

DOI: 10.11779/CJGE201503002

# 基于应变路径法的黏土中水平受荷桩 $p-y$ 曲线

黄茂松<sup>1, 2</sup>, 俞 剑<sup>1, 2</sup>, 张陈蓉<sup>1, 2</sup>

(1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

**摘 要:** 水平桩的  $p-y$  曲线大多是基于试验数据 (API 规范, 双曲线), 旨在从理论出发推导桩侧土体的  $p-y$  曲线。首先, 推导了与上限解等价的分步弹性加载理论, 并结合刚性圆盘在环状弹性介质中受水平力作用下的弹性力学解以研究桩身水平位移和桩周平均剪应变间的关系; 再应用该平均剪应变和土体的双曲线应力应变关系建立联系以得到桩周土体在加载过程中的平均屈服应力即已发挥的土体强度; 以此确立二维情况下桩身位移和桩周土反力的关系即  $p-y$  骨干曲线。再进一步根据三维的桩侧初始地基模量和桩侧极限承载力, 将其推广至三维。该  $p-y$  曲线的优点在于可以考虑土体应力应变关系、桩身刚度和长细比对  $p-y$  曲线的影响。最后, 将本文  $p-y$  曲线和传统  $p-y$  曲线分别与工程实例以及有限元结果进行对比, 并指出传统  $p-y$  曲线的不足及恰当的使用范围。

**关键词:** 水平受荷桩; 软黏土;  $p-y$  曲线; 应力应变关系; 应变路径法

中图分类号: TU44

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2015)03-0400-10

**作者简介:** 黄茂松 (1965 - ), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 从事岩土工程方面的科研和教学工作。E-mail: mshuang@tongji.edu.cn。

## $p-y$ curves of laterally loaded piles in clay based on strain path approach

HUANG Mao-song<sup>1, 2</sup>, YU Jian<sup>1, 2</sup>, ZHANG Chen-rong<sup>1, 2</sup>

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:**  $p-y$  curves of lateral reaction of piles can be found in the literatures, most of which are based on experimental data (such as API, hyperbolic curve) and few on analytical solutions. A load transfer function derived from the theoretical analysis is presented. First, a subsection elastic loading theory equivalent to the upper bound analysis is derived. Based on this method, a plane-strain solution for a circular section pile in a ringed circular elastic medium is given to study the relation between horizontal displacements and an average plastic strain of the soils around a pile in undrained behavior. This average strain will employ the stress-strain behavior of the soils as established from the triaxial tests so that a new two-dimensional  $p-y$  curve is developed. Then, the initial soil-pile interaction stiffness and the ultimate unit resistance are presented considering the three-dimensional effect, and it can be extended to analyze the three-dimensional lateral reaction of piles. The advantage of the  $p-y$  curve is that it is capable of taking into account the effect of change in soils and pile properties on the resulting  $p-y$  curves. Finally, a specific numerical application of the results is made, and the solutions from this  $p-y$  curve and other conventional methods are verified by comparing with the data from field tests and finite element methods, clearly stating the deficiency and the corresponding ranges of application.

**Key words:** laterally loaded pile; soft clay;  $p-y$  curve; stress-strain relationship; strain path approach

## 0 引 言

单桩在承受水平荷载作用下的受力特性是岩土工程中的一项目传统课题。线弹性分析和非线性分析是该课题较为常见的两个分支, 其中线弹性简化分析方法以 Poulos 等<sup>[1]</sup>、Randolph<sup>[2]</sup>、Banerjee 等<sup>[3]</sup>最具代表性, 但是这类方法要求能寻找到与桩身位移相适应的土体割线模量, 如图 1 所示, 随着桩身位移的发展, 桩周土体中的应变在不断累计, 从而要求采用与应变程度

相适应的模量, 因此线弹性简化分析方法依赖于对割线模量的估计。

在非线性的简化分析方法中以  $p-y$  曲线方法最为流行, 它是假设沿桩身分布着一系列非线性土弹簧, 土弹簧的刚度与桩土间的位移相关。较为常用的  $p-y$

基金项目: 国家 973 计划课题 (2013CB036304); 国家自然科学基金项目 (51378392); 教育部博士点基金项目 (20110072110008)

收稿日期: 2014-07-14

曲线有双曲线形式 (Georgiadis 等<sup>[4]</sup>) 和在 Matlock<sup>[5]</sup> 基础上修正而来的 API 规范<sup>[6]</sup>推荐的形式两种。

API 规范<sup>[6]</sup>的骨干曲线如下:

$$\frac{p}{p_u} = 0.5 \left( \frac{y}{y_c} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (1)$$

式中,  $p$  为桩侧土反力,  $y$  为桩身水平位移,  $y_c = 2.5\varepsilon_{50}D$ ,  $\varepsilon_{50}$  为土样在室内不固结不排水压缩试验中, 应力应变曲线上与二分之一强度值对应的轴向应变,  $p_u$  为桩截面所在深度处的侧向极限承载力:

$$p_u = Ns_u D, \quad (2)$$

其中,  $N$  为桩侧极限承载力系数:

$$N = \begin{cases} 3 + \gamma z / s_u + Jz / D & (z < z_R) \\ 9 & (z \geq z_R) \end{cases}.$$

式中  $s_u$  为不排水抗剪强度;  $D$  为桩直径;  $\gamma$  为土体重度;  $z$  为桩截面深度;  $J$  为无量纲经验系数, 一般取  $0.25 \sim 0.5$ ;  $z_R$  为桩侧楔形体临界深度  $z_R = 6D / (\gamma D / s_u + J)$ ; API 规范则应用多段线逼近上述曲线, 以避免出现在使用该曲线时初始刚度无限大而造成计算不便。它以土体应力应变曲线中  $\varepsilon_{50}$  为  $p-y$  曲线的关键控制点, 以保证其合理性。但由于使用了幂函数的形式导致其在形状上过于固定, 通常会高估土体反力, 它的适用范围将在后文中进一步探讨。

Georgiadis 等<sup>[4]</sup>的双曲线型  $p-y$  骨干曲线如下:

$$\frac{p}{p_u} = \frac{y/p_u}{1/k_i + y/p_u}, \quad (3)$$

式中,  $k_i$  为桩侧初始反力模量。双曲线型  $p-y$  曲线因为其形式简单而受到广泛应用, 但其终究是对试验现象的总结, 而非直接从土体应力应变关系推导而来。在下文中也会详细阐述其不合理之处。

Klar<sup>[7]</sup>曾通过土体的应力应变关系推导了深层二维情况  $p-y$  曲线 (MSD 法)。但其通过极限分析上限法得到的桩周应变值估算严重偏大导致其成果仅作为理论上的探讨而无法用于实践。Ashour 等<sup>[8]</sup>通过极限平衡法构造桩周土体的楔形体变形模式以估算桩周土体应变, 并与土体应力应变相联系以建立了一种较为可靠的水平桩分析方法 (SW 法), 然而该方法较为复杂, 且较之  $p-y$  曲线方法在工程界也缺乏广泛的认同性, 更不适合推广至群桩的分析。Klar<sup>[7]</sup>和 Ashour 等<sup>[8]</sup>这两种方法的本质是采用现有方法估算桩周应变在加载过程中的发展, 并结合应变路径法的概念, 与土体的应力应变关系建立联系, 以得到合理的  $p-y$  曲线。

本文为了克服现有  $p-y$  曲线中的不足, 先通过推广极限分析上限方法以获得更为合理的桩周平均剪应变; 通过该剪应变和土体应力-应变关系, 用上限法计算桩身侧向变形过程中该位移所对应的承载力, 并

