

DOI: 10.11779/CJGE201504001

# 土的 $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面强度准则及其与传统准则的比较研究

邵生俊, 张玉, 陈昌禄, 邵帅

(1. 西安理工大学岩土工程研究所, 陕西 西安 710048; 2. 陕西省黄土力学与工程重点实验室, 陕西 西安 710048)

**摘要:** 土的抗剪强度与其剪切破坏面上的正应力一般呈线性关系, 反映了土的剪切强度本质特性。常用强度准则有Mohr-Coulomb准则、Drucker-Prager屈服准则、Matsuoka-Nakai准则, 分别对应于与大主应力呈 $45^\circ + \varphi/2$ 的剪切破坏面、八面体面和空间滑动面(SMP)上的剪应力比为常数的关系。本文提出了一种由 $k\sqrt[3]{\sigma_1}$ ,  $k\sqrt[3]{\sigma_2}$ ,  $k\sqrt[3]{\sigma_3}$ 确定土单元大、中、小主应力轴交点的空间滑动面, 称为 $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面; 建立了 $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面剪应力比为常数的准则, 称为 $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面强度准则, 该准则在应力空间描述的强度破坏面为 $\pi$ 平面上呈曲边三角形形态的光滑锥面。进行了Mohr-Coulomb强度准则、Drucker-Prager强度准则、Matsuoka-Nakai强度准则与Lade-Duncan强度准则、 $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面强度准则在应力空间描述强度破坏面的比较分析, 以及不同 $\pi$ 平面上Lade-Duncan准则和 $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面强度准则随 $b$ 值的变化规律。结果表明Lade-Duncan强度准则与 $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面强度准则近似一致, 从而揭示了Lade-Duncan强度准则的物理本质基础: Lade-Duncan强度准则实质上近似服从土破坏时 $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面上剪应力与正应力呈线性变化的规律。即Lade-Duncan强度准则描述土单元剪切破坏时的空间滑动面近似为 $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面。根据4种原状黄土固结排水条件下的真三轴压缩试验结果, 验证了 $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面强度准则的合理性与可靠性。

**关键词:** 土的强度;  $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面;  $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面准则; 黄土; 真三轴试验

**中图分类号:** TU43      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-4548(2015)04-0577-09

**作者简介:** 邵生俊(1964-), 男, 甘肃武威人, 教授, 博士生导师, 从事土动力学与黄土力学研究。E-mail: sjshao@xaut.edu.cn。

## Strength criterion based on $\sqrt[3]{\sigma}$ spatially mobilized plane of soils and its comparison with conventional criteria

SHAO Sheng-jun, ZHANG Yu, CHEN Chang-lu, SHAO Shuai

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. Shaanxi Key Laboratory of Loess Mechanics and Engineering, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** The linear relation between shear strength and normal stress of failure plane shows the essential property of soil shear strength. The Mohr-Coulomb criterion, Drucker-Prager yield criterion and Matsuoka-Nakai criterion respectively respond to the linear relationship between shear stress and normal stress on different shear failure planes including shear failure plane with the angle of  $45^\circ + \varphi/2$  relating to the plane of the main principal stress, the octahedral plane in the principal stress space of soil element and the spatially mobilized plane named also  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatially mobilized plane. In this paper, new  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatially mobilized plane is proposed using three points  $k\sqrt[3]{\sigma_1}$ ,  $k\sqrt[3]{\sigma_2}$ ,  $k\sqrt[3]{\sigma_3}$  in the soil element in the principal stress axes, named as the  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatially mobilized plane. Furthermore, the new strength criterion is also proposed using the shear stress ratio on the  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatial mobilization plane being constant. The strength failure surface depicted in the principal stress space by this criterion is a smooth cone surface with the curved triangle shape on  $\pi$  plane. The strength failure surfaces of Mohr-Coulomb criterion, Drucker-Prager yield criterion, Matsuoka-Nakai criterion, Lade-Duncan criterion and  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatially mobilized plane criterion described in the stress space as well as the change laws of Lade-Duncan criterion and  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatially mobilized plane criterion with parameter  $b$  on different  $\pi$  planes are comparatively analyzed. It is shown that the Lade-Duncan criterion and  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatially mobilized plane strength criterion are approximate, which reveals the physical essence of Lade-Duncan strength criterion, that is, the former approximately obeys the linear relationship between shear stress and normal stress on  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatially mobilized plane at failure of soils. The

基金项目: 国家自然科学基金项目(41272320); 陕西省教育厅省级重点实验室项目(2010JS084)  
收稿日期: 2014-08-21

Lade-Duncan criterion describing the shear failure of soil element is approximately the  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatially mobilized plane. By comparing the strength criterion with the measured strength of true triaxial tests on four kinds of intact loess under consolidation and drainage, the laws of loess can be described by means of the  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatial mobilization plane strength criterion under the complex stress condition, and the rationality and reliability of the proposed strength criterion are verified by its consistency with the experimental values.

**Key words:** soil strength;  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatially mobilized plane;  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatially mobilized plane criterion; loess; true triaxial test

