯度, 而只能理解为一个复杂的参数。

4.4 自由应变和等应变假定的影响

在砂井地基固结分析中, 一般对竖向应变采用两种极端假定: 一种是这里采用的自由应变假定, 即不考虑其上填土拱效应的影响, 假定地面荷载始终是均匀分布的; 一种是等应变假定, 即考虑填土拱效应的影响, 假定每一个水平面上各点的竖向应变是相等的。在 Darcy 渗流条件下, Barron^[1]的分析表明, 两种假定对砂井地基固结度的影响主要体现在固结的前期, 且基于自由应变假定的固结度大于基于等应变假定的固结度, 但随着时间增长, 二者将趋于一致。该结论在非 Darcy 渗流条件下是否适用, 这里进行初步探讨。

Hansbo^[27]曾假定渗流速度和水力梯度之间满足幂函数关系, 即忽略了式 (1) 中的直线段, 并考虑涂抹和井阻的影响, 给出了等应变条件下径向固结度的解析式。Teh 等^[28]、邓岳保等^[30]曾将基于 Biot 固结理论的有限元数值解答与该解析式进行过比较, 在其计算工况内 ($m=1.2 \sim 1.5$, $i_1=5 \sim 20$), 二者的误差不超过 10%, 证明了该解析式的适用性。对于理想砂井, 该解析式退化为

$$U_R = 1 - \left[1 + \frac{\lambda t}{4\eta r_e^2} \cdot \left(\frac{p}{2r_e \gamma_w} \right)^{1-m} \right]^{1/(1-m)} = 1 - \left(1 + \frac{T}{\eta m} \cdot (2I_1)^{1-m} \right)^{1/(1-m)} \quad (17)$$

$$\text{式中 } \lambda = \frac{K}{m\gamma_w m_v i_1^{m-1}}; \quad \eta = \frac{m^{2m} \beta^m}{4(m-1)^{m+1}}; \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3; \quad \beta_1 = \frac{1}{3m-1} - \frac{m-1}{m(3m-1)(5m-1)} - \frac{(m-1)^2}{2m^2(5m-1)(7m-1)}; \quad \beta_2 = -\frac{n^{1/m-1}}{2m}; \quad \beta_3 = \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{3m-1} \right) n^{1/m-3}.$$

取 $n=5$, 将按式 (17) 计算的等应变条件下径向固结度的理论解以及本文在自由应变下按同样参数计算的数值解示于图 12。可以发现, 在固结的初期, 不论 Darcy 渗流还是非 Darcy 渗流, 基于自由应变假定的径向固结度都明显大于基于等应变假定的径向固结度。比如, 当 $T=0.01$ 时, 按 Darcy 渗流计算, 前者比

后者大 60%, 按非 Darcy 渗流计算, 且 $I_1=1.0$, $m=1.2$, 1.5 , 1.8 时, 前者比后者分别大 62%, 74%, 81%。按 Darcy 渗流计算时, 两种假定下相对差值随时间增长而迅速减小, 当 $T=0.1$ 时, 二者之间的相对差值已小于 2%。与之相比, 按非 Darcy 渗流计算时, 尽管基于等应变假定的径向固结度开始较小, 但大约在 $T>0.1$ 后, 其值反而略超过基于自由应变假定的计算值, 但二者的相对差值不超过 4%。