以此推导解析形式的  $p-y$  骨干曲线。所以该  $p-y$  曲线具有满足塑性上限理论和符合土体应力应变关系的优点。在第2节中将与上述常用  $p-y$  曲线进行对比, 说明各自的合理使用范围。

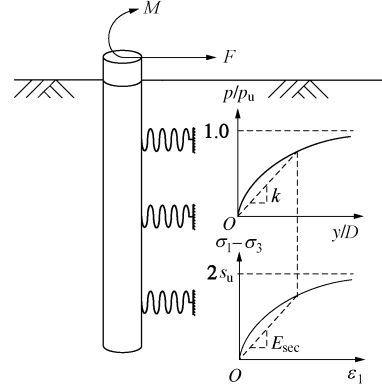


图1 问题代表性示意图

Fig. 1 Schematic representation of problem

## 1 分析方法

塑性上限定理: 如果假设的相容塑性机构  $\varepsilon_{ij}^{p*}$  和  $\dot{u}_i^{p*}$  在  $S$  上满足位移边界条件  $\dot{u}_i^{p*} = 0$ , 则实际的极限荷载  $T_i^c$  必定小于或者等于由内部耗损功率所确定的荷载  $T_i^*$ ; 具体可以表示为

$$\int T_i^c \dot{u}_i^{p*} dS + \int F_i^c \dot{u}_i^{p*} dV \leq \int \sigma_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^{p*} dV = \int T_i^* \dot{u}_i^{p*} dS + \int F_i^c \dot{u}_i^{p*} dV, \quad (4)$$

式中,  $V$  为材料所占据的体积域,  $F_i^c$  为实际的重力荷载,  $\sigma_{ij}^p$  为材料极限荷载下的应力状态。

Shield 等<sup>[9]</sup>证明 Tresca 准则下在屈服面上的点有以下关系:

$$\sigma_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^{p*} = \sigma_1 \dot{\varepsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\varepsilon}_2 + \sigma_3 \dot{\varepsilon}_3 = 2c |\dot{\varepsilon}_{\max}|, \quad (5)$$

式中,  $c$  是屈服强度。对于传统的极限分析上限方法, 通过将式 (5) 代入式 (4) 得到

$$\int \sigma_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^{p*} dV = \int_V 2c |\dot{\varepsilon}_{\max}| dV = \int T_i^* \dot{u}_i^{p*} dS + \int F_i^c \dot{u}_i^{p*} dV, \quad (6)$$

并构造相容的应变场  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p*}$  和速度场  $\dot{u}_i^{p*}$ , 以得到极限承载力  $T_i^*$ 。Randolph 等<sup>[10]</sup>、Martin 等<sup>[11]</sup>均以此思路求得桩的极限承载力。

为了能够模拟问题的整个加载过程, Osman 等<sup>[12]</sup>通过引入假定  $\delta u \propto \dot{u}$  提出了 MSD 法, 将式 (6) 改写为

$$\delta E = \int \sigma_{ij}^p \delta \varepsilon_{ij}^* dV = \int_V 2c_m(\varepsilon_s) \delta \varepsilon_{\max} dV = \int T_i^* \delta u_i^* dS + \int F_i^c \delta u_i^* dV, \quad (7)$$

式中,  $c_m(\varepsilon_s)$  是与  $\varepsilon_s$  相应的屈服强度,  $\varepsilon_s$  在平面应变时取  $|\varepsilon_1 - \varepsilon_3|$ ,  $\delta \varepsilon_{\max} = \max(|\delta \varepsilon_1|, |\delta \varepsilon_2|, |\delta \varepsilon_3|)$ , 在无体变

的平面应变时取  $|\delta\epsilon_1|$  或  $|\delta\epsilon_3|$ 。对于双曲线应力 - 应变关系可以写成

$$c_m(\epsilon_s) = \frac{G_s \epsilon_s}{G_s \epsilon_s / s_u + 1}, \quad (8)$$

然后通过构造应变场  $\delta\epsilon_{ij}^*$  和  $\delta u_i^*$ , 得到不断累积的剪应变  $\epsilon_s$  ( $\epsilon_s$  是通过增加  $\delta u_i^*$ , 计算相应的  $\delta\epsilon_{ij}^*$  并累加得到), 并以此模拟屈服面不断扩大的过程从而得到相应的承载力  $T_i^*$ 。  $G_s$  为土体剪切弹性模量。

Osman 等<sup>[12]</sup>对传统的 MSD 法在具体应用时通常在个体积域  $V$  内运用相同的平均剪应变  $\epsilon_s$ :

$$\epsilon_{s,avg} = \frac{\int |\epsilon_1 - \epsilon_3| dV}{\int dV}, \quad (9)$$

并以此得到  $c_m$ , 同时认为所有材料点均处于该屈服面上。显然, 这样会得到一个偏大的上限解及位移 - 荷载关系曲线, 因为体积域  $V$  内并非所有材料点的  $\epsilon_s$  都相同。(例如: 在 Sloan<sup>[13]</sup>的极限分析有限元中: 仅在块体的边缘达到屈服并滑动, 而块体内部不存在耗能。)并且该方法依赖于对应变场的优化。针对上述不足, 本文做如下改进, 把式 (8) 代入式 (7), 并按以下过程改写

$$\delta E = \int_V 2 \frac{G_s \epsilon_s}{G_s \epsilon_s / s_u + 1} \delta \epsilon_{max} dV = \int_V 2 \frac{G_s}{G_s \epsilon_s / s_u + 1} |\epsilon_1^* \delta \epsilon_1^* + \epsilon_3^* \delta \epsilon_3^*| dV, \quad (10)$$

若仅考虑第一个加载步, 即  $\epsilon_{ij}^* = \delta\epsilon_{ij}^*$ , 并考虑虚功方程外力功部分, 即式 (4) 后半部分, 有

$$\begin{aligned} \delta E &= \int_V 2 \frac{G_s}{G_s \epsilon_s / s_u + 1} (\delta \epsilon_1^{*2} + \delta \epsilon_3^{*2}) dV \\ &= \int_V 2G[\epsilon_s(\delta\epsilon_{ij}^*)] \delta \epsilon_{ij}^* \delta \epsilon_{ij}^* dV = \int T_i^* \delta u_i^* dS + \int F_i^c \delta u_i^* dV, \end{aligned} \quad (11)$$

若将  $G[\epsilon_s(\delta\epsilon_{ij}^*)] = G_s / (G_s \epsilon_s / s_u + 1)$  视为弹性剪切模量, 那么上式是典型的弹性形式的虚功方程。当然这只是数学上的处理, 将求解极限分析上限解等效为求解以  $G(\epsilon_s)$  为等效剪切弹性模量且  $\nu = 0.5$  的弹性问题, 并且若单步加载位移  $\delta u_i^*$  足够大, 则该弹性问题的最终承载力是原问题的一个上限解。

作为对上述理论的应用, 可以利用与原问题相应的弹性解作为基础去构造应变场  $\delta\epsilon_{ij}^*$ , 对于传统的极限分析不存在弹性模量的概念, 但是经过数学转化后, 每个加载步都存在等效的剪切模量  $G(\epsilon_s)$ , 这样不但可以通过能量去求解本加载步下的  $T_i^*$ , 也可以结合弹性本构用平衡方程求解  $T_i^*$ , 以便于迭代得到最小的上限解, 无需优化过程。

### 1.1 构造弹性应变场——层状弹性解

为了利用上述推导的理论, 需要一个原问题所对

应的弹性解。但又如前文所述, 传统的 MSD 法是对整个体积域  $V$  内的修正剪应变进行平均, 如果为了避免该不足, 就需要一个能够分区域求解的弹性解, 以针对不同区域采用不同的剪应变。

