

DOI: 10.11779/CJGE201502007

# 渗流问题的弱形式求积元分析

袁 帅, 钟宏志

(清华大学土木工程系, 北京 100084)

**摘 要:** 对于渗流问题的研究在很多领域有着广泛的应用, 工程中通常采用有限元法对其进行数值求解, 这往往需要耗费较大的计算资源从而限制了其计算规模。弱形式求积元法是一种简单和高效的数值方法, 该方法基于问题弱形式描述, 可对全域进行高阶近似, 具有较快的收敛性, 在结构分析领域已有广泛的应用。将弱形式求积元法应用于渗流问题的求解, 分析了二维及三维渗流问题, 包括承压渗流和无压渗流; 对于无压渗流, 采用变网格方法, 使用积分点位置的多项式插值来近似表示自由面。求解了数值算例并得到了与解析解或者文献解一致的结果。结果表明: 与有限元法相比, 弱形式求积元法使用较少的自由度就可以得到收敛的结果, 显示了弱形式求积元法在渗流分析中的有效性。  
**关键词:** 弱形式求积元法; 渗流; 混凝土坝; 挡水板; 渗流自由面

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2015)02-0257-06

**作者简介:** 袁 帅 (1984 - ), 男, 河北邯郸人, 博士研究生, 主要从事土力学数值方法的研究。E-mail: yuan\_shuai@126.com。

## Seepage analysis using the weak form quadrature element method

YUAN Shuai, ZHONG Hong-zhi

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** Seepage analysis has found wide application in many areas. In practice, the conventional numerical tools such as the finite element method are mainly used in the seepage analysis, which often demand large computational resources and therefore impose restrictions on the problem scale. The weak form quadrature element method is a simple and efficient numerical tool which has been applied to structural analysis. Based on the weak form description of a problem, it has the characteristics of global approximation and enjoys rapid convergence. The method is used for simulation of two- and three-dimensional confined and unconfined seepage. For the unconfined seepage, the adaptive mesh method is employed, and the free surface is expressed by polynomial interpolation at integration points. The results are compared with those of other methods and good agreement is reached. It is shown that a relatively small number of degrees of freedom are needed to attain convergence by the quadrature element formulation as compared with those of the finite element method. The weak form quadrature element method is expected to be an effective numerical tool for seepage analysis.

**Key words:** weak form quadrature element method; seepage; concrete dam; manger; free surface

## 0 引 言

渗流问题的研究在很多工程领域都有非常重要的应用, 如坝体设计、边坡稳定、石油工程等。由于实际工程的复杂性, 传统的手工方法或近似方法等已不满足工程需要, 通常要借助数值方法来进行分析。现代数值方法如有限元法<sup>[1-4]</sup>、无网格法<sup>[5]</sup>、有限差分法<sup>[6]</sup>、边界元法<sup>[7]</sup>等已在渗流分析中被广泛应用。但以上方法在求解实际大规模问题时往往需要大量的计算自由度和高计算成本, 一定程度上限制了其工程应用。

弱形式求积元法 (weak form quadrature element method, 简称 QEM) 是一种高效的数值算法<sup>[8]</sup>。从问题的弱形式描述出发, 直接利用数值积分和数值微分, 具有高阶近似的优点, 使得求解过程采用的自由度数

量大大少于通常的低阶有限元法。弱形式求积元法不显式地引入形函数, 其形函数隐含在结点导数的微分求积近似过程中。通常在网格不变的情况下, 它可以通过提高积分阶次来提高计算精度。该方法积分点和结点采用一套点, 使得后处理比较简单。与高阶有限元相比, 弱形式求积元法的未知变量是具有物理意义的结点函数值, 而且近似阶次可以任意提高。弱形式求积元法自提出以来, 在二维、三维实体分析, 框架等结构的分析中已取得了很好的效果<sup>[9-11]</sup>。本文将弱形式求积元法用于渗流问题的分析, 以期扩大该方法

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51178247)

收稿日期: 2014-06-14

的应用范围,减少实际计算所需自由度和降低计算成本,为岩土工程分析提供一个高效的数值工具选择。

## 1 渗流问题控制方程

根据连续性条件,渗流的控制微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} + S_s \dot{h} &= 0, \\ S_s &= \frac{n\gamma_w}{k_w}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{v}$  为水的达西流速,  $h$  为总水头即压力水头与孔压水头之和,  $\gamma_w$  为水的重度,  $n$  为孔隙率,  $k_w$  为水的体积压缩系数。由达西定律