## 0 引言

岩土力学领域已经被广泛应用的强度准则包括 Mohr-Coulomb (M-C) 准则<sup>[1]</sup>, Drucker-Prager (D-P) 弹塑性模型的屈服准则<sup>[2]</sup>, Matsuoka-Nakai (M-N) 强度准则<sup>[3]</sup>, 以及 Lade-Duncan (L-D) 准则<sup>[4]</sup>。其中, M-C 准则、D-P 弹塑性屈服准则及 M-N 强度准则均给出了岩土材料强度破坏时主应力单元内某剪切面上应力条件服从的规律。然而, 它们描述的剪切面具有不同的特征。M-C 准则描述的岩土单元剪切面与大、小主应力平面正交, 且与大主应力作用面之间的夹角为  $45^\circ + \varphi/2$ 。认为土单元破坏时, 在该面上的剪应力与正应力之比服从线性变化规律, 且该面的剪应力和正应力与中主应力无关, 如图 1 所示。土的轴对称三轴压缩试验和平面应变试验常常可以测试得到与该剪切面近似一致的剪切破坏面。D-P 强度准则描述的剪切面为八面体面, 该空间剪切面与土单元 3 个主应力轴中任意两个轴构成平面之间的夹角相等, 且交线与坐标轴的夹角均为  $45^\circ$ 。认为土单元破坏时, 在该面上的剪应力与正应力之比服从线性变化规律, 且在剪应力和正应力中包含了中主应力, 如图 2 所示。M-N 强度准则应用 M-C 准则关于剪切破坏面的几何关系, 进一步考虑了中主应力对剪切破坏面的影响, 提出了一种空间剪切面, 称之为“空间滑动面 (spatially mobilized plane)”, 如图 3 所示。当正交六面体主应力单元的一个角点位于三维几何空间坐标轴的原点, 且与单元体的主应力轴一致时, 则该空间滑动面与三维几何空间坐标轴的交点依次为  $k\sqrt{\sigma_1}$ ,  $k\sqrt{\sigma_2}$ ,  $k\sqrt{\sigma_3}$ 。在轴对称三轴压缩和挤伸条件下, 该空间滑动面与大主应力作用面之间的夹角为  $45^\circ + \varphi/2$ 。与此对应, M-C 准则和 D-P 准则描述的剪切面亦称为一种空间滑动面。M-C 准则空间滑动面与正交六面体主应力单元大、小主应力坐标轴的交点依次为  $k\sqrt{\sigma_1}$ ,  $k\sqrt{\sigma_3}$ , D-P 准则空间滑动面与正交六面体主应力单元三维几何空间坐标轴的交点依次为  $k$ ,  $k$ ,  $k$ 。和 M-N 准则一样, 它们均描述了对应剪切空间滑动面上剪应力与法向正应力呈正比的破坏应力条件。这些强度准则在应力空间八面体面上描述的强度破坏面均相对于中心 (静水压力轴) 对称。除此之外, 邵生俊等还提出了三轴压缩和三轴挤伸空间滑动面准则<sup>[5]</sup>, 能够反映黄土的原生各向异性强度特性。俞茂宏等<sup>[6]</sup>提出的双剪

强度准则, 反映了材料强度破坏时两个剪切面上的应力条件, 可以认为是双空间滑动面强度准则。上述准则均描述对应单一空间滑动面上剪应力与正应力呈线性变化规律的关系。Lade 等引入球应力的幂函数, 建立了非线性 L-D 准则, 然而 L-D 强度准则没有建立其对应的空间滑动面。姚仰平等<sup>[7]</sup>通过引入强度破坏时剪应力与球应力的幂函数关系, 与 M-C 强度破坏面外接圆对应广义 Mises 准则和 M-N 强度准则相结合, 建立了非线性强度准则。本文应用已有强度准则关于土单元剪切破坏时空间滑动面的概念, 提出了一种新的空间滑动面, 其与三维几何空间坐标轴的交点依次为  $k\sqrt[3]{\sigma_1}$ ,  $k\sqrt[3]{\sigma_2}$ ,  $k\sqrt[3]{\sigma_3}$ , 建立了土的强度准则, 并与 L-D 准则进行了对比, 从而揭示了 L-D 强度准则的物理本质基础。通过原状结构性黄土的真三轴试验, 比较了不同应力路径真三轴试验测试强度和强度准则计算值的差异, 验证了基于新的空间滑动面建立强度准则的合理性和可靠性。

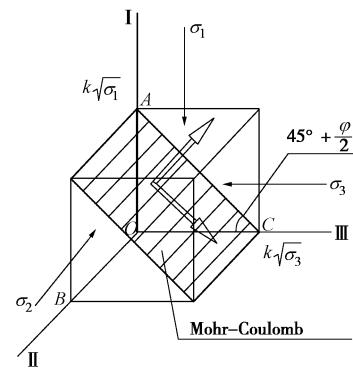


图 1 Mohr-Coulomb 空间滑动面

Fig. 1 Mohr-Coulomb spatially mobilized plane

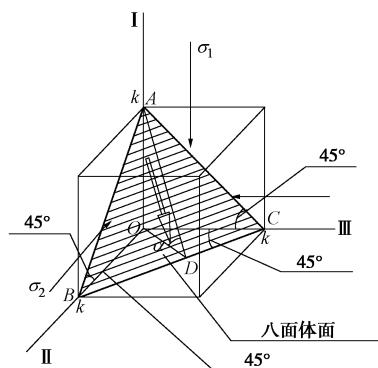


图 2 八面体空间滑动面

Fig. 2 Octahedral spatially mobilized plane

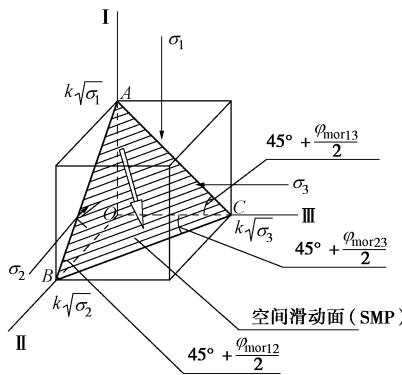
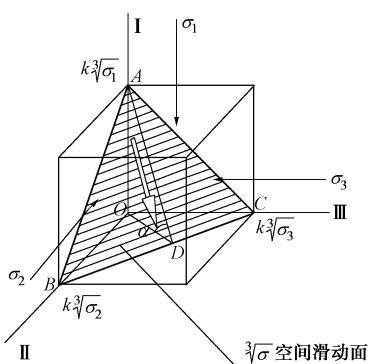


图 3 Matsuoka-Nakai 空间滑动面

Fig. 3 Matsuoka-Nakai spatially mobilized plane

## 1 $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面

与 M-N 空间滑动面类似, 邵生俊和陈昌禄提出了如图 4 所示的空间滑动面, 称之为 $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面。可以求出 $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面的法向方向余弦及其上的剪应力和正应力的表达式。

图 4  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面的应力条件Fig. 4 Stresses in  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatially mobilized plane

如图 4 所示,  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面满足下式

$$\left. \begin{array}{l} OA = k\sqrt[3]{\sigma_1} \\ OB = k\sqrt[3]{\sigma_2} \\ OC = k\sqrt[3]{\sigma_3} \end{array} \right\} . \quad (1)$$

根据图 4 所示 $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面的几何关系, 可以求出该空间滑动面的方向余弦, 即可确定该面的位置。令  $\angle OCB = \theta$ , 则

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{OB}{BC} = \frac{OB}{\sqrt{OB^2 + OC^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{\sigma_2}}{\sqrt{\left(\sqrt[3]{\sigma_2}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{\sigma_3}\right)^2}} . \end{aligned} \quad (2)$$