首先, 发现 Baguelin 等<sup>[14]</sup>在研究桩土接触刚度时, 得到了二维桩截面在外力  $P$  作用下周围均匀弹性体在平面应变状态下的应力和位移解答, 该模型考虑了桩与弹性体完全胶结的情况, 桩的半径为  $r_0$ , 用以模拟土体的弹性体边界半径为  $R$ 。本文在 Baguelin 等<sup>[14]</sup>的基础上, 推导 (如图 2 所示) 层状圆环弹性解, 并同时考虑桩与土体完全胶结 (full bonding) 和光滑接触 (smooth) 两种极端情况。

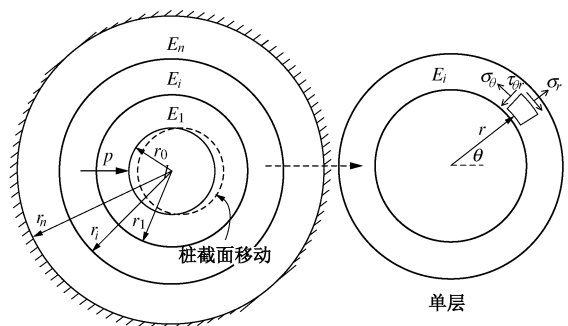


图 2 环状弹性介质模型

Fig. 2 Ringed circular elastic medium

利用 Airy 应力函数可得第  $i$  层应力通解为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left( \frac{D_i}{r} - \frac{2B_i}{r^3} + 2A_i r \right) \cos \theta, \\ \sigma_\theta &= \left( \frac{C_i}{r} + \frac{2B_i}{r^3} + 6A_i r \right) \cos \theta, \\ \tau_{\theta r} &= \left( \frac{C_i}{r} - \frac{2B_i}{r^3} + 2A_i r \right) \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

通过积分应变可得第  $i$  层位移通解为

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{\cos \theta}{E_i} [(D_i - C_i \nu) \ln r + (1 + \nu) \frac{B_i}{r^2} + (1 - 3\nu) A_i r^2 + E_i L_i], \\ u_\theta &= \frac{\sin \theta}{E_i} [(C_i - D_i \nu) - (D_i - C_i \nu) \ln r + (1 + \nu) \frac{B_i}{r^2} + (5 + \nu) A_i r^2 - E_i L_i], \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中,  $E_i$  为  $i$  层的弹性模量,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  和  $L_i$  为常数, 由力和位移边界条件确定, 由于每层均为复联通体, 为了满足位移单值条件, 那么每层的  $C_i$  和  $D_i$  均需满足  $C_i = \frac{p}{4\pi} \frac{1-2\nu}{1-\nu}$  和  $D_i = -\frac{p}{4\pi} \frac{3-2\nu}{1-\nu}$ 。其余常数根据层间连续条件和边界条件用下式确定:

$$[K]\{X\} = \{Y\}, \quad (14)$$

式中,



$$[K] = \begin{bmatrix} (6-2\nu)r_0^2 & 2r_0^2 & \frac{2(1+\nu)}{r_0^2} & -\frac{2}{r_0^2} & 0 \\ \frac{(5+\nu)r_1^2}{E_1} & \frac{(1+\nu)}{E_1 r_1^2} & -1 & -\frac{(5+\nu)r_1^2}{E_i} & -\frac{(1+\nu)}{E_i r_1^2} & 1 \\ \frac{(1-3\nu)r_1^2}{E_1} & \frac{(1+\nu)}{E_1 r_1^2} & 1 & -\frac{(1-3\nu)r_1^2}{E_i} & -\frac{(1+\nu)}{E_i r_1^2} & -1 \\ 2r_1^2 & -\frac{2}{r_1^2} & 0 & -2r_1^2 & \frac{2}{r_1^2} & 0 \\ & & & \frac{(5+\nu)r_i^2}{E_i} & \frac{(1+\nu)}{E_i r_i^2} & -1 \\ & & & \frac{(1-3\nu)r_i^2}{E_i} & \frac{(1+\nu)}{E_i r_i^2} & 1 \\ & & & 2r_i^2 & -\frac{2}{r_i^2} & 0 \\ & & & & -\frac{(5+\nu)r_{i+1}^2}{E_{i+1}} & -\frac{(1+\nu)}{E_{i+1} r_{i+1}^2} & 1 \\ & & & & \frac{(1-3\nu)r_{i+1}^2}{E_{i+1}} & \frac{(1+\nu)}{E_{i+1} r_{i+1}^2} & -1 \\ & & & & 2r_{i+1}^2 & -\frac{2}{r_{i+1}^2} & 0 \\ & & & & & & \frac{(5+\nu)r_n^2}{E_n} & \frac{(1+\nu)}{E_n r_n^2} & -1 \\ & & & & & & \frac{(1-3\nu)r_n^2}{E_n} & \frac{(1+\nu)}{E_n r_n^2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{X\} = \{A_1 \quad B_1 \quad L_1 \quad \cdots \quad A_i \quad B_i \quad L_i \quad A_{i+1} \quad B_{i+1} \quad L_{i+1} \quad \cdots \quad A_n \quad B_n \quad L_n\}^T$$

$$\{Y\} = \left\{ \begin{array}{l} Dv - C \\ \frac{(C - Dv) - (D - Cv) \ln r_i}{E_i} - \frac{(C - Dv) - (D - Cv) \ln r_i}{E_i} \\ \frac{(D - Cv) \ln r_i}{E_i} - \frac{(D - Cv) \ln r_i}{E_i} \\ 0 \\ \frac{(C - Dv) - (D - Cv) \ln r_{i+1}}{E_{i+1}} - \frac{(C - Dv) - (D - Cv) \ln r_i}{E_i} \\ \frac{(D - Cv) \ln r_{i+1}}{E_{i+1}} - \frac{(D - Cv) \ln r_i}{E_i} \\ 0 \\ \frac{(C - Dv) - (D - Cv) \ln r_{i+1}}{E_{i+1}} - \frac{(C - Dv) - (D - Cv) \ln r_{i+1}}{E_i} \\ \frac{(D - Cv) \ln r_{i+1}}{E_{i+1}} - \frac{(D - Cv) \ln r_{i+1}}{E_i} \\ 0 \\ \frac{(D - Cv) \ln r_n - (C - Dv)}{E_n} \\ \frac{(Cv - D) \ln r_n}{E_n} \end{array} \right\}$$

和式 (13) 便可得到相应的应力和位移。

图 3 基于环状弹性介质解的完整和扰动区域模型

Fig. 3 Intact and disturbed zones based on elastic solution to ringed model

## 1.2 二维非线性桩土接触关系的上限加载分析方法

Nogami 等<sup>[15]</sup>在做水平桩动力非线性分析时认为桩周一定范围内土体呈现非线性, 而较远区域可近似认为处于弹性状态。所以, 如图 3, 本文将用刚环将土体分为两个区域, 在非线性区中又将土体分为  $n$

当取矩阵 $[K]$ 和列向量 $\{Y\}$ 中第一行中竖线左侧元素时, 所得常数为桩土完全胶结的情况; 取右侧元素则为桩土光滑接触。将计算得到的常数代入式(12)