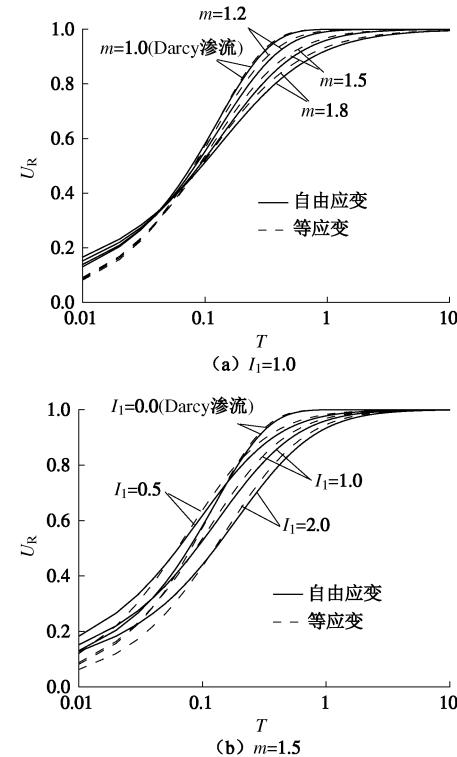


图 12 自由应变和等应变假定下基于幂函数渗流的径向固结度对比 ($n=5$)

Fig. 12 Comparison of degrees of radial consolidation based on power flow according to free or equal strain theory ($n=5$)

5 结 论

在自由应变条件下, 引入 Hansbo 渗流方程代替 Darcy 定律描述砂井地基固结过程中的渗流, 在 Barron 固结理论的基础上, 对理想砂井地基重新推导了固结方程, 并用 Crank-Nicolson 有限差分法进行求解。分析结果表明, Hansbo 渗流模型对砂井地基固结特性的影响与 Darcy 渗流模型有明显不同, 并在指数 $m>1$ 时可以得到以下 4 点结论。

(1) 相比于 Darcy 渗流, Hansbo 渗流会延缓砂井地基中孔压的消散速度, 导致土体的固结速度变慢, 因而达到同一固结度所需要的时间将会延长。在本文的计算参数范围内, 达到一般工程要求的 90% 固结度所需要的时间要延长到按 Darcy 渗流计算所需时间的 1.3~2.8 倍。而在计算固结度时, 如 $m<1.2$ 且 $I_1<0.5$,

就可忽略 Hansbo 渗流的影响, 按 Darcy 渗流计算。

(2) 不论基于 Darcy 渗流还是基于 Hansbo 渗流, 厚度越大的地基, 其固结越慢, 但地基的厚度达到一定程度 (10 倍砂井影响区半径) 后, 厚度增加对砂井地基固结的影响可以忽略不计。和 Darcy 渗流相比, 当渗流符合 Hansbo 模型时, 径向排水对孔压消散的作用则更为突出。

(3) 当将 Hansbo 渗流模型简化为幂函数模型时, 在固结的初期, 会高估砂井地基的固结度, 特别是对于那些 m 值较大或 I_1 值较小的情形; 反之, 对于 $m < 1.2$ 且 $I_1 > 2$ 的情形, 则可忽略由此产生的误差。

(4) 在固结的初期, 基于自由应变假定的砂井地基固结度都大于基于等应变假定的计算值, 但按 Hansbo 渗流的简化形式——幂函数形式计算时, 在时间因子 $T > 0.1$ 后, 前者则会略小于后者, 但其相对差值不超过 4%。

需要说明的是, 非 Darcy 渗流除 Hansbo 模型外还有很多, 当渗透试验表明某场地用其他模型更合适时, 讨论其不同的固结特性是有益的。

参考文献:

- [1] BARRON R A. Consolidation of fine-grained soils by drain wells[J]. Transactions of the American Society of Civil Engineerings, 1948, **113**: 718 - 742.
- [2] HART E G, KONDNER R L, BOYER W C. Analysis for partially penetrating sand drains[J]. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 1958, **84**(4): 1 - 15.
- [3] YOSHIKUNI H, NAKANADO H. Consolidation of fine-grained soils by drain well with finite permeability[J]. Soils and Foundations, 1974, **14**(2): 35 - 46.
- [4] HANSBO S, JAMIOLKOWSKI M, KOK L. Consolidation by vertical drains[J]. Géotechnique, 1981, **31**(1): 45 - 66.
- [5] 谢康和, 曾国熙. 等应变条件下的砂井地基固结解析理论[J]. 岩土工程学报, 1989, **11**(2): 3 - 17. (XIE Kang-he, ZENG Guo-xi. Consolidation theories for drain wells under equal strain condition[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1989, **11**(2): 3 - 17. (in Chinese))
- [6] TANG X W. A Study for consolidation of ground with vertical drain system [D]. Saga: Saga University, 1998.
- [7] TANG X W, ONITSUKA K. Consolidation of ground with partially penetrated vertical drains[J]. Geotechnical Engineering Journal, 1998, **29**(2): 209 - 231.
- [8] LEKHA K R, KRISHNASWAMY N R, BASAK P. Consolidation of clay by sand drain under time-dependent loading[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 1998, **124**(1): 91 - 94.
- [9] TANG X W, ONITSUKA K. Consolidation of double-layered ground with vertical drains[J]. International Journal for Numerical Analytical Methods in Geomechanics, 2001, **25**: 1449 - 1465.
- [10] HAWLADER B C, IMAI G, MUHUNTHAN B. Numerical study of the factors affecting the consolidation of clay with vertical drains[J]. Geotextiles and Geomembranes, 2002, **20**(4): 213 - 239.
- [11] 刘加才, 施建勇, 赵维炳, 等. 变荷载作用下未打穿竖井地基固结分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, **24**(6): 1041 - 1046. (LIU Jia-cai, SHI Jian-yong, ZHAO Wei-bing, et al. Consolidation of ground with partially penetrated vertical drains under time-dependent loading[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, **24**(6): 1041 - 1046. (in Chinese))
- [12] 闫富有. 成层未打穿砂井地基固结 Lagrange 插值解法[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, **26**(9): 1932 - 1939. (YAN Fu-you. Lagrange interpolation for multi-layer ground in consolidation of partially penetrated vertical drains[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, **26**(9): 1932 - 1939. (in Chinese))
- [13] GENG X Y, INDRARATNA B, RUJIKIATKAMJORN C. Effectiveness of partially penetrating vertical drains under a combined surcharge and vacuum preloading[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2011, **48**(6): 970 - 983.
- [14] HANSBO S. Consolidation of clay, with special reference to influence of vertical sand drains[D]. Stockholm: Swedish Geotechnical Institute, 1960.
- [15] DUBIN B, MOULIN G. Influence of a critical gradient on the consolidation of clays[C]// Consolidation of Soils: Testing and Evaluation (STP 892), ASTM, 1985: 354 - 377.
- [16] 齐添, 谢康和, 胡安峰, 等. 萧山黏土非达西渗流性状的试验研究[J]. 浙江大学学报(自然科学版), 2007, **41**(6): 1023 - 1028. (QI Tian, XIE Kang-he, HU An-feng, et al. Laboratorial study on non-Darcy seepage in Xiaoshan clay[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2007, **41**(6): 1023 - 1028. (in Chinese))
- [17] 孙丽云, 乐金朝, 张杰. 饱和黏土非达西渗透特性试验研究[J]. 郑州大学学报(工学版), 2010, **31**(6): 31 - 34. (SUN Li-yun, YUE Jin-chao, ZHANG Jie. Experimental study on non-Darcy permeability characteristics of saturated clays[J]. Journal of Zhengzhou University (Engineering

