

DOI: 10.11779/CJGE201412025

横观各向同性层状地基上轴对称受荷刚性圆板问题

艾智勇^{1, 2}, 史本凯^{1, 2}

(1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 采用轴对称横观各向同性层状地基的解析层元解来求解刚性圆板与地基的共同作用问题, 结合刚性圆板与地基表面的位移协调条件, 建立横观各向同性层状地基上受荷刚性圆板问题的积分方程; 运用数值方法求解该积分方程, 得到在给定位移下刚性圆板与地基间的接触应力。编制相应的计算程序进行数值计算, 分析了地基横观各向同性参数、地基厚度和地基成层性对地基反力的影响。

关键词: 横观各向同性; 层状地基; 解析层元解; 刚性圆板; 轴对称问题

中图分类号: TU470 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2014)12-2341-04

作者简介: 艾智勇(1966-), 男, 江西余江人, 博士, 教授, 主要从事岩土及地下工程方面的教学和研究工作。E-mail: zhiyongai@tongji.edu.cn。

An axisymmetrically loaded rigid circular disc on transversely isotropic layered soils

AI Zhi-yong^{1,2}, SHI Ben-kai^{1,2}

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The analytical layer element solution for axisymmetrically transversely isotropic multilayered soils is adopted to solve the interaction between the rigid circular plate and the foundation. Then based on the displacement continuity conditions between the soil surface and the rigid circular disc, the integral equation of an axisymmetrically loaded rigid circular disc on transversely isotropic multilayered soils is developed. The integral equation is solved numerically, and the contact stresses between the rigid circular disc and the subsoil are obtained when the rigid circular disc is given a value of displacement. This solution is implemented into a computer code for numerical analysis, and the influences of parameters of transversely isotropic foundation, thickness and stratification of the soils on the contact stresses are analyzed.

Key words: transverse isotropy; layered soil; analytical layer element solution; rigid circular disc; axisymmetric problem

0 引言

由于土体在沉积过程中表现出横观各向同性及成层性的特点, 所以横观各向同性层状地基模型更接近实际土体的本质。此外, 实际工程中, 许多建筑物的基础被设计为圆形, 比如电视塔、蓄水池、储油设施等的底板, 而且基础的刚度常常远大于地基, 故可视为刚性基础, 因此分析横观各向同性层状地基与刚性圆板的共同作用具有重要的理论意义和工程实用价值。Butterfield 等^[1]用边界积分方程法研究了弹性半无限体表面及内部轴向受荷的刚性圆板问题; Brow^[2]采用双调和方程的数值积分推导出位于各向同性弹性半空间上矩形刚性板的解, 探讨了各种长宽比下刚性板的承载情况, Poulos 等^[2]对其结果进行了概括; Chow^[4]以有限单元法为基础, 提出一个分析弹性成层地基上任意形状刚性板的方法; Milovic^[5]采用有限单元法研究了两层地基表面受均布荷载的刚性圆板问题; 袁聚

云等^[6]将基础底面面积划分为若干小块, 并假定每个小块的基底反力分布均匀, 分析了中心荷载下刚性板的沉降和反力; 艾智勇等^[7]利用刚性圆板与地基接触的混合边值条件及 Hankel 变换, 建立对偶积分方程, 求解了多层地基上轴对称受荷刚性圆板问题; 最近, 艾智勇等^[8]利用刚性条形基础与层状横观各向同性地基接触的混合边界条件及 Fourier 变换, 建立对偶积分方程, 并应用 Jacobi 正交多项式将其转化为线性代数方程组, 求解了刚性条形基础与层状横观各向同性地基的接触问题。

本文采用轴对称横观各向同性层状地基的解析层元解来求解轴对称受荷刚板与地基的共同作用问题, 结合刚性圆板与地基的位移协调条件, 建立横观各向同性层状地基上受荷刚性圆板问题的积分方程, 编制