和式 (13) 便可得到相应的应力和位移。

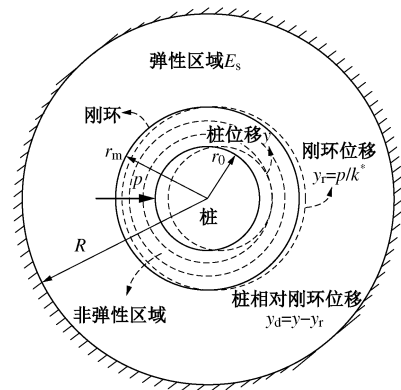


图 3 基于环状弹性介质解的完整和扰动区域模型

Fig. 3 Intact and disturbed zones based on elastic solution to ringed model

### 1.2 二维非线性桩土接触关系的上限加载分析方法

Nogami 等<sup>[15]</sup>在做水平桩动力非线性分析时认为桩周一定范围内土体呈现非线性, 而较远区域可近似认为处于弹性状态。所以, 如图 3, 本文将用刚环将土体分为两个区域。在非线性区中又将土体分为  $n$  层以区分桩对周围扰动程度的不同。这样处理的根本目的在于将传统  $p-y$  曲线中的初始桩土刚度、极限承载力和骨干曲线三要素分离。

首先根据 Baguelin 等<sup>[14]</sup>的研究成果及上节中推导的弹性解可知：桩土初始刚度取决于如图 3 所示的最外层边界，若边界无限大，则刚度趋向于零，反之则刚度增加。所以，这里所谓的外围弹性区及其范围，是由桩土初始刚度所决定的；而影响其初始刚度的因素又包括：桩截面埋深和桩土相对抗弯刚度等。因此，区分弹性区与非弹性区便是为了剥离桩土初始刚度这一综合因素对  $p-y$  曲线的影响。除了上述必要原因外，这样操作的合理性在于：在加载过程中，无论弹性区边界多大，非弹性区的非线性发展程度仅取决于当前的外荷载  $P$ ，而外边界的大小只影响非弹性区和弹性区间的相对位移  $y_r$ 。因此，可以抛开弹性区域而独立研究非弹性区域对于外荷载的相应。

如何合理地将非线性区域中混合着的极限承载力和骨干曲线这两个要素分离将在后文中交代。这里首先要介绍如何确定扰动区的半径。通过第一部分的推导可知，本文采用的加载过程得到的最终承载力是一个上限解，那么使得土反力最小便是扰动区半径确定的目标函数。从实际物理意义出发，这样做可以确保桩周土体所累积的应变是尽量少的并尽量合理的。

在加载过程中，具体到本问题每层的平均剪应变式 (9) 可写成

$$\varepsilon_{s,avg} = \frac{\int_{r_{i-1}}^{r_i} \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + 4\varepsilon_{\theta r}^2} dV}{\int_{r_{i-1}}^{r_i} dV} \quad (15)$$

在第一部分的推导中就已表明：有别于传统的 MSD 法，本文通过数学处理并引进等效模量  $G(\varepsilon_{s,avg})$  将一个原问题的上限分析过程转化为弹性加载问题并可以通过平衡方程迭代求解。以下是对上述理论具体应用时的位移加载分析过程：

通过增加扰动区内的层数，并求得相应层数下最小承载力所对应的扰动区半径。从而将计算结果列于表 1 中。从中可知层数  $n$  对与之相应的最小极限承载力影响很大，且随着层数的增大趋于稳定。桩身光滑可减少土体中剪应力的传递，因此结果稳定更快。其中  $n=1$ ，与 Osman 等<sup>[12]</sup>传统 MSD 法的结果一致。进过上述计算分析得到，完全胶结的情况最优半径为  $3.34r_0$  而光滑接触的情况则对应  $2.85r_0$  半径。

图 4 为扰动区内分为 100 层时加载初始和极限状态时所对应的速度场矢量图和标量云图；云图显示了矢量图速度的绝对值，从矢量图可以明显看出桩前后的土体运动的差异。扰动区的速度应当理解为扰动土始状态，扰动区相对弹性区是具有相对速度的，所以

表 1 最优半径

Table 1 Optimal radii

层数 $n$	完全胶结			光滑接触		
	$p_u/(Ns_uD)$	$r_n/r_0$	$\beta$	$p_u/(Ns_uD)$	$r_n/r_0$	$\beta$
1	14.525	2.85	1.30	10.060	2.40	1.35
10	13.505	3.00	1.08	10.040	2.85	0.90
60	12.916	3.24	0.86	10.040	2.85	0.90
100	12.839	3.34	0.80	10.040	2.85	0.90

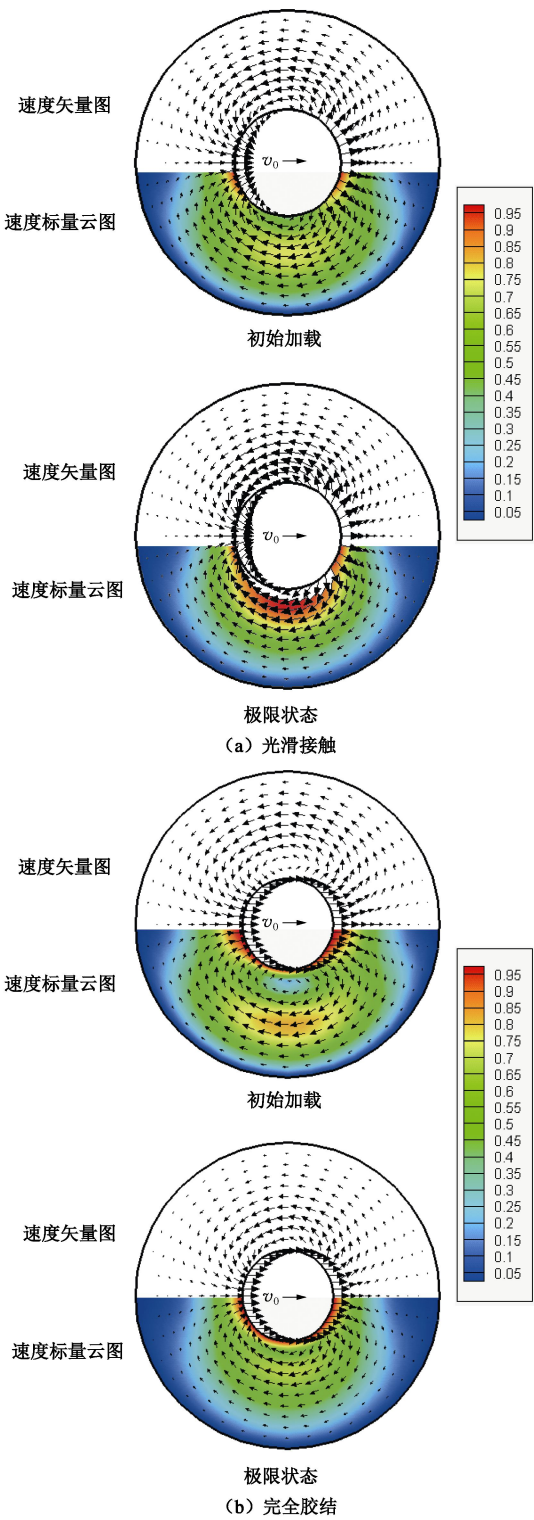


图 4 加载过程中非线性区速度场

Fig. 4 Speed fields in nonlinear zones in loading process

体相对于扰动区的速度而非绝对速度, 因为对于初若考虑该相对速度, 初始状态的绝对速度场并非流动状态; 而当该相对速度随着加载将趋于零, 此时则对应了图中塑性流动的极限状态。因此图中速度场是剥离弹性区影响后的结果。同时, 本方法也具有好的调整能力, 因为尽管扰动区本身设置为圆形, 但其内部的实际速度场分布却与 Martin 和 Randolph 极限分析结果是相似, 说明土体中的应变是合理的。且随着加载地进行, 速度场更集中于内部并不在变化, 这说明桩周土体的非线性完全发展并进入塑性流动状态。

在确定最优半径后, 需要得到扰动区内桩身位移和与之引起的扰动区平均剪应变间的关系; 因此定义扰动区的平均剪应变为

$$\bar{\varepsilon}_{s,avg} = \frac{\int_{r_0}^{r_n} \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + 4\varepsilon_{\theta r}^2} dV}{\int_{r_0}^{r_n} dV} = \beta \frac{y_d}{r_0}, \quad (16)$$