- Science), 2010, **31**(6): 31 - 34. (in Chinese))
- [18] 刘忠玉, 张天航, 马崇武. 起始水力梯度对饱和黏土一维固结的影响[J]. 岩土力学, 2007, **28**(3): 467 - 470. (LIU Zhong-yu, ZHANG Tian-hang, MA Chong-wu. Effect of initial hydraulic gradient on one-dimensional consolidation of saturated clays[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, **28**(3): 467 - 470. (in Chinese))
- [19] 谢海澜, 武 强, 赵增敏, 等. 考虑非达西流的弱透水层固结计算[J]. 岩土力学, 2007, **28**(5): 1061 - 1065. (XIE Hai-lan, WU Qiang, ZHAO Zeng-min, et al. Consolidation computation of aquitard considering non-Darcy flow[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, **28**(5): 1061 - 1065. (in Chinese))
- [20] 刘忠玉, 孙丽云, 乐金朝, 等. 基于非 Darcy 渗流的饱和黏土一维固结理论[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, **28**(5): 973 - 979. (LIU Zhong-yu, SUN Li-yun, YUE Jin-chao, et al. One-dimensional consolidation theory of saturated clay based on non-Darcy flow[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, **28**(5): 973 - 979. (in Chinese))
- [21] 鄂 建, 陈 刚, 孙爱荣. 考虑低速非 Darcy 渗流的饱和黏性土一维固结分析[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(7): 1115 - 1119. (E Jian, CHEN Gang, SUN Ai-rong. One-dimensional consolidation of saturated cohesive soil considering non-Darcy flows[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **31**(7): 1115 - 1119. (in Chinese))
- [22] 刘忠玉, 纠永志, 乐金朝, 等. 基于非 Darcy 渗流的饱和黏土一维非线性固结分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, **29**(11): 2348 - 2355. (LIU Zhong-yu, JIU Yong-zhi, YUE Jin-chao, et al. One-dimensional nonlinear consolidation analysis of saturated clay based on non-Darcy flow[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, **29**(11): 2348 - 2355. (in Chinese))
- [23] 李传勋, 谢康和, 王 坤, 等. 基于指数形式渗流定律的软土一维固结分析[J]. 土木工程学报, 2011, **44**(8): 111 - 117. (LI Chuan-xun, XIE Kang-he, WANG Kun, et al. One-dimensional consolidation analysis considering exponential flow law for soft clays[J]. Chinese Civil Engineering Journal, 2011, **44**(8): 111 - 117. (in Chinese))
- [24] 纠永志, 刘忠玉, 乐金朝, 等. 考虑非 Darcy 渗流和自重应力的一维固结分析[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2012, **40**(4): 541 - 548. (JIU Yong-zhi, LIU Zhong-yu, YUE Jin-chao, et al. One-dimensional consolidation with a consideration of non-Darcy flow and self-gravity stress[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2012, **40**(4): 541 - 548. (in Chinese))
- [25] 刘忠玉, 闫富有, 王喜军. 基于非达西渗流的饱和黏土一维流变固结分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, **32**(9): 1937 - 1944. (LIU Zhong-yu, YAN Fu-you, WANG Xi-jun. One-dimensional rheological consolidation analysis of saturated clay considering on non-Darcy flow[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, **32**(9): 1937 - 1944. (in Chinese))
- [26] HANSBO S. Aspects of vertical drain design: Darcian or non-Darcian flow[J]. Géotechnique, 1997, **47**(5): 983 - 992.
- [27] HANSBO S. Consolidation equation valid for both Darcian and non-Darcian flow[J]. Géotechnique, 2001, **51**(1): 51 - 54.
- [28] TEH C I, NIE X Y. Coupled consolidation theory with non-Darcian flow[J]. Computers and Geotechnics, 2002, **29**(3): 169 - 209.
- [29] 周 琦, 邓志勇, 王友元, 等. 起始水力梯度对真空预压下砂井地基固结过程的影响[J]. 土木建筑与环境工程, 2010, **32**(2): 46 - 52. (ZHOU Qi, DENG Zhi-yong, WANG You-yuan, et al. Effect of initial hydraulic gradient on consolidation of sand-drained ground improved by vacuum preloading[J]. Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering, 2010, **32**(2): 46 - 52. (in Chinese))
- [30] 邓岳保, 谢康和, 李传勋. 考虑非达西渗流的比奥固结有限元分析[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(11): 2058 - 2065. (DENG Yue-bao, XIE Kang-he, LI Chuan-xun. Finite element analysis of Biot's consolidation with non-Darcian flow[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(11): 2058 - 2065. (in Chinese))
- [31] 孙志忠. 偏微分方程数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 2005. (SUN Zhi-zhong. Numerical methods for partial differential equations[M]. Beijing: Science Press, 2005. (in Chinese))