相应的计算程序, 分析探讨地基的横观各向同性参数、厚度以及成层性对地基反力的影响。

1 轴对称横观各向同性地基解析层元解

在横观各向同性层状地基轴对称问题的地基解方面, 已经有较为精确成熟的理论研究。本文直接引用艾智勇等^[9]推导出的轴对称横观各向同性层状地基的解析层元解。这时, 单层土的解析层元刚度矩阵为

$$\begin{bmatrix} -\bar{\tau}_{rz}(\xi, 0) \\ -\bar{\sigma}_z(\xi, 0) \\ \bar{\tau}_{rz}(\xi, z) \\ \bar{\sigma}_z(\xi, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}(\xi, 0) \\ \bar{w}(\xi, 0) \\ \bar{u}(\xi, z) \\ \bar{w}(\xi, z) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中, ξ 为 Hankel 变换参数, $\bar{u}(\xi, z)$ 、 $\bar{\tau}_{rz}(\xi, z)$ 为径向位移 $u(r, z)$ 、剪应力 $\tau_{rz}(r, z)$ 进行 1 阶 Hankel 变换后的量, $\bar{w}(\xi, z)$ 、 $\bar{\sigma}_z(\xi, z)$ 为竖向位移 $w(r, z)$ 、法向应力 $\sigma_z(r, z)$ 进行 0 阶 Hankel 变换后的量; 元素 $k_{ij} = k_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) 的具体表达式详见参考文献[9], $\bar{u}(\xi, 0)$ 为 $\bar{u}(\xi, z) z = 0$ 时的量, 其它参数类似定义。

对于层状土, 假设其表面受到一竖向集中力 Q 的作用, 根据层间接触面的位移和应力连续性条件, 利用解析层元刚度矩阵(1), 可以建立层状土体的总刚度矩阵如下:

$$\left[\begin{array}{c} K^1 \\ \vdots \\ K^2 \\ \vdots \\ K^{N-1} \\ \vdots \\ K^N \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u(\xi, 0) \\ w(\xi, 0) \\ \vdots \\ u(\xi, z_n) \\ w(\xi, z_n) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \tau_{rz}(\xi, 0) \\ \sigma_z(\xi, 0) \\ \vdots \\ \tau_{rz}(\xi, z_n) \\ \sigma_z(\xi, z_n) \end{array} \right], \quad (2)$$

式中, K^i 代表第 i 层土的解析层元刚度矩阵。

假设土体表面自由且底面固定, 并引入层间连续性条件, 求解该总刚度矩阵方程组, 可以得到层状地基在Hankel变化域内的解答, 利用Fortran程序对其进行Hankel逆变换, 可求出物理域内的解。

2 刚性圆板与土的共同作用分析

刚性圆板与横观各向同性层状地基的共同作用如图1所示。假定刚性圆板的半径为 R , 受外部荷载 q 作用, 地基反力为 $\phi(r)$ 。在 $\phi(r)$ 作用下, 引起地基土中任意点 $M(r, z)$ 的竖向位移 $W(r, z)$ 为

$$W(r, z) = \int_0^R \phi(r_1) w(r, z, r_1, 0) dr_1, \quad (3)$$

式中, $w(r, z, r_1, 0)$ 表示地基表面在半径为 r_1 处作用单位竖向环形线荷载时, 引起点 $M(r, z)$ 的竖向位移, 它可由横观各向同性层状地基上作用一竖向集中力时的解析层元解沿环形积分求得。

考虑刚性圆板与地基接触的位移协调条件:

$$W(r, 0) = \omega \quad (r < R), \quad (4)$$

式中, ω 为预先给定的刚性圆板的竖向位移。

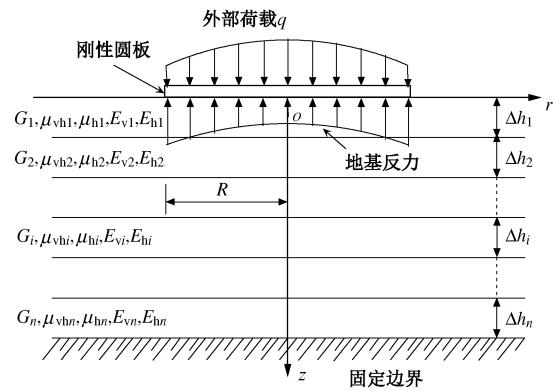


图 1 层状横观各向同性地基上的刚性圆板

Fig. 1 A rigid circular disc on transversely isotropic layered soils

将式(4)代入式(3), 得

$$\int_0^R \phi(r_1) w(r, 0, r_1, 0) dr_1 = \omega. \quad (5)$$

方程(5)为关于 $\phi(r)$ 的边界积分方程, 可以用数值方法求解。首先, 将圆板范围内的土体沿径向划分为 m 个单元(即 m 个圆环), 则 i 单元的竖向位移 W_i 可表示为