该滑动面法向相对于 I 轴的法向余弦为

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos \alpha = \frac{OD}{AD} = \frac{OC \cdot \sin \theta}{\sqrt{OA^2 + OD^2}} \\ &= \frac{\sigma_3^{1/3} \cdot \frac{\sigma_2^{1/3}}{\sqrt{\sigma_2^{2/3} + \sigma_3^{2/3}}}}{\sqrt{\sigma_1^{2/3} + \left(\sigma_3^{1/3} \cdot \frac{\sigma_2^{1/3}}{\sqrt{\sigma_2^{2/3} + \sigma_3^{2/3}}}\right)^2}} \\ &= \frac{(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{1/3}}{\sigma_1^{1/3} \sqrt{(\sigma_1 \sigma_2)^{2/3} + (\sigma_2 \sigma_3)^{2/3} + (\sigma_1 \sigma_3)^{2/3}}} . \end{aligned} \quad (3)$$

同理, 可得相对于 II 和 III 轴的方向余弦分别为

$$n_2 = \frac{(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{1/3}}{\sigma_2^{1/3} \sqrt{(\sigma_1 \sigma_2)^{2/3} + (\sigma_2 \sigma_3)^{2/3} + (\sigma_1 \sigma_3)^{2/3}}} , \quad (4)$$

$$n_3 = \frac{(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{1/3}}{\sigma_3^{1/3} \sqrt{(\sigma_1 \sigma_2)^{2/3} + (\sigma_2 \sigma_3)^{2/3} + (\sigma_1 \sigma_3)^{2/3}}} . \quad (5)$$

统一可表述为

$$n_i = \frac{(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{1/3}}{\sigma_i^{1/3} \sqrt{(\sigma_1 \sigma_2)^{2/3} + (\sigma_2 \sigma_3)^{2/3} + (\sigma_1 \sigma_3)^{2/3}}} \quad i = 1, 2, 3 . \quad (6)$$

由此可以得到该滑动面上 3 个坐标轴方向上的分量  $x_N$ ,  $y_N$ ,  $z_N$  分别为

$$\left. \begin{array}{l} x_N = \sigma_1 n_1 = \sigma_1^{2/3} \frac{(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{1/3}}{\sqrt{(\sigma_1 \sigma_2)^{2/3} + (\sigma_2 \sigma_3)^{2/3} + (\sigma_1 \sigma_3)^{2/3}}} \\ y_N = \sigma_2 n_2 = \sigma_2^{2/3} \frac{(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{1/3}}{\sqrt{(\sigma_1 \sigma_2)^{2/3} + (\sigma_2 \sigma_3)^{2/3} + (\sigma_1 \sigma_3)^{2/3}}} \\ z_N = \sigma_3 n_3 = \sigma_3^{2/3} \frac{(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{1/3}}{\sqrt{(\sigma_1 \sigma_2)^{2/3} + (\sigma_2 \sigma_3)^{2/3} + (\sigma_1 \sigma_3)^{2/3}}} \end{array} \right\} . \quad (7)$$

该滑动面上的合力  $P_N$  为

$$\begin{aligned} P_N^2 &= x_N^2 + y_N^2 + z_N^2 \\ &= \frac{(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{2/3}}{(\sigma_1 \sigma_2)^{2/3} + (\sigma_2 \sigma_3)^{2/3} + (\sigma_1 \sigma_3)^{2/3}} \cdot (\sigma_1^{4/3} + \sigma_2^{4/3} + \sigma_3^{4/3}) . \end{aligned} \quad (8)$$

该滑动面上的正应力  $\sigma_N$  和剪应力  $\tau_N$  分别为

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ &= \frac{(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{2/3}}{(\sigma_1 \sigma_2)^{2/3} + (\sigma_2 \sigma_3)^{2/3} + (\sigma_1 \sigma_3)^{2/3}} \cdot \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1^{2/3}} + \frac{\sigma_2}{\sigma_2^{2/3}} + \frac{\sigma_3}{\sigma_3^{2/3}} \right) \\ &= \frac{(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{2/3} (\sigma_1^{1/3} + \sigma_2^{1/3} + \sigma_3^{1/3})}{(\sigma_1 \sigma_2)^{2/3} + (\sigma_2 \sigma_3)^{2/3} + (\sigma_1 \sigma_3)^{2/3}} , \\ \tau_N &= \sqrt{P_N^2 - \sigma_N^2} \end{aligned} \quad (9)$$

$$= \left[ \frac{(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{2/3}}{(\sigma_1 \sigma_2)^{2/3} + (\sigma_2 \sigma_3)^{2/3} + (\sigma_1 \sigma_3)^{2/3}} (\sigma_1^{4/3} + \sigma_2^{4/3} + \sigma_3^{4/3}) - \left( \frac{(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{2/3} (\sigma_1^{1/3} + \sigma_2^{1/3} + \sigma_3^{1/3})}{(\sigma_1 \sigma_2)^{2/3} + (\sigma_2 \sigma_3)^{2/3} + (\sigma_1 \sigma_3)^{2/3}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

## 2 $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面强度准则 (邵生俊、陈昌禄建立)

根据空间滑动面上的剪应力和正应力比值为常数可得

$$\frac{\tau_N}{\sigma_N} = \sqrt{\frac{[(\sigma_1 \sigma_2)^{2/3} + (\sigma_2 \sigma_3)^{2/3} + (\sigma_1 \sigma_3)^{2/3}](\sigma_1^{4/3} + \sigma_2^{4/3} + \sigma_3^{4/3}) - 1}{(\sigma_1^{1/3} + \sigma_2^{1/3} + \sigma_3^{1/3})^2 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{2/3}}} = k_f \quad (11)$$

依据三轴压缩时的破坏条件  $\sigma_1 = \sigma_3 K_p$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3$ ,  $K_p = \tan^2(45^\circ + \varphi/2)$ , 亦可得

$$k_f = \frac{\sqrt{2}(K_p - 1)}{\sqrt[3]{K_p}(\sqrt[3]{K_p} + 2)} \quad (12)$$

将式 (12) 代入式 (11) 并化简可得

$$\sqrt{\frac{[(\sigma_1 \sigma_2)^{2/3} + (\sigma_2 \sigma_3)^{2/3} + (\sigma_1 \sigma_3)^{2/3}](\sigma_1^{4/3} + \sigma_2^{4/3} + \sigma_3^{4/3}) - 1}{(\sigma_1^{1/3} + \sigma_2^{1/3} + \sigma_3^{1/3})^2 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{2/3}}} = \frac{\sqrt[3]{K_p}(\sqrt[3]{K_p} + 2)}{\sqrt{2}(K_p - 1)} = 1 \quad (13)$$