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K} \nabla h, \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{K}$  为渗透系数矩阵。将达西定律代入式 (1), 控制方程可以改写为

$$\operatorname{div}(\mathbf{K} \nabla h) - S_s \dot{h} = 0. \quad (3)$$

由虚功原理

$$\int_V \delta h \operatorname{div}(\mathbf{K} \nabla h) dV - \int_V \delta h S_s \dot{h} dV = 0, \quad (4)$$

通过分部积分,进一步可以表示为

$$\int_{A_n} \delta h v_n dA + \int_V (\nabla \delta h)^T \cdot \mathbf{K} \nabla h dV + \int_V \delta h S_s \dot{h} dV = 0, \quad (5)$$

式中,  $A_n$  为给定法向流速的边界。式 (5) 即为渗流方程的弱形式表达。

## 2 弱形式求积元法计算格式

弱形式求积元法首先将问题划分为一些可以进行数值积分的子域(求积元单元),然后引入坐标变换将子域映射到标准域:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \varsigma), \\ y &= y(\xi, \eta, \varsigma), \\ z &= z(\xi, \eta, \varsigma), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中  $x, y$  和  $z$  是物理域坐标,  $\xi, \eta$  和  $\varsigma$  是标准域坐标,  $-1 \leq \xi, \eta, \varsigma \leq 1$ 。由微分的链式法则可得

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \varsigma} \end{aligned} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varsigma} & \frac{\partial y}{\partial \varsigma} & \frac{\partial z}{\partial \varsigma} \end{bmatrix} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \right\} = \mathbf{J} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \right\} = \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \varsigma} \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{J}$  和  $\mathbf{J}^{-1}$  分别是单元区域变换的雅可比矩阵及其逆矩阵。然后对式 (5) 进行数值积分,本文中采用 Gauss-Lobatto 积分。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{k=1}^{N_\varsigma} W_i W_j W_k |\mathbf{J}|_{ijk} (\nabla \delta h)_{ijk}^T \mathbf{K}_{ijk} (\nabla h)_{ijk} + \\ & \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{k=1}^{N_\varsigma} W_i W_j W_k |\mathbf{J}|_{ijk} \delta h_{ijk} S_{sijk} \dot{h}_{ijk} + \\ & \sum_{m=1}^{N_V} \sum_{i=1}^{N_{m1}} \sum_{j=1}^{N_{m2}} W_i W_j |\bar{\mathbf{J}}|_{ij} \delta h_{ij} v_{nij} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

式中,  $N_\xi, N_\eta, N_\varsigma$  是相应方向的积分点个数,  $W_i, W_j, W_k$  是积分权系数,  $N_V$  为指定法向流速的边界个数,  $N_{m1}$  和  $N_{m2}$  分别为边界上两个方向上的积分点个数,  $\bar{\mathbf{J}}$  为单元边界区域变换的雅可比矩阵。再通过积分点处的导数进行微分求积近似,  $(i, j, k)$  点水头梯度可以表示为

$$(\nabla h)_{ijk} = \mathbf{J}_{ijk}^{-1} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h}{\partial \eta} \\ \frac{\partial h}{\partial \varsigma} \end{aligned} \right\} = \mathbf{J}_{ijk}^{-1} \left\{ \begin{aligned} \sum_{m=1}^{N_\xi} C_{im}^\xi h_{mjk} \\ \sum_{m=1}^{N_\eta} C_{jm}^\eta h_{imk} \\ \sum_{m=1}^{N_\varsigma} C_{km}^\varsigma h_{ijm} \end{aligned} \right\} = \mathbf{Z}_{ijk} \mathbf{h}^e, \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{h}^e$  为节点水头矢量,  $\mathbf{Z}_{ijk}$  为  $(i, j, k)$  点水头梯度与节点水头矢量的联系矩阵,  $C_{im}^\xi, C_{jm}^\eta$  和  $C_{km}^\varsigma$  为 3 个坐标方向上的一阶偏导数的微分求积系数,可由显式表达式给出<sup>[8,9,12]</sup>。例如,

$$\left. \begin{aligned} C_{im}^\xi &= \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^{N_\xi} (\xi_i - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_m) \prod_{j=1, j \neq m}^{N_\xi} (\xi_m - \xi_j)} \\ & \quad (i, m = 1, 2, \dots, N_\xi; i \neq m), \\ C_{ii}^\xi &= - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_\xi} C_{ij}^\xi. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式 (11) 给出的微分求积系数隐含着标准域内水头被表示为结点水头值的多项式插值的形式。将式 (10) 代入式 (9) 得到

$$\mathbf{K}_L^e \mathbf{h}^e + \mathbf{K}_W^e \mathbf{h}^e + \mathbf{R}^e = \mathbf{0}, \quad (12)$$