$$W_i = \sum_{j=1}^m \phi_j K_{ji} = \omega, \quad (6)$$

式中, $i = 1, 2, 3, \dots, m$, ϕ_j 为 j 单元的圆形线接触应力即地基反力, K_{ji} 表示在 j 单元圆形线接触应力作用下, 引起 i 单元的竖向位移。 K_{ji} 具体表达式如下:

$$K_{ji} = \int_{(j-1)A}^{jA} w(r, 0, r_1, 0) dr_1, \quad (7)$$

式中, $A = R/m$, $r = \frac{iA + (i-1)A}{2}$ 。

由式(6)可得

$$K\phi = \omega, \quad (8)$$

式中, $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m]^T$, K 为 $m \times m$ 的矩阵, $\omega = [\omega, \omega, \dots, \omega]^T$ 为已知的常数列向量。

于是, 圆形线接触应力的表达式为

$$\phi = K^{-1}\omega, \quad (9)$$

由式(9)即可求得各圆环处的接触应力。

求得圆形线接触应力后, 便可求得其它待求量。例如, 刚性圆板所承受的总荷载 P 可用下式计算:

$$P = \sum_{j=1}^m \phi_j R/m. \quad (10)$$

3 数值计算与分析

根据上述分析方法, 编写了相应的计算程序, 并对横观各向同性弹性半无限体及分层地基表面上的刚

性圆板进行数值计算与分析。

3.1 验证

由于目前文献中缺乏层状横观各向同性地基与刚性圆板共同作用的数值解答, 故将地基退化为各向同性地基并与参考文献[5]进行比较。算例中地基为两层土, 具体参数及地基反力的对比见图2。由图2可知, 本文计算结果与文献[5]所得的结果是吻合的。

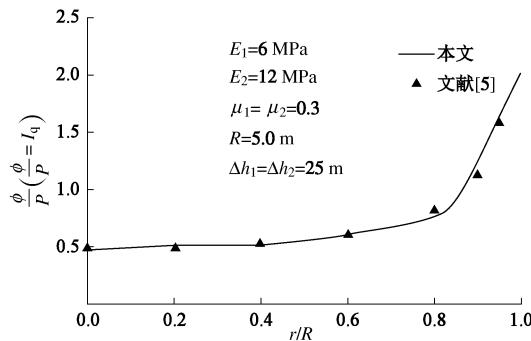


图2 与文献[5]的地基反力结果对比

Fig. 2 Comparison of subgrade reactions with Reference [5]

为了进一步验证本文理论与数值计算方法的正确性, 取单层横观各向同性地基与刚性圆板共同作用, 并与有限元软件ABAQUS的计算结果进行对比。其中, 刚性圆板的半径 $R=5.0\text{ m}$, 刚性基础竖向位移 $\omega=0.1\text{ m}$, 地基参数以及接触应力的计算结果见图3 (图3中的计算结果已进行了无量纲化处理)。由图3可知, 本文数值计算结果和ABAQUS模拟的结果也是吻合的。