式 (13) 为该空间滑动面上剪应力比为常数建立的强度准则, 据此可得到主应力空间和  $\pi$  平面上的强度破坏面和强度破坏线, 如图 5 所示。

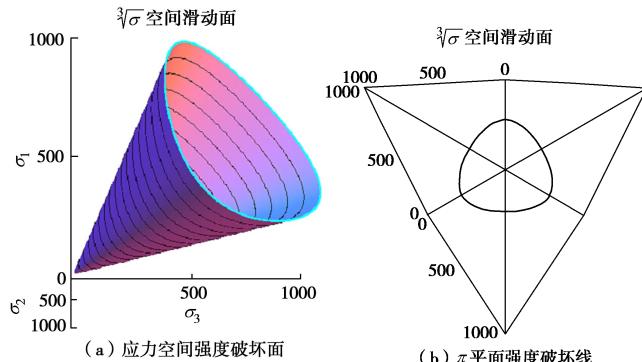


图 5 开三次方空间滑动面强度准则的破坏面

Fig. 5  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatially mobilized plane for strength failure criterion

对于无黏性土, 强度准则的破坏参数仅与土的内摩擦角  $\varphi$  相关。当土的内摩擦角  $\varphi$  分别为  $5^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $35^\circ$ ,  $45^\circ$  时, 依据  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面强度准则, 在主应力空间  $\pi$  平面上, 可得图 6 所示由内向外依次增大的强度破坏线。

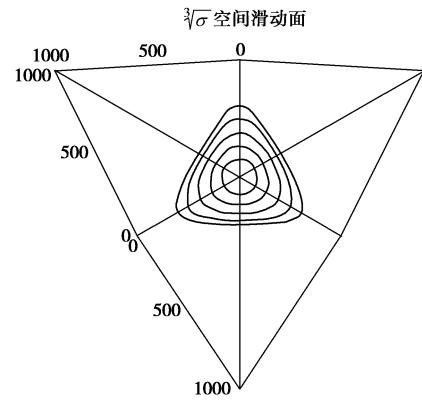


图 6  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面强度准则在  $\pi$  平面上的强度破坏线变化

Fig. 6 Change of failure line of  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatially mobilized plane criterion on  $\pi$  plane

将  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面强度准则推广到黏性土, 则该空间滑动面上的剪应力与正应力分别为

$$\hat{\sigma}_N = \frac{(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3)^{2/3} (\hat{\sigma}_1^{1/3} + \hat{\sigma}_2^{1/3} + \hat{\sigma}_3^{1/3})}{(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^{2/3} + (\hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3)^{2/3} + (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_3)^{2/3}} \quad (14)$$

$$\hat{\tau}_N = \left\{ \frac{(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3)^{2/3}}{(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^{2/3} + (\hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3)^{2/3} + (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_3)^{2/3}} (\hat{\sigma}_1^{4/3} + \hat{\sigma}_2^{4/3} + \hat{\sigma}_3^{4/3}) - \frac{(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3)^{2/3} (\hat{\sigma}_1^{1/3} + \hat{\sigma}_2^{1/3} + \hat{\sigma}_3^{1/3})}{(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^{2/3} + (\hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3)^{2/3} + (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_3)^{2/3}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

强度准则为

$$\sqrt{\frac{[(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^{2/3} + (\hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3)^{2/3} + (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_3)^{2/3}](\hat{\sigma}_1^{4/3} + \hat{\sigma}_2^{4/3} + \hat{\sigma}_3^{4/3}) - 1}{(\hat{\sigma}_1^{1/3} + \hat{\sigma}_2^{1/3} + \hat{\sigma}_3^{1/3})^2 (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_3)^{2/3}}} = \frac{\sqrt[3]{K_p}(\sqrt[3]{K_p} + 2)}{\sqrt{2}(K_p - 1)} = 1 \quad (16)$$

式中,  $\hat{\sigma}_i = c \cdot \cot \varphi + \sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ 。

## 3 L-D 准则, $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面准则与常用准则的比较

常用的准则包括 M-C 准则、D-P 准则、M-N 准则及 L-D 准则。其中 M-C 准则为

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \cos \varphi / 2}{(\sigma_1 + \sigma_3) / 2 - (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \sin \varphi / 2} = \tan \varphi \quad (17)$$

当 D-P 准则改变 M-C 准则的外接圆时, 可得广义的 D-P 准则, 也有人称为广义的 Mises 准则 (Generalization-Mises)。表述为

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} \cdot \frac{(K_p + 2)^2}{2(K_p - 1)^2} = 1 \quad (18)$$

M-N 准则为

$$\frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}$$

$$\frac{K_p}{(K_p+2)(2K_p+1)}=1 \quad . \quad (19)$$

Lade-Duncan (1975) 根据砂土的真三轴试验成果, 拟合得到了 $\pi$ 平面上破坏线形态呈曲边三角形的强度准则。当子午平面内土的强度随着平均球应力呈线性变化时, 其表达式为

$$I_1^3/I_3 = k \quad , \quad (20)$$

也可表述为

$$\frac{I_1^3}{I_3} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^3}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} = k \quad . \quad (21)$$

依据轴对称三轴压缩破坏的极限平衡条件 $\sigma_1 = K_p \sigma_3$ , 可表述为

$$\frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^3}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} = \frac{(K_p + 2)^3}{K_p} \quad . \quad (22)$$

L-D 准则、 $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面准则分别与 D-P 准则和 M-N 准则比较, 可得到图 7 所示的结果。图 7 给出了土的内摩擦角等于 $15^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $35^\circ$  的应力空间强度破坏面。可见, L-D 准则和 $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面准则描述的强度面非常相似, 均介于 D-P 准则和 M-N 准则描述强度面之间。在同一球应力 $\pi$ 平面上, 将 L-D 准则、 $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面准则再与 M-C 准则、D-P 准则和 M-N 准则比较, 可得到图 8 所示的结果。图 8 给出了土的内摩擦角分别等于 $15^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $35^\circ$  时 $\pi$ 平面上不同准则的强度线, 亦表明 L-D 准则和 $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面准则强度线均位于 M-C 准则、M-N 准则强度线外侧, D-P 准则强度线内侧。并且, L-D 准则和 $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面准则强度线近似一致。