式中, 渗透系数矩阵  $\mathbf{K}_L^e$ , 压缩矩阵  $\mathbf{K}_W^e$  和法向流速矢量  $\mathbf{R}^e$  分别为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_L^e &= \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{k=1}^{N_\varsigma} W_i W_j W_k |\mathbf{J}|_{ijk} \mathbf{Z}_{ijk}^T \mathbf{K}_{ijk} \mathbf{Z}_{ijk}, \\ \mathbf{K}_W^e &= \sum_{i=1}^{N_\xi} \sum_{j=1}^{N_\eta} \sum_{k=1}^{N_\varsigma} W_i W_j W_k |\mathbf{J}|_{ijk} \mathbf{F}_{ijk}^T S_{sijk} \mathbf{F}_{ijk}, \\ \mathbf{R}^e &= \sum_{m=1}^{N_V} \sum_{i=1}^{N_{m1}} \sum_{j=1}^{N_{m2}} W_i W_j |\bar{\mathbf{J}}|_{ij} \mathbf{D}_{ij} v_{nij}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中,  $\mathbf{F}_{ijk}$  和  $\mathbf{D}_{ij}$  分别为域内和边界上的定位向量:

$h_{ijk} = F_{ijk} h^e$  和  $h_{ij} = D_{ij} h^e$ 。下面对时间进行离散, 假定时间被分为若干个增量步, 第  $m$  个增量步结果已知, 现在求第  $m+1$  个增量步水头。使用  $\theta$  方法, 对方程(12)进行积分

$$\begin{aligned} & \int_{t_m}^{t_{m+1}} K_L^e h^e dt + \int_{t_m}^{t_{m+1}} K_W^e \dot{h}^e dt + \int_{t_m}^{t_{m+1}} R^e dt = 0 \\ & \Rightarrow \Delta t K_L^e (\theta h_{m+1}^e + (1-\theta) h_m^e) + \\ & \Delta t K_W^e (h_{m+1}^e - h_m^e) + \Delta t R^e = 0 \\ & \Rightarrow (\theta \Delta t K_L^e + \Delta t K_W^e) h_{m+1}^e \\ & = (\Delta t K_W^e - \Delta t (1-\theta) K_L^e) h_m^e - \Delta t R^e, \quad (14) \end{aligned}$$

式中,  $\theta$  为积分常数, 通常取  $0.5 \leq \theta \leq 1.0$ , 本文取  $\theta = 0.8$ 。将式(14)在所有单元上集成就能得到求解瞬态渗流问题的递推公式为

$$A h_{m+1} = B h_m + C, \quad (15)$$

其系数矩阵分别为

$$\left. \begin{aligned} A &= \sum_e (\theta \Delta t K_L^e + \Delta t K_W^e), \\ B &= \sum_e (\Delta t K_W^e - \Delta t (1-\theta) K_L^e), \\ C &= \sum_e -\Delta t R^e. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

初始水头分布可通过求解稳态渗流方程得到, 此处不再叙述。在弱形式求积元法中, 边界条件的处理与在有限元方法中的处理方式是相同的。

### 3 数值算例

#### 3.1 混凝土坝地基渗流

本算例考虑图1所示混凝土坝地基的二维瞬态渗流问题。混凝土坝的下游水位保持为零, 上游水位从 0.5 m 在 300 min 的时间内线性地上升至 1.5 m, 其他边界均为不透水边界。几何参数见图1, 材料参数为  $S_s = 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ , 渗透系数  $k = 1.7 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ 。使用3个四边形求积元单元(见图1), 每个单元采用  $8 \times 8$  个积分点, 时间增量为 4 min。同时使用有限元软件 ABAQUS 的均匀网格下 30000 个孔压单元计算了该问题, 并取