式中,  $y_d$  为桩相对扰动区的位移 (图 3),  $\beta$  为剪应变系数。图 5 显示了桩周扰动区域内平均剪应变随位移的发展。当位移大于 0.01 倍  $r_0$  时,  $\beta$  趋于稳定, 稳定值见于表 1。随着层数  $n$  的增加, 桩周的剪应变有明显降低, 但由于该分析是基于上限原理, 因此该剪应变只会趋近于或者等于实际值。

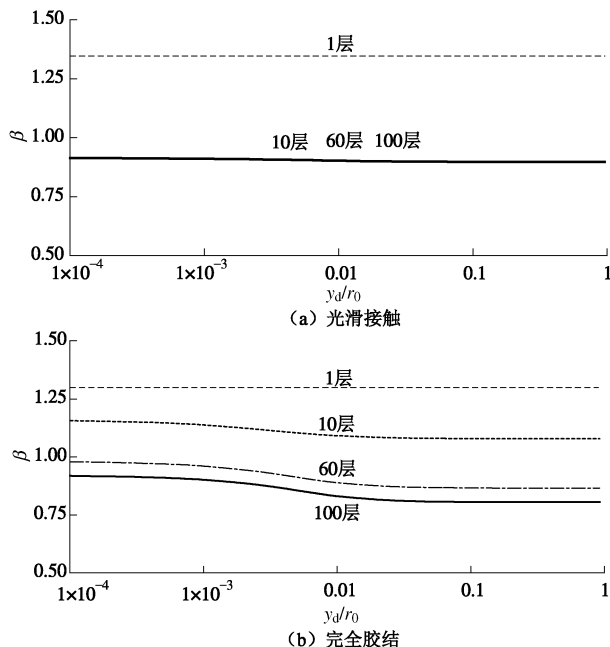


图 5 剪应变系数  $\beta$  的与桩位移的关系

Fig. 5 Relationship between  $\beta$  and pile displacement

Klar<sup>[7]</sup>采用以双曲线为硬化曲线的有限元计算了土体外边界为  $61.84r_0$  的二维  $p-y$  曲线, 将其结果以散点形式在图 6 中列出。其中曲线为本文利用已经确定的扰动区半径, 同时考虑外部弹性区 (如图 3) 应用上限加载分析结果的结果。本算例中的  $p-y$  曲线受

到了弹性区的影响, 因此并非纯粹的  $p-y$  骨干曲线。但图 6 意义在于: 对各  $p-y$  曲线与其相对应的极限承载力  $N_{2r_0s_u}$  进行归一化处理, 分离极限承载力对  $p-y$  曲线的影响。这样可以发现, 随着层数的增加, 本文的  $p-y$  曲线将从上限逼近实际的  $p-y$  曲线。并说明独立于弹性区所确定的扰动区半径是合理, 那么与之相对应的内部剪应变也应当是合理的。因此在下一小节中将利用该扰动区内的平均剪应变和桩身位移关系确定骨干曲线。

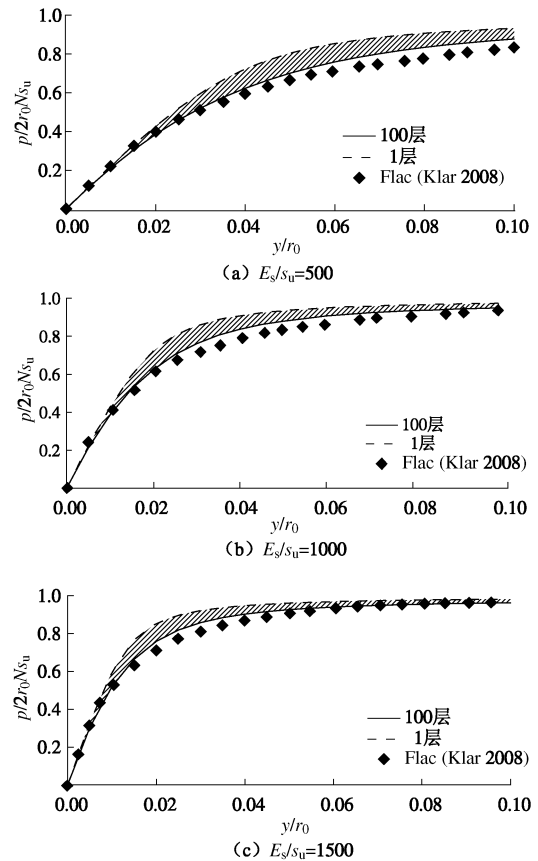


图 6 二维桩身  $p-y$  曲线

Fig. 6 Two-dimensional load transfer functions

## 2 $p-y$ 曲线的构造

Bransby<sup>[16]</sup>在用有限元研究桩身  $p-y$  曲线时发现, 桩周土体中竖向应变为中主应变, 而最大和最小主应变位于水平面内, 不同深度的桩周土体强度的发挥都取决于该水平面内的剪应变发展, 只是该水平面内剪应变发展速度是受到该深度处土体的初始刚度和极限承载力影响。正因如此, 第 1 节推导了不受弹性区影响的扰动区半径及其内部的平均剪应变  $\varepsilon_{s,avg}$ ; 并通过最后的算例说明可以将  $p-y$  曲线与其相对应的极限承载力  $p_u=N_{2r_0s_u}$  进行归一化, 以消除极限承载力对  $p-y$  骨干曲线的影响, 事实上该处理方法与 API 的处理方法是一致的, 但与 API 定义骨干曲线为指数形式有所不同, 本文采用如下形式定义骨干曲线:

$$\frac{p}{p_u} = \frac{c_m(\varepsilon_{s,avg})}{s_u}, \quad (17)$$

$c_m(\varepsilon_{s,avg})$  为桩侧土体相应于平均剪应变  $\varepsilon_{s,avg}$  的平均屈服应力, 具体表达式见式 (8)。上式的意义在于: 建立了桩周土体平均反力和桩周平均屈服应力 (即土体已发挥强度) 间的关系; 而桩周土体已发挥的强度与土体中已经累积的平均剪应变是密切相关的, 因此引入前文已建立的平均剪应变  $\varepsilon_{s,avg}$  和桩身相对扰动区位移  $y_d$  (图 3) 的关系 (式 16), 可得

$$\frac{p}{p_u} = \frac{c_m\left(\beta \frac{y_d}{r_0}\right)}{s_u}, \quad (18)$$

那么式 (18) 是排除了桩土初始刚度和极限承载力影响的  $p-y$  骨干曲线表达式。

在前文已经表明, 桩土初始刚度是一个综合因素的集合, 幸运的是已有较多文献对桩土初始刚度  $k_i$  的取值进行了研究, 本文的工作仅是将其自然地引入  $p-y$  骨干曲线中, 即引入扰动区相对弹性区的位移:

$$p = 2r_0 N c_m\left(\beta \frac{y_d}{r_0}\right) = 2r_0 N c_m\left(\beta \frac{y - \frac{p}{k^*}}{r_0}\right), \quad (19)$$

式中,  $k^*$  为扰动区 (刚环) 对于非扰动区的刚度,  $y$  为桩身的实际位移。将式 (19) 展开后得

$$p = r_0 N s_u + \frac{1.5 k^*}{\beta E_s} r_0 s_u + 0.5 k^* y - \sqrt{\left(r_0 N s_u + \frac{1.5 k^*}{\beta E_s} r_0 s_u + 0.5 k^* y\right)^2 - 2 k^* N r_0 s_u y}. \quad (20)$$

$$\text{通过求导可知初始刚度 } k_i = \left. \frac{dp}{dy} \right|_{y=0} = \frac{k^* \beta N E_s}{\beta N E_s + 1.5 k^*};$$