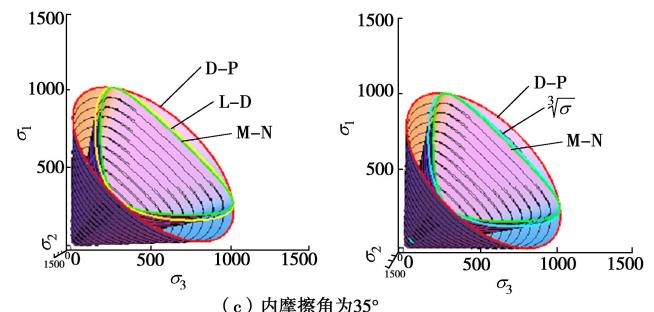
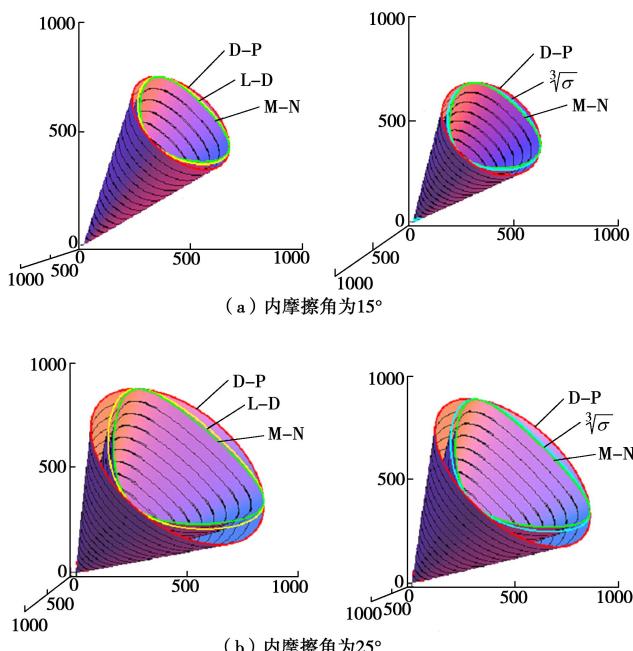


图 7 主应力空间内 L-D 准则,  $\sqrt[3]{\sigma}$  准则与常规准则的比较  
Fig. 7 Comparison among Lade-Duncan criterion,  $\sqrt[3]{\sigma}$  special mobilization plane criterion and normal criterion on principal stress space

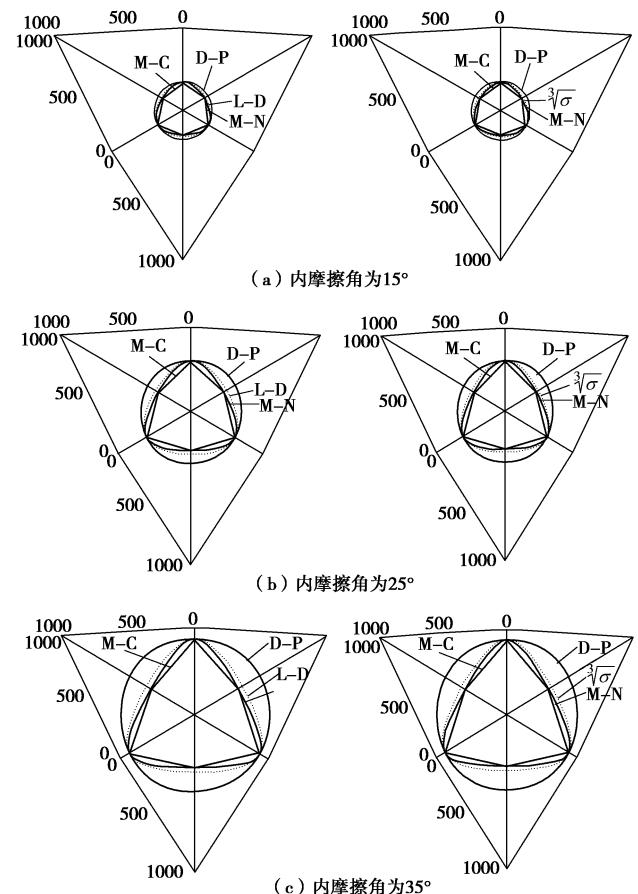


图 8  $\pi$  平面上 L-D 准则,  $\sqrt[3]{\sigma}$  准则与常规准则的比较  
Fig. 8 Comparison among Lade-Duncan criterion,  $\sqrt[3]{\sigma}$  special mobilization plane criterion and normal criterion on  $\pi$  plane

#### 4 $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面强度准则与 L-D 准则的比较

依据 Lade-Duncan 准则可得到主应力空间和 $\pi$ 平面上的强度面和强度线。当土的内摩擦角 $\varphi$ 分别为 $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $35^\circ$ ,  $40^\circ$  时, 在主应力空间和 $\pi$ 平面上, 可得由内向外依次增大的强度面和强度线。如图 9 所示。

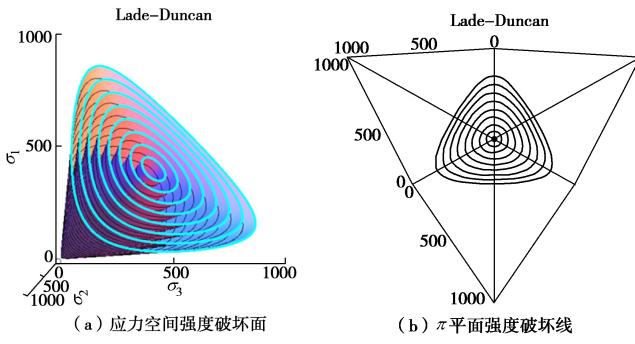
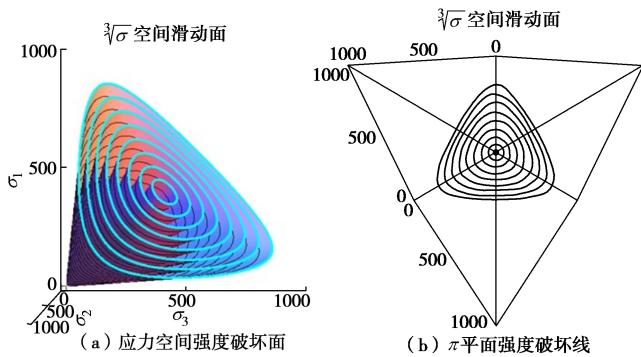