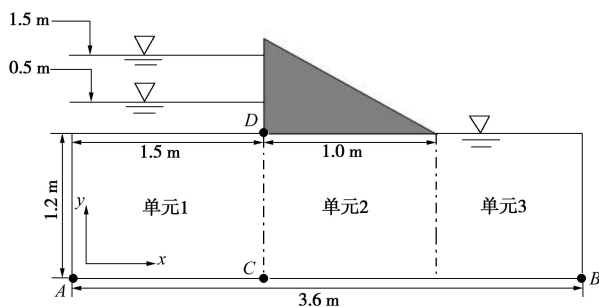


图1 混凝土坝渗流

Fig.1 Seepage under a concrete dam

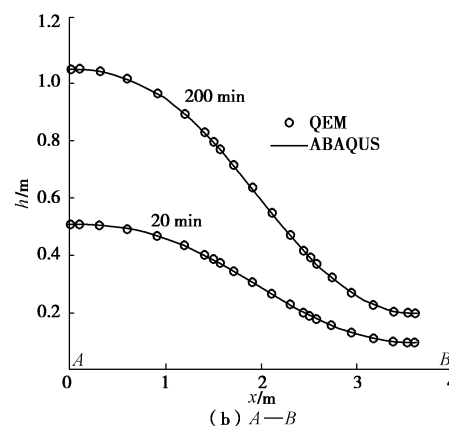
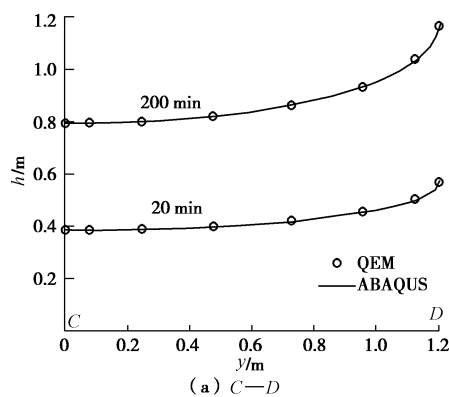


图2 C—D线和A—B线上总水头的变化

Fig. 2 Variation of hydraulic head along C—D and A—B 其解作为对比。计算了土体底面(A—B线)在不同时刻的总水头分布, 如图2(a)所示, 其中参考面取在土体底面; 图2(b)所示为C—D线上的总水头。可见, 求积元法的结果与有限元解非常一致。

#### 3.2 挡水板地基渗流

本算例研究如图3所示的挡水板地基稳态渗流问题, 其中挡水板在土层水平方向上中间部位, 厚度为 0.1 m, 其上游水位保持在 10 m, 下游水位为 0 m, 其他各面均为不排水边界条件。渗透系数均匀分布,  $k = 1.1547 \times 10^{-7} \text{ m/s}$ , 取土层底面为参考, 求积元单元划分见图3(分割为5个单元)。得到挡水板左侧及土层底面的收敛水头对比见图4, 其中求积元模型使用了 1815 个积分点(亦为结点), 各单元的积分点数分别为  $30 \times 15$  (单元1, 2, 4, 5) 和  $7 \times 15$  (单元3); ABAQUS 采用了 20402 个结点的均匀网格。可以看到两者的结果是非常一致的。对比了求积元法和 ABAQUS 分别取不同结点数目(自由度)时, 在挡水板左右侧面上水头的相对误差平均值:  $\text{error} = \frac{1}{N} \sum_i (h_i - \bar{h}_i) / \bar{h}_i$ , 其中  $N$  为挡水板侧面的结点数,  $h_i$  和  $\bar{h}_i$  分别为挡水板侧面第  $i$  个均匀结点处的计算水头和收敛水头, 由于求积元单元积分点非均匀分布, 相应位置的水头通过插值得到。相对误差如图5所示,