因此  $k^* = \frac{k_i \beta N E_s}{\beta N E_s - 1.5 k_i}$ , 令  $\alpha = \frac{k_i \beta N}{\beta N E_s - 1.5 k_i}$  上式改写为

$$p = r_0 N s_u + \frac{1.5}{\beta} \alpha r_0 s_u + 0.5 \alpha E_s y - \sqrt{\left(r_0 N s_u + \frac{1.5}{\beta} \alpha r_0 s_u + 0.5 \alpha E_s y\right)^2 - 2 \alpha E_s N r_0 s_u y}, \quad (21)$$

式 (21) 是本文  $p-y$  曲线的完整表达式。

后文的计算中, 极限承载力仍沿用 API 规范的推荐形式, 即式 (2); 初始刚度则是采用  $k_i$  从 Vesic<sup>[17]</sup> 模量修正而来的地基模量:

$$k_i = \begin{cases} \eta 7.5 \frac{(1-\nu)^2}{3-4\nu} \frac{E_s}{1-\nu^2} \sqrt{\frac{E_s D^4}{EI}} & (K_R \leq 10^{-2}) \\ \eta 7.5 \frac{(1-\nu)^2}{3-4\nu} \frac{E_s}{1-\nu^2} \sqrt{100 \left(\frac{D}{L}\right)^4} & (K_R > 10^{-2}) \end{cases}, \quad (22)$$

式中,

$$\eta = \int_{-L/2}^{-L/2} \frac{(1+\nu)}{E_s(1-\nu)} \left( \frac{6-8\nu}{R} + \frac{4}{3R^3} \right) dz / \int_0^L \frac{(1+\nu)}{E_s(1-\nu)} \left\{ \frac{6-8\nu}{R_1} + \frac{2}{R_2} + \frac{4}{3R_1^3} + \frac{4(3-4\nu)}{3R_2^3} + \frac{2zh}{R_2^3} \left( 2 - \frac{4}{R_2^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2+z+h} \left[ 2 - \frac{4}{3R_2(R_2+z+h)} \right] \right\} dz, \quad \text{其中, } R_1 = \sqrt{r_0^2 + (h-z)^2}, R_2 = \sqrt{r_0^2 + (h+z)^2}, R = \sqrt{r_0^2 + z^2}, K_R = \frac{EI}{E_s L^4}.$$

图 7 (a) 分别显示了 API 规范的极限承载力和修正 Vesic<sup>[17]</sup> 地基模量沿桩身的分布规律。这两个参数的引入, 使得  $p-y$  曲线 (式 (21)) 具有了三维效应, 因为这两个参数将直接影响桩周土体平均剪应变的发展程度, 从而影响不同深度  $p-y$  曲线的发展。图 7 (b) 显示了长径比为 10 的刚性桩埋置于不排水抗剪强度为 20 kPa、 $E_s/s_u=500$ 、重度为 8 kN/m<sup>3</sup> 土中不同深度截面处的  $p-y$  曲线示意图。

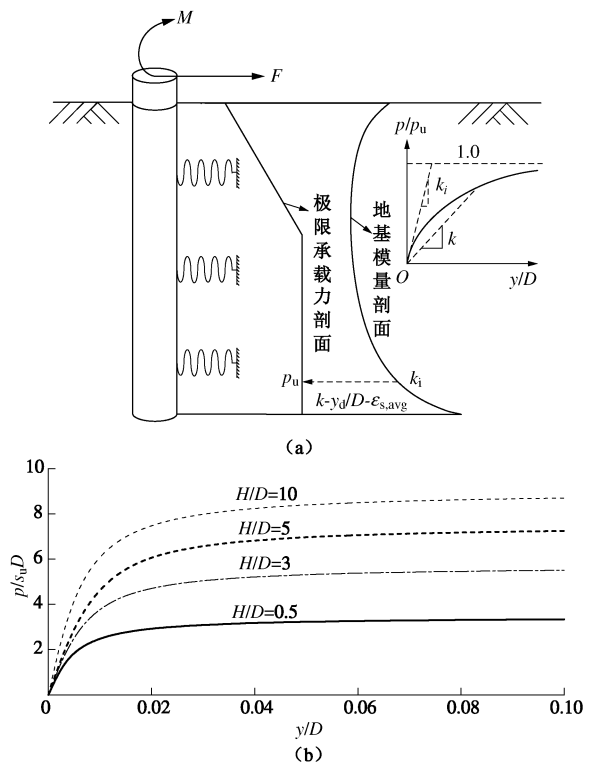


图 7 水平桩地基模量和极限承载力沿深度分布

Fig. 7 Profiles of ultimate bearing capacity and subgrade modulus

### 3 与有限元结果和原位试验对比

#### 3.1 与两种硬化规律的有限元对比

本文  $p-y$  曲线基于双曲线型土体应力应变关系, 但商业有限元通常为理想弹塑性, 与本文土体的应力应变关系不同, 所以这里采用商业有限元 ABAQUS



分别用两种土体本构模型：即理想弹塑性模型和双曲线硬化模型（如图8）。对直径为0.5 m，长度为20 m，抗弯刚度为 $8.9 \times 10^6 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ 的桩进行建模计算；土体不排水抗剪强度为100 kPa， $E_s/s_u=100$ ，泊松比0.495，土单元选用C3D8R并采用Tresca准则。桩土间界面采用为光滑。其中双曲线型硬化规律采用图8中虚线示出多折线方法进行模拟，多折线所对应的屈服应力和相应的塑性应变见表2。

表2 屈服应力及相应塑性应变

Table 2 Yield stresses and corresponding plastic strains					
$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} / \text{kPa}$	25.00	50.00	75.00	83.33	93.75
$\int d\varepsilon_s^p$	0.00167	0.0100	0.0450	0.0833	0.281

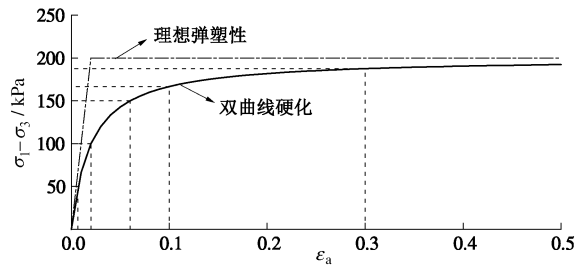
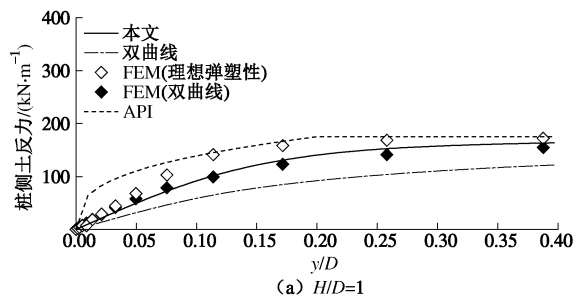


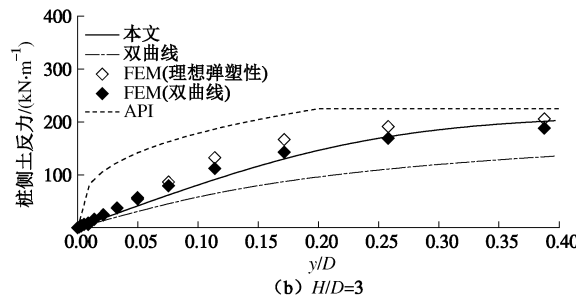
图8 硬化曲线

Fig. 8 Harding curves

采用Fan等<sup>[18]</sup>推荐方法从有限元结果中提取3个深度( $H/D=1, 3$ 和9)处的 $p-y$ 曲线，如图9所示。API规范方法中所需参数 $\varepsilon_{50}$ 采用Skempton<sup>[19]</sup>推荐方法计算。图中显示两种有限元间的的结果差异并不大，而本文方法所得的 $p-y$ 曲线更接近双曲线硬化方式所得到的有限元结果。而API规范则明显偏大，相反的是双曲线型的 $p-y$ 曲线则明显偏小。