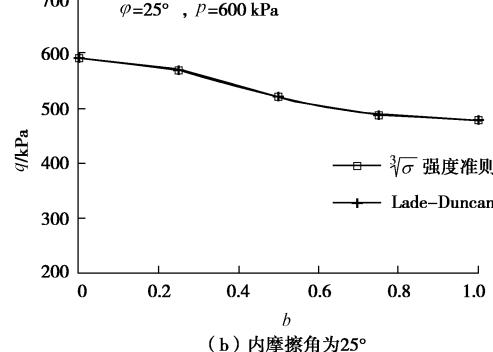
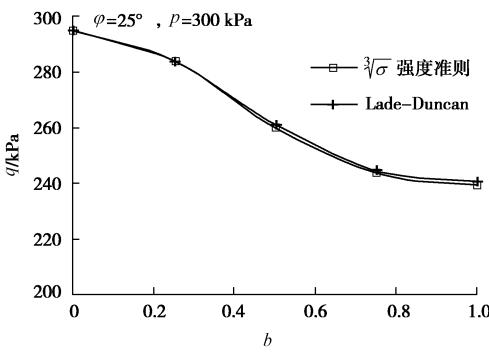
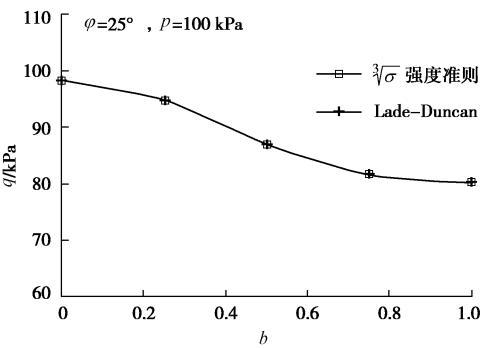
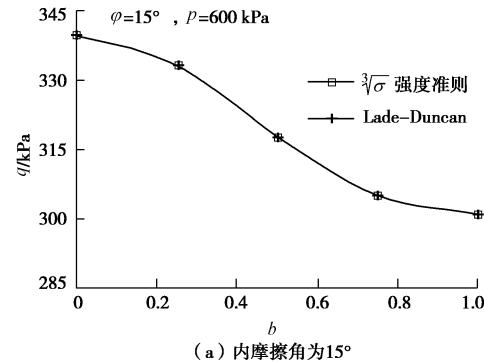
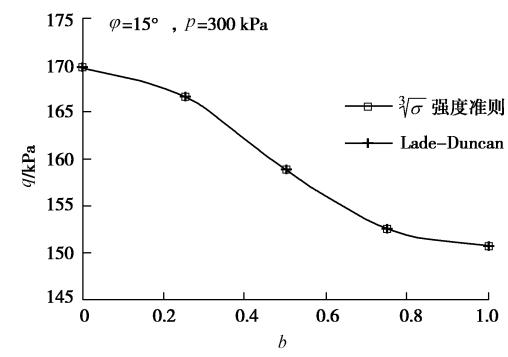
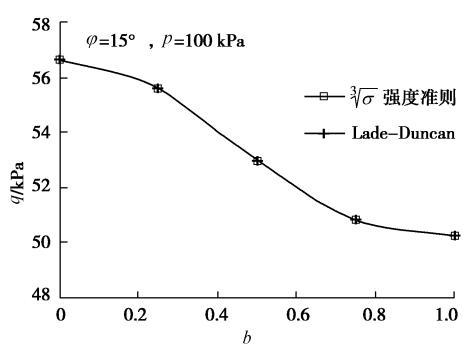
图 9 Lade-Duncan 强度准则在应力空间的强度破坏面

Fig. 9 Change of failure surfaces of Lade-Duncan criterion

依据  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面强度准则, 也可得到主应力空间和  $\pi$  平面上的强度破坏面和强度破坏线。当土的内摩擦角  $\varphi$  分别为  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $35^\circ$ ,  $40^\circ$  时, 依据  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面强度准则, 在主应力空间和  $\pi$  平面上, 可得由内向外依次增大的强度面和强度线, 如图 10 所示。

图 10 土的  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面强度准则的破坏面Fig. 10  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatial mobilized plane for strength failure criterion

依据  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面强度准则和 Lade-Duncan 准则, 可以考察不同球应力  $\pi$  平面上不同内摩擦角  $\varphi$  土的抗剪强度随中主应力比  $b$  值的变化, 比较两者抗剪强度的差异。如图 11 所示, 表明  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面强度准则和 Lade-Duncan 准则确定的抗剪强度近似相同, 揭示 Lade-Duncan 准则的空间滑动面接近于  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面。

(b) 内摩擦角为  $25^\circ$

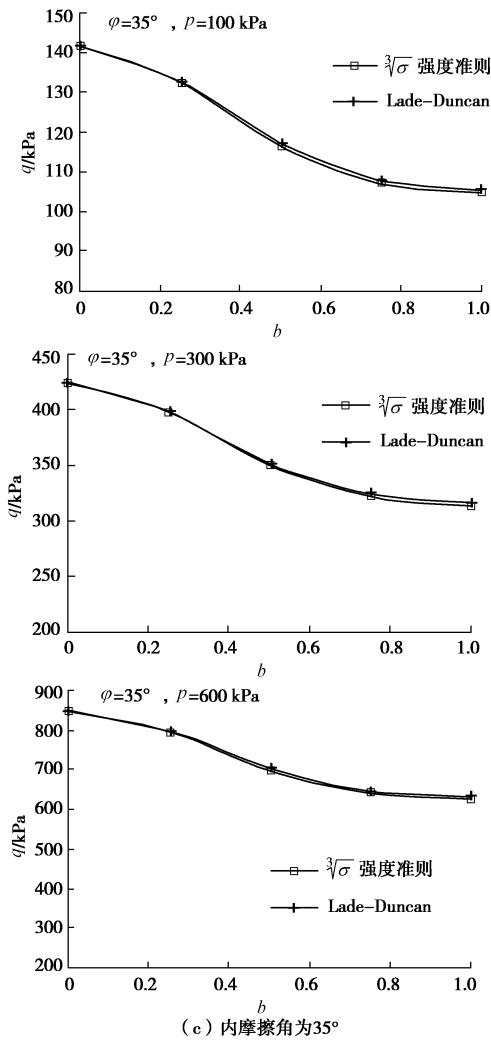
图 11  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面强度准则和 Lade-Duncan 准则的比较

Fig. 11 Comparison between  $\sqrt[3]{\sigma}$  special mobilization plane criterion and Lade-Duncan criterion

## 5 $\sqrt[3]{\sigma}$ 空间滑动面强度准则的黄土真三轴试验验证

黄土具有显著的结构性, 其强度变化规律与结构性有密切的关系<sup>[8-9]</sup>。随着黄土的结构性丧失, 黄土体的强度稳定性也会降低, 甚至会导致失稳破坏<sup>[10-11]</sup>。邢义川等<sup>[12]</sup>通过黄土的真三轴试验, 揭示黄土强度破坏面在  $\pi$  平面上位于 M-C 强度线外侧, 建立了  $\pi$  平面上拟合强度的形函数及剪切强度与平均球应力呈正比的强度准则。本文利用西安理工大学新研制的真三轴仪<sup>[13]</sup>, 进行了不同黄土的固结排水剪切真三轴试验。不同黄土的基本物性指标如表 1 所示。真三轴试验控制的 3 个围压分别为 100, 200, 300 kPa, 控制的中主应力比值分别为 0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 如表 2 所示。试验中, 首先在一定固结围压下等向压缩完成固结, 然后在一定中主应力比  $b$  值条件下进行排水真三轴压缩剪切, 直至试样破坏。