可以看到求积元法的收敛速度要远远快于有限元法，可以节省大量的自由度。

Rafiezadeh 等<sup>[7]</sup>使用边界元法得到的结果做了对比，可以看到两者的结果非常一致。

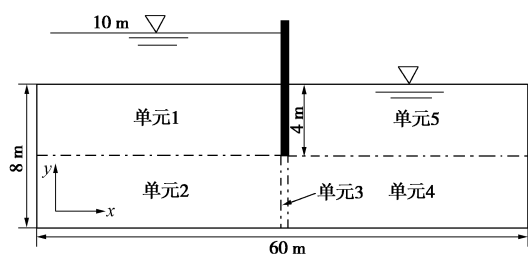


图 3 挡水板渗流  
Fig. 3 Seepage under a manger

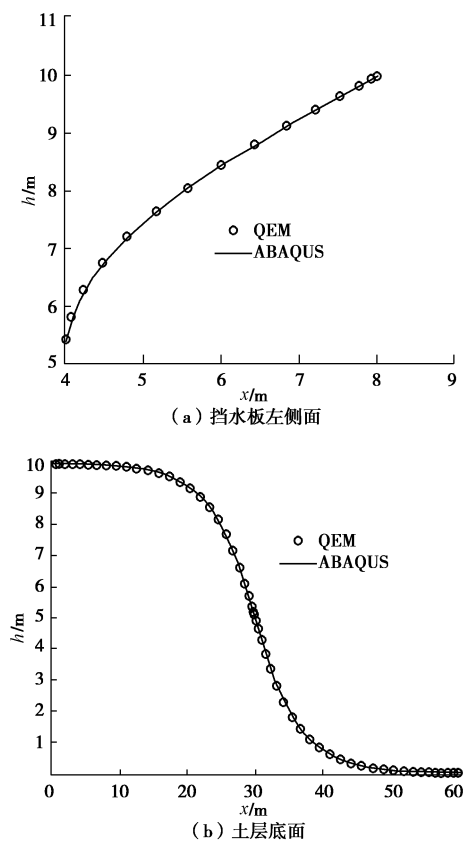


图 4 挡水板左侧面和土层底部水头分布

Fig. 4 Variation of hydraulic head along left side of manger and bottom

3.3 三维混凝土坝地基渗流

此算例是三维渗流问题，其模型见图 6。矩形水渠受到混凝土坝的阻碍，其上游水位为 2 m，下游为 0 m，水渠宽度为 10 m，深度为 2 m。研究了两种不同渗透系数的情况，其中第一种为各向同性， $k_x = k_y = k_z = 3 \times 10^{-5}$  m/s；第二种为各向异性， $k_x = k_y = 3 \times 10^{-5}$  m/s， $k_z = 3 \times 10^{-6}$  m/s，其边界条件见表 1，其中坐标原点取在土层底面中心处。使用 15 个六面体求积元单元，每个单元选取  $5 \times 5 \times 5$  个积分点。图 7 为计算得到土体底面中心线上水头的分布，并与

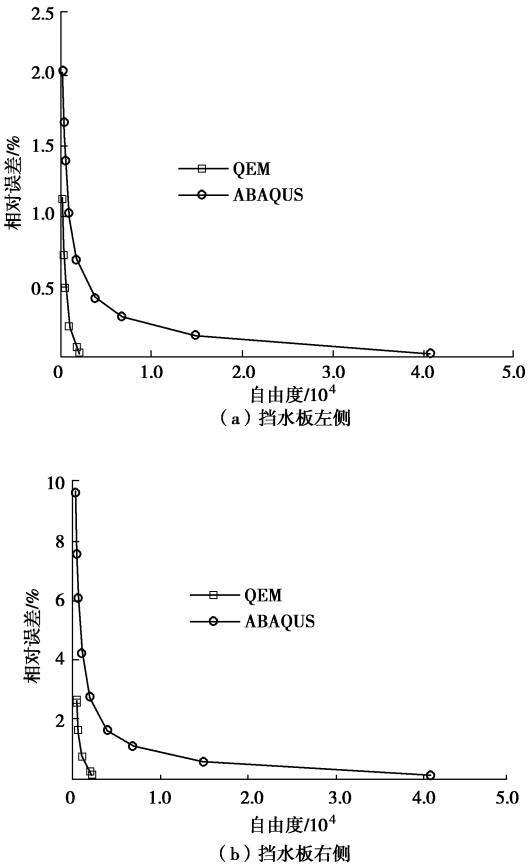


图 5 挡水板左、右侧水头平均相对误差的比较

Fig. 5 Average relative errors of hydraulic head along left side and right side of manger