(a)  $H/D=1$



(b)  $H/D=3$

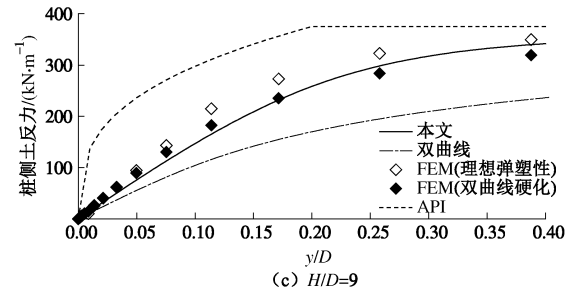


图9 桩身  $p-y$  曲线

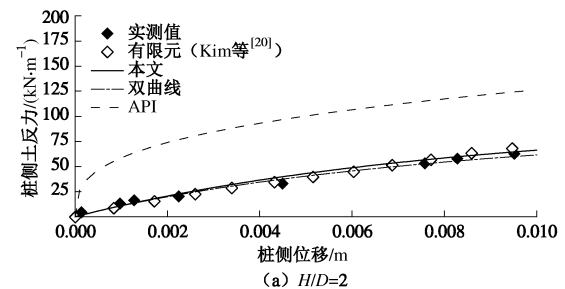
Fig. 9  $p-y$  curves of lateral piles

通过本算例说明API规范并非适合于所有情况。Poulos等<sup>[1]</sup>提出桩的柔度系数 $K_R$ ，通常在 $10^{-5} \sim 1$ 之间，当 $K_R > 10^{-2}$ 为刚性桩，小于该值为柔性桩。通过分析可知，API不能反映桩身刚性对 $p-y$ 曲线的影响。由于API规范拟合自Matlock<sup>[5]</sup>对一根极柔性桩的试验结果，而本算例 $K_R = 5.5 \times 10^{-3}$ 属于刚度适中的桩，因此API规范出现了明显的偏大。

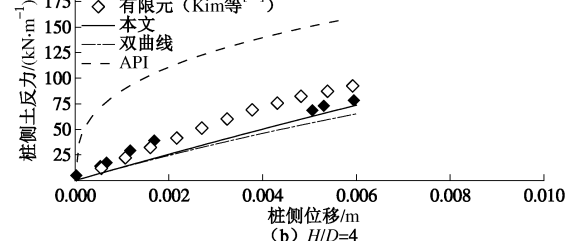
3.2 Incheon Bridge Site 现场试验对比

为了进一步说明桩身柔度对 $p-y$ 曲线的影响，这里选用Kim等<sup>[20]</sup>在Incheon bridge site进行的现场水平加载试验进行对比。该试验采用桩身直径为2.4 m，桩长为44.3 m，抗弯刚度为 $4.24 \times 10^7 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$ ， $K_R = 1.1 \times 10^{-3}$ ；土体不排水抗剪强度18 kPa， $E_s=10 \text{ MPa}$ ，土体饱和重度为 $17.5 \text{ kN/m}^3$ 。

该试验的最终加载位移仅为0.005倍的桩径，因此有利于很好地观察 $p-y$ 曲线的初始阶段，并且Kim等<sup>[20]</sup>也对该试验进行了有限元模拟。3.1节中的算例是对比整个加载过程中的 $p-y$ 曲线，双曲线在较大加载位移时严重偏低；而本算例则是对初始阶段的具体观察，两个深度的结果均呈现在图10中，从中发现由于API规范是对幂函数形式 $p-y$ 曲线的离散化，因此在初始阶段远远偏离了试验值和有限元结果。



(a)  $H/D=2$



(b)  $H/D=4$

图10 桩身  $p-y$  曲线

Fig. 10  $p-y$  curves of lateral piles

3.3 与 Haga site 现场试验对比

本算例针对一根柔度很大  $K_R = 3.8 \times 10^{-4}$  的桩进行深入分析。Gabr 等<sup>[21]</sup>在 Haga site 对一根桩长 4.15 m, 直径 0.153 m, 抗弯刚度  $1.16 \times 10^3 \text{ kNm}^2$  进行试验, 桩顶露出地面 0.3 m; 通过十字板剪切试验得到土体强度剖面见图 11, 利用扁铲仪得到各深度  $E_s/s_u$  和其它参数见表 3, 有效重度  $8 \text{ kN/m}^3$ 。

表 3 土体参数

Table 3 Soil parameters				
深度/m	$S_u/\text{kPa}$	$E_s/S_u$	$k/(\text{MN}\cdot\text{m}^{-2})$	$\varepsilon_{50}/10^{-3}$
0.20	37	200	7.6	5.000
0.45	40	300	15.3	3.333
0.70	43	320	19.0	3.125
0.95	43	350	22.0	2.857

本算例中的极限承载力系数  $N$  均采用 API 规范。图 12 显示了 4 个不同桩身截面的  $p-y$  曲线, 从中看出对于柔度很大的桩 API 规范尽管仍偏大, 但已不再那么明显, 而双曲线形式的  $p-y$  曲线则依然是整体偏低。

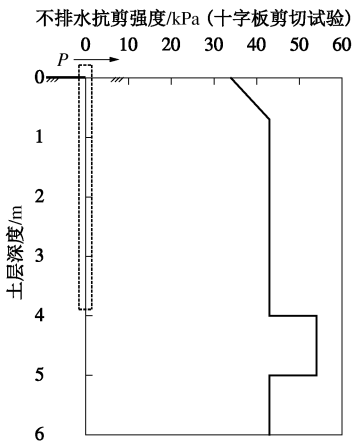


图 11 土体强度剖面图

Fig. 11 Profile of soil strength

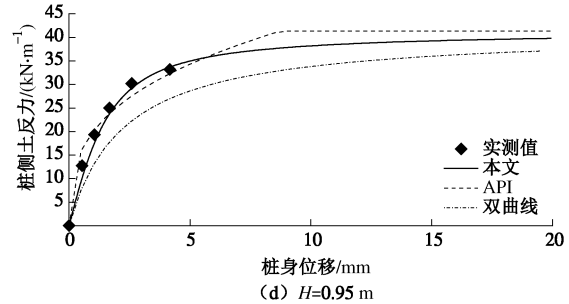
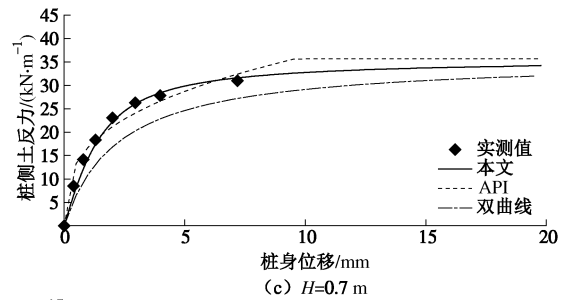
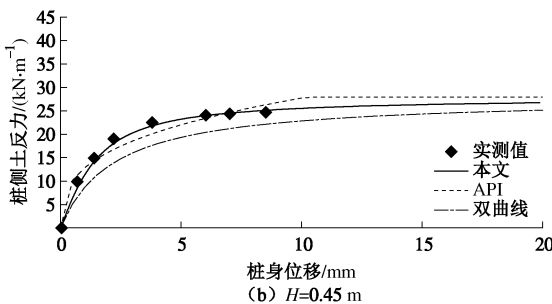
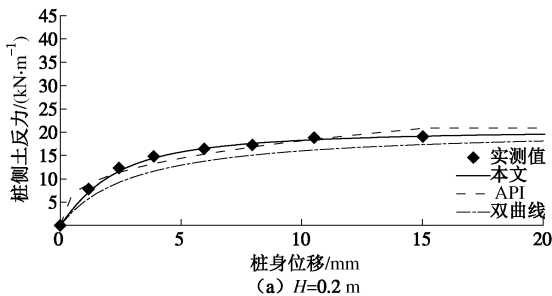