表 1 黄土基本物性指标

Table 1 Basic physical indexes of loess

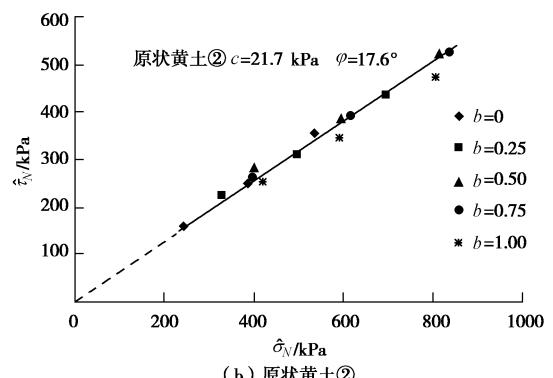
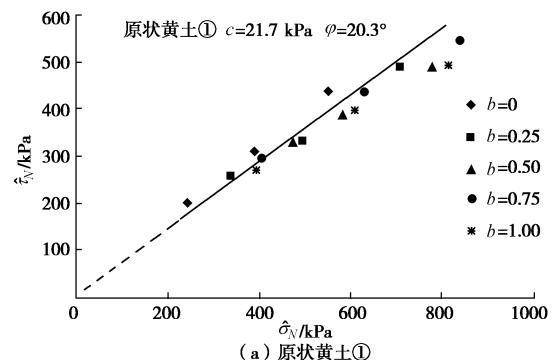
黄土类别	含水率/%	土粒比重	干密度/(g·cm <sup>-3</sup> )	液限/%	塑限/%
原状黄土①	5.0	2.70	1.273	35.3	21.9
原状黄土②	10.0	2.71	1.273	35.3	21.9
原状黄土③	14.2	2.70	1.55	37.8	22.6
原状黄土④	24.2	2.70	1.65	40.0	23.0

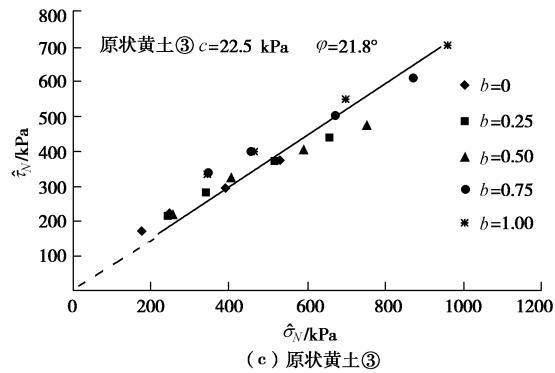
表 2 黄土真三轴试验的固结围压和中主应力比值

Table 2 Confining pressures and principal stress coefficients for true triaxial tests on intact loess

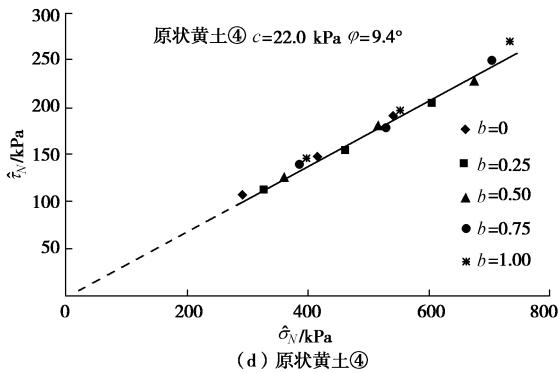
黄土类别	围压 $\sigma_3$ /kPa	中主应力比 $b$
原状黄土①	100, 200, 300	0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00
原状黄土②	100, 200, 300	0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00
原状黄土③	100, 200, 300	0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00
原状黄土④	100, 200, 300	0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00

依据不同原状黄土的真三轴试验结果, 在空间滑动面上分析剪应力和法向应力的关系曲线, 如图 12 所示, 分别给出了 4 种原状黄土在空间滑动面上的抗剪应力和法向应力的关系。表明 4 种原状黄土在空间面上的应力关系线性规律均体现了较好的关系, 验证了该空间滑动面上剪应力与正应力之间的线性关系。





(c) 原状黄土③

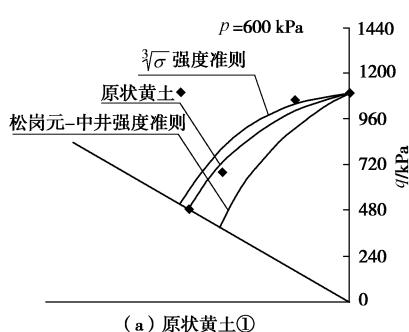


(d) 原状黄土④

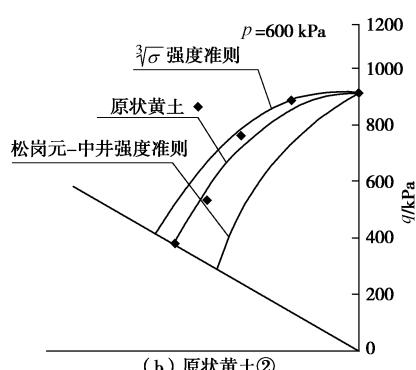
图 12  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面上抗剪应力和法向应力的关系Fig. 12 Stress curves on  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatially mobilized plane

图 13 比较分析  $\pi$  平面上各种原状黄土强度破坏时真三轴试验结果和强度准则破环线, 给出了平均球应力为 600 kPa 的比较结果。表明各种原状黄土在  $\pi$  平面上的强度破坏点与该强度准则的破坏线基本一致。

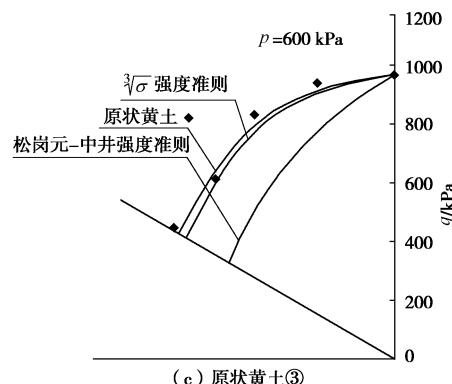
由此可见,  $\sqrt[3]{\sigma}$  动态空间滑动面强度准则与 4 种原状黄土真三轴测试强度具有良好的一致性。验证了该强度准则的合理性与可靠性。