表 1 三维渗流边界条件

Table 1 Boundary conditions for three-dimensional seepage	
边界	边界条件
$x=-30\text{ m}$	$h=8\text{ m}$
$x=30\text{ m}$	$h=6\text{ m}$
$y=-15\text{ m}$	不透水
$y=15\text{ m}$	不透水
$y=-5\text{ m}, 6\text{ m}<z<8\text{ m}, -30\text{ m}<x<-6\text{ m}$	$h=8\text{ m}$
$y=-5\text{ m}, 6\text{ m}<z<8\text{ m}, -6\text{ m}<x<6\text{ m}$	不透水
$y=-5\text{ m}, 6\text{ m}<z<8\text{ m}, 6\text{ m}<x<30\text{ m}$	$h=6\text{ m}$
$y=5\text{ m}, 6\text{ m}<z<8\text{ m}, -30\text{ m}<x<-6\text{ m}$	$h=8\text{ m}$
$y=5\text{ m}, 6\text{ m}<z<8\text{ m}, -6\text{ m}<x<6\text{ m}$	不透水
$y=5\text{ m}, 6\text{ m}<z<8\text{ m}, 6\text{ m}<x<30\text{ m}$	$h=6\text{ m}$
$z=0$	不透水
$z=8\text{ m}$	不透水
$z=6\text{ m} (-30\text{ m}<x<-6\text{ m})$	$h=8\text{ m}$
$z=6\text{ m} (-6\text{ m}<x<6\text{ m})$	不透水
$z=6\text{ m} (6\text{ m}<x<30\text{ m})$	$h=6\text{ m}$

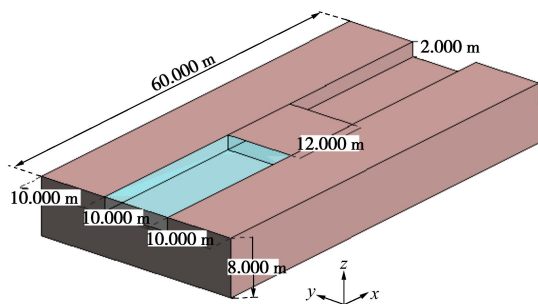


图6 三维混凝土坝渗流

Fig. 6 Seepage in a three-dimensional concrete dam

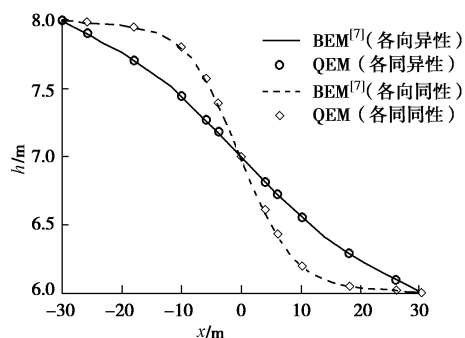


图7 土层底面中心线上水头分布

Fig. 7 Variation of hydraulic heads along centerline of bottom surface

### 3.4 具有自由面的渗流问题

本算例采用变网格法求解具有自由面的渗流问题, 将单元顶面结点作为“自由面点”, 利用“自由面点”的多项式插值来近似表示自由面。求解时首先假定自由面的初始位置, 然后根据下式进行迭代:

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \alpha(h_i^n - y_i^n) \quad (17)$$

式中,  $y_i^{n+1}$  为第  $i$  个“自由面点”第  $n+1$  次迭代的竖向坐标,  $y_i^n$ ,  $h_i^n$  分别为第  $i$  个“自由面点”第  $n$  次迭代的竖向坐标和水头,  $\alpha$  为调整参数, 算例中取  $\alpha=1$ 。

“自由面点”的水平向坐标则根据初始迭代时连接相应顶面及底面结点的直线来确定。

考虑图8所示的矩形土坝, 其渗透系数均匀分布。

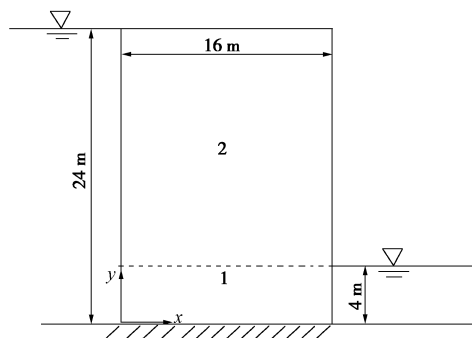


图8 具有自由面的渗流问题

Fig. 8 Unconfined seepage

使用两个求积元单元, 第一个单元分为  $9 \times 3$  个积分点, 第二个单元  $9 \times 6$  个积分点。得到的自由面位置见图9, 并与解析解<sup>[13]</sup>做了比较, 可以看到求积元结果与解析解非常一致。另外与文献<sup>[14~16]</sup>的结果进行了对比, 自由面的相对误差见图10。可见, 求积元以很少的结点得到了高精度的结果。