图 12 桩身  $p-y$  曲线

Fig. 12  $p-y$  curves of lateral piles

图 13, 14 分别给出了桩顶的荷载 - 位移的关系曲线以及桩身弯矩图。本文推荐的  $p-y$  曲线方法均符合较好。而其他两种方法出现了不同程度的偏差。

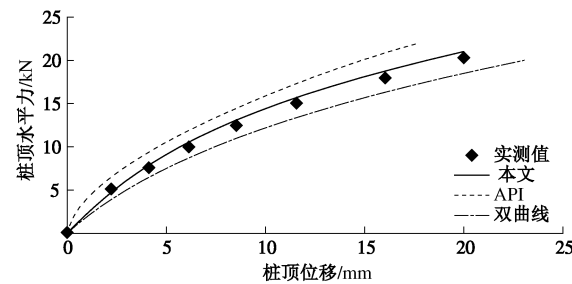


图 13 水平桩力和位移关系曲线

Fig. 13 Load-displacement curves of lateral piles

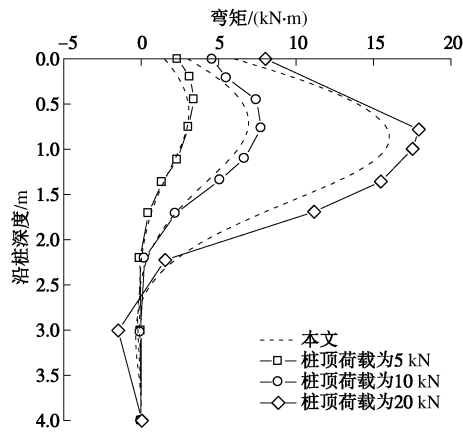


图 14 弯矩图

Fig. 14 Bending moments

4 结 语

首先, 本文发展了与上限分析等价的部分弹性加载理论, 并将其具体应用于确定桩周土体合理的扰动区范围, 并获得其范围内平均剪应变随桩身位移的发

展规律。结合双曲线土体应力应变关系, 从理论上推导出了桩周土体的  $p-y$  骨干曲线。初始刚度采用修正的 Vesic<sup>[17]</sup>地基模量, 极限承载力仍沿用 API 规范的推荐形式。

该  $p-y$  曲线较之传统的曲线形式能很好地反映土体刚度  $E_s/s_u$ , 桩身刚度  $EI$ , 长细比  $L/D$  对  $p-y$  曲线的影响。API 规范  $p-y$  曲线对于桩身刚性小(柔度大)的桩模拟较好, 但是随着桩身刚度的增加偏差逐渐增大; 双曲线型  $p-y$  曲线整体偏小, 需要更大的位移以达到极限状态, 这一点较之本文及 API 规范的结果显然有其不合理性。

面对如今桩径和桩身刚度日趋增大的情况, 仍沿用以往  $p-y$  的曲线进行设计是不合时宜的, 因为 API 规范在计算刚度较大的桩时, 会明显高估桩周的土体刚度和反力, 致使桩响应偏小, 从而导致设计偏于不安全。而本文推导的  $p-y$  曲线可以反映桩身刚度  $EI$ 、长细比  $L/D$  对  $p-y$  曲线的影响, 因此不但能更好地计算传统的水平受荷桩, 也能对现今大刚度桩的设计给予指导。

#### 参考文献:

- [1] POULOS H G, DAVIS E H. Pile foundation analysis and design[M]. New York: John Wiley and Sons, 1980.
- [2] RANDOLPH M F. The response of flexible piles to lateral loading[J]. Géotechnique, 1981, **31**(2): 247 - 259.
- [3] BANERJEE P K, DAVIS T G. The behavior of axially and laterally loaded single piles embedded in non-homogeneous soil[J]. Géotechnique, 1978, **28**(3): 309 - 326.
- [4] GEORGIADIS M, ANAGNOSTOPOULOS C, SAFLEKOU S. Cyclic lateral loading of piles in soft clay[J]. Geotechnical Engineering, 1992, **23**(1): 47 - 60.
- [5] MATLOCK H S. Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay[C]// Proceedings Second Annual Offshore Technology Conference. Houston, 1970: 1204.
- [6] AMERICAN PETROLEUM INSTITUTE. Recommended practice for planning, designing and constructing fixed offshore platforms[M]. Washington D C: American Petroleum Institute Production Department, 1987.
- [7] KLAR A. Upper bound for cylinder movement using "Elastic" fields and its possible application to pile deformation analysis[J]. International Journal of Geomechanics, ASCE, 2008, **8**(2): 162 - 167.
- [8] ASHOUR M, NORRIS G. Modeling lateral soil-pile response based on soil-pile interaction[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironment Engineering, ASCE, 2000, **126**(5): 420 - 428.
- [9] SHIELD R T, DRUCKER D C. The application of limit analysis to punch indentation problems[J]. Journal of applied mechanics, ASME, 1953, **20**(4): 453 - 460.
- [10] RANDOLPH M F, HOULSBY G T. The limiting pressure on a circular pile loaded laterally in cohesive soil[J]. Géotechnique, 1984, **34**(4): 613 - 623.
- [11] MARTIN C M, RANDOLPH M F. Upper bound analysis of lateral pile capacity in cohesive soil[J]. Géotechnique, 2006, **56**(2): 141 - 145.
- [12] OSMAN A S, BOLTON M D. Simple plasticity-based prediction of the undrained settlement of shallow circular foundations on clay[J]. Géotechnique, 2005, **55**(6): 435 - 447.
- [13] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1989, **13**(3): 263 - 282.
- [14] BAGUELIN M F, FRANK R, SAID Y H. Theoretical study of lateral reaction mechanism of piles[J]. Géotechnique, 1977, **27**(3): 405 - 434.
- [15] NOGAMI T, OTANI J, KONAGAI K, et al. Nonlinear soil-pile interaction model for dynamic lateral motion[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1992, **118**(1): 89 - 106.
- [16] BARNSBY M F. Selection of  $p-y$  curves for the design of single laterally loaded piles[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1999, **23**(15): 1909 - 1926.
- [17] VESIC A B. Bending of beam resting on isotropic elastic solid[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 1961, **87**(2): 35 - 53.
- [18] FAN C C, LONG J H. Assessment of existing methods for predicting soil response of laterally loaded piles in sand[J]. Computers and Geotechnics, 2005, **32**(4): 274 - 289.
- [19] SKEMPTON A W. The bearing capacity of clays[C]// Proceeding of Building Research Congress, Division I. London, 1951: 180 - 189.
- [20] KIM Y, JEONG S, LEE S. Wedge failure analysis of soil resistance on laterally loaded piles in clay[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironment Engineering, ASCE, 2011, **137**(7): 678 - 693.
- [21] GABR M A, LUNNE T, POWELL J J.  $P-y$  analysis of laterally loaded piles in clay using DMT[J]. Journal of Geotechnical Engineering 1994, **120**(5): 816 - 837.