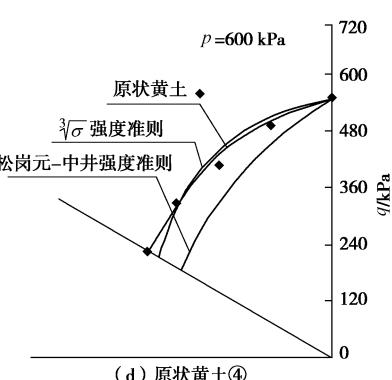
(a) 原状黄土①



(b) 原状黄土②



(c) 原状黄土③



(d) 原状黄土④

图 13  $\pi$  平面上黄土的真三轴试验结果与强度准则的对比Fig. 13 Comparison between  $\sqrt[3]{\sigma}$  spatially mobilized plane strength criterion and measured results by true triaxial tests on loess on  $\pi$  plane

## 6 结 论

(1) 土单元大、中、小主应力轴分别由  $k\sqrt[3]{\sigma_1}$ ,  $k\sqrt[3]{\sigma_2}$ ,  $k\sqrt[3]{\sigma_3}$  确定的交点, 构成了一个空间平面, 将其视为土单元剪切破坏的滑动面, 称为  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面。

(2) 依据  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面上剪应力与正应力比为常数的关系, 建立了相应的强度准则, 称为  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面强度准则。该强度准则在应力空间中描述的强度破坏面为  $\pi$  平面上呈曲边三角形形态的光滑锥面。它位于 Mohr-Coulomb 棱锥面和 Matsouka-Nakai 准则光滑三角形锥面的外侧, Drucker-Prager 准则圆锥面内侧。与 Lade-Duncan 准则在应力空间描述的曲边三角形光滑锥面的形态近似一致。

(3) 不同  $\pi$  平面上, Lade-Duncan 准则和  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面准则确定的抗剪强度随中轴应力比  $b$  值的变化相同, 表明 Lade-Duncan 准则  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面准则本质上是近似相同的; Lade-Duncan 强度准则近似地是  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面上剪应力比为常数的关系准则, 揭示了其物理本质。

(4) 将  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面准则推广到黏性土, 通过

原状黄土的真三轴试验结果, 验证了  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面剪应力和正应力之间的线性关系; 在  $\pi$  平面上,  $\sqrt[3]{\sigma}$  空间滑动面准则的强度线与黄土真三轴试验测试强度的结果一致, 论证了该强度准则描述黄土强度规律的适用性、合理性和可靠性。

### 参考文献:

- [1] MOHR O. Abhandlungen aus den gebiete der technischen mechanik[M]. 3rd ed. Verlag von Wilhelm: Ernst & Sohn, 1928.
- [2] DRCKER D C, PRAGER W. Soil mechanics and plastic analysis for limit design[J]. Quart Appl Mech, 1952, **10**: 157 - 165.
- [3] MATSUOKA H, NAKAI T. Stress-deformation and strength characteristics of soil under three difference principal stresses[J]. Proc of Japan Society of Civil Engineers, 1974, **232**: 59 - 70.
- [4] LADE P V, DUNCAN J M. Cubical triaxial tests on cohesionless soils[J]. Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 1973, **99**(10): 793 - 812.
- [5] 邵生俊, 许萍, 陈昌禄. 土的剪切空间滑动面分析及各向异性强度准则研究[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(3): 422 - 435. (SHAO Sheng-jun, XU Ping, CHEN Chang-lu. Several shear spatially mobilized planes and anisotropic strength criteria of soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(3): 422 - 435. (in Chinese))
- [6] YU M H, HE L N. A new model and theory on yield and failure of materials under the complex stress state[J]. Mechanical Behavior of Materials, 1992(6): 841 - 846.
- [7] 姚仰平, 路德春, 周安楠, 等. 广义非线性强度理论及其变换应力空间[J]. 中国科学(E辑), 2004, **34**(11): 1283 - 1299. (YAO Yang-ping, LU De-chun, ZHOU An-nan, et al. The generalized nonlinear strength theory and transformed stress space[J]. Science in China (Ser E), 2004, **34**(11): 1283 - 1299. (in Chinese))
- [8] 陈昌禄, 邵生俊, 罗爱忠, 等. 结构性对原状黄土强度影响规律的真三轴试验研究[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(12): 2322 - 2327. (CHEN Chang-lu, SHAO Sheng-jun, LUO Ai-zhong, et al. The structural effects of intact loess strength under the true triaxial test[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(12): 2322 - 2327. (in Chinese))
- [9] 邵生俊, 邓国华. 原状黄土的结构性强度特性及其在黄土隧道围岩压力分析中的应用[J]. 土木工程学报, 2008, **41**(11): 93 - 98. (SHAO Sheng-jun, DENG Guo-hua. The strength characteristics of loess with different structures and its application in analyzing the earth pressure on loess tunnel[J]. China Civil Engineering Journal, 2008, **41**(11): 93 - 98. (in Chinese))
- [10] 陈昌禄, 邵生俊, 邓国华. 土的结构性参数与强度的关系及其在边坡稳定性分析中的应用[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2010, **41**(1): 328 - 334. (CHEN Chang-lu, SHAO Sheng-jun, DENG Guo-hua. Relationship between soil structural parameters and strength and its application in slope stability analysis[J]. Journal of Central South University (Natural Science), 2010, **41**(1): 328 - 334. (in Chinese))
- [11] 陈昌禄, 邵生俊, 余芳涛. 土结构性变化对开挖边坡稳定性的影响分析[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(12): 1938 - 1944. (CHEN Chang-lu, SHAO Sheng-jun, SHE fang-tao. Impact of structural change of soils on stability in slope excavation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(12): 1938 - 1944. (in Chinese))
- [12] 邢义川, 刘祖典, 郑颖人. 黄土的破坏条件[J]. 水力学报, 1992, **37**(1): 13 - 18. (XING Yi-chuan, LIU Zu-dian, ZHENG Ying-ren. A failure criterion of loess[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1992, **37**(1): 13 - 18. (in Chinese))
- [13] 邵生俊, 罗爱忠, 邓国华, 等. 一种新型真三轴仪的研制与开发[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(8): 1172 - 1179. (SHAO Sheng-jun, LUO Ai-zhong, DENG Guo-hua, et al. Development of a new true tri-axial apparatus[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **31**(8): 1172 - 1179. (in Chinese))