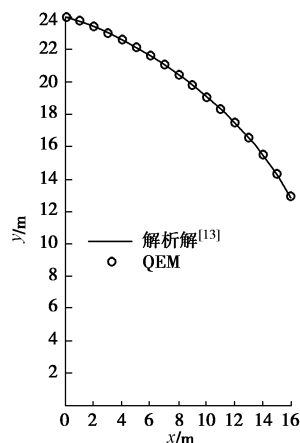


图9 渗流自由面结果比较

Fig. 9 Solution of free surface

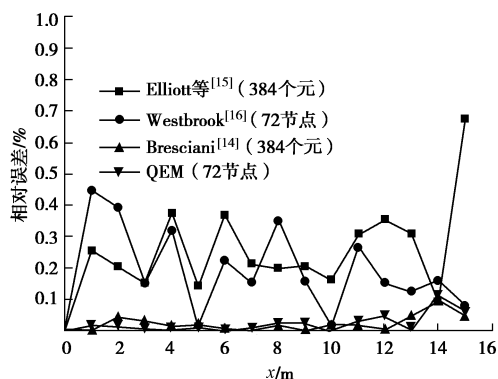


图10 自由面误差比较

Fig. 10 Comparison of relative errors of free surface

## 4 结 论

本文给出了渗流分析的弱形式求积元列式, 求解了关于混凝土坝、挡水板以及土坝二维及三维渗流问题, 并与有限元法或文献解进行了对比, 取得了很好的一致性。结果表明, 求积元法具有较快的收敛速度, 所需自由度少, 前后处理简单, 在渗流分析领域有着非常广阔的应用前景。

### 参考文献:

- [1] AHMED A, BAZARAA A. Three-dimensional analysis of seepage below and around hydraulic structures[J]. Journal of Hydrologic Engineering, 2009, 14(3): 243 - 247.
- [2] BATHE K J, KHOSHGOFTAAR M R. Finite element free

- surface seepage analysis without mesh iteration[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1979, **3**(1): 13 – 22.
- [3] KAZEMZADEH-PARSI M J, DANESHMAND F. Unconfined seepage analysis in earth dams using smoothed fixed grid finite element method[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2012, **36**(6): 780 – 797.
- [4] KAZEMZADEH-PARSI M J, DANESHMAND F. Three dimensional smoothed fixed grid finite element method for the solution of unconfined seepage problems[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2013, **64**(1): 24 – 35.
- [5] SAKURAI H, KAWAHARA M. Three-dimensional groundwater flow analysis system using the element-free galerkin method[J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2004, **18**(4): 309 – 315.
- [6] JIE Y, JIE G, MAO Z, et al. Seepage analysis based on boundary-fitted coordinate transformation method[J]. Computers and Geotechnics, 2004, **31**(4): 279 – 283.
- [7] RAFIEZADEH K, ATAIE-ASHTIANI B. Three dimensional flow in anisotropic zoned porous media using boundary element method[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2012, **36**(5): 812 – 824.
- [8] ZHONG H, YU T. A weak form quadrature element method for plane elasticity problems[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, **33**(10): 3801 – 3814.
- [9] ZHONG H, YU T. Flexural vibration analysis of an eccentric annular Mindlin plate[J]. Archive of Applied Mechanics, 2007, **77**(4): 185 – 195.
- [10] MO Y, OU L, ZHONG H. Vibration analysis of timoshenko beams on a nonlinear elastic foundation[J]. Tsinghua Science & Technology, 2009, **14**(3): 322 – 326.
- [11] HE R, ZHONG H. Large deflection elasto-plastic analysis of frames using the weak-form quadrature element method[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2012, **50**(1): 125 – 133.
- [12] SHU C. Differential quadrature and its applications in engineering[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2000.
- [13] POLUBARINOVA-KOCHINA P K. Theory of groundwater movement[M]. Princeton: Princeton University Press, 1962: 506 – 509.
- [14] BRESCIANI E, DAVY P, DE DREUZY J R. A finite volume approach with local adaptation scheme for the simulation of free surface flow in porous media[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. 2012, **36**(13): 1574 – 1591.
- [15] ELLIOTT C, OCKENDON J R. Weak and variational methods for moving boundary problems[M]. Boston: Pitman Pub, 1982.
- [16] WESTBROOK D R. Analysis of inequality and residual flow procedures and an iterative scheme for free surface seepage[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1985, **21**(10): 1791 – 1802.