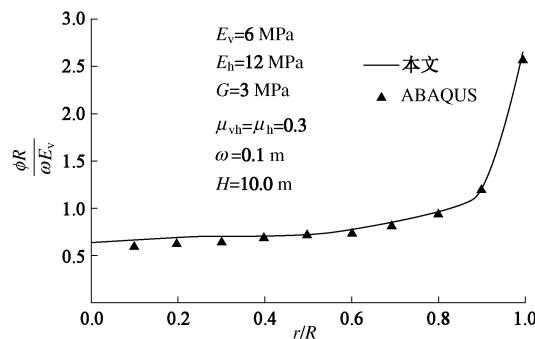


图3 与ABAQUS的地基反力结果对比

Fig. 3 Comparison of subgrade reactions with ABAQUS

上述计算及对比结果不仅证明了本文理论的正确性, 同时也说明本文数值计算方法能满足精度要求。

3.2 m 值对地基反力的影响

在横观各向同性地基中, 剪切模量 G 与竖直方向弹性模量 E_v 的比值 m 对地基的应力应变有一定的影响, 故本节研究不同 m 值下地基反力的变化。

分别取 $m=0.5, 1.0, 1.5$ 进行数值计算, 地基反

力和地基参数见图4。由图4可知, 在 E_v, E_h 保持不变的情况下, 横观各向同性地基的地基反力随着剪切模量 G 的增大而增大。

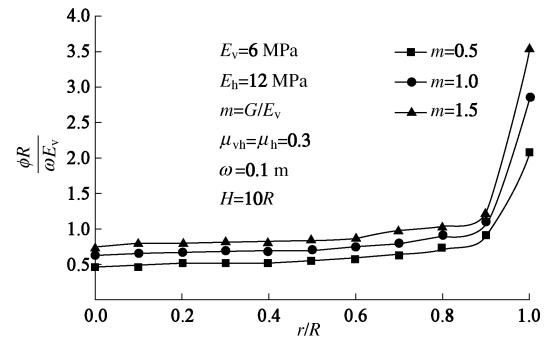


图4 m 值对地基反力的影响

Fig. 4 Variation of subgrade reactions with different values of m

3.3 土层厚度对地基反力的影响

在实际工程中, 经常遇到坚硬层位于不同深度的情况, 本算例分析横观各向同性地基中不同的压缩土层厚度对基底反力的影响。取土层厚度 H 分别为 $2R, 5R, 20R$ 的情况进行分析, 计算结果如图5所示。图5表明, 横观各向同性地基的地基反力随地基土厚度的增大而减小。因此, 在工程实践中, 当坚硬土层埋深较浅时, 应采取适当措施对地基反力加以控制。

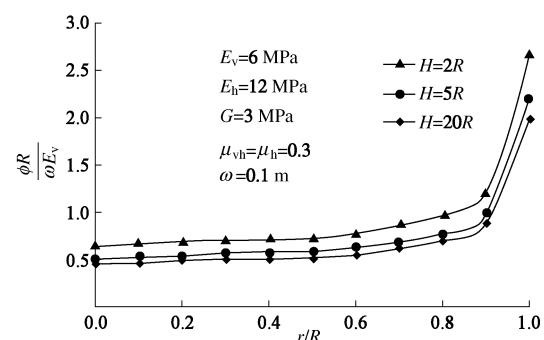


图5 土层厚度对地基反力的影响

Fig. 5 Variation of subgrade reactions with thickness of soils

3.4 地基成层性对地基反力的影响

地基土往往是成层分布的, 沿深度方向土体呈现出多样的分布情况, 本算例选取3种具有代表性的成层情况来研究横观各向同性地基的成层性对地基反力的影响。计算时地基分为3层, 且各层厚度均为 $5R$, 地基土的其它参数见表1。

表1 计算工况一览

Table 1 List of different calculation cases (MPa)

工况	土层一		土层二		土层三	
	E_{v1}	E_{h1}	E_{v2}	E_{h2}	E_{v3}	E_{h3}
case1	9	18	6	12	3	6
case2	6	12	6	12	6	12
case3	3	6	6	12	9	18

地基反力的模拟计算结果见图 6, 由图 6 可以看出: 地基的成层性对地基反力的影响较为显著, 上述 3 种工况水平向弹性模量和竖直方向弹性模量经过加权平均后的数值均相同, 而地基反力随着上层土的弹性模量的增大而明显减小。由此可见, 计算时考虑土的分层特性是很有必要的, 尤其是要注意首层土的弹性模量的影响。

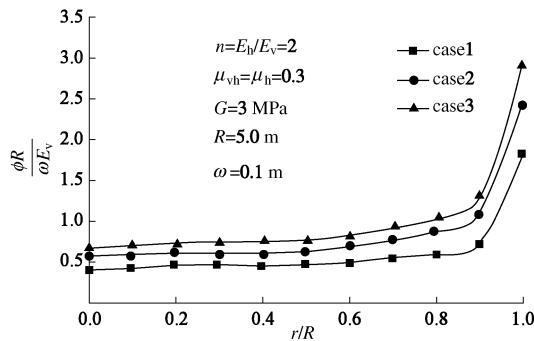


图 6 地基成层性对地基反力的影响

Fig. 6 Variation of subgrade reactions with stratification of soils

4 结 论

本文分析了横观各向同性层状地基上的刚性圆板问题, 得到了在给定位移下刚性圆板与地基间的接触应力, 编制相应的计算程序进行数值计算, 通过与已有文献及有限元软件 ABAQUS 模拟计算的结果进行对比, 验证了本文理论和数值计算方法的正确性, 分析探讨了地基横观各向同性参数、地基厚度和地基成层性对地基反力的影响, 得到以下 3 点结论。

(1) 在横观各向同性地基弹性模量 E_v , E_h 相同的情况下, 接触应力随着剪切模量 G 的增大而增大。

(2) 横观各向同性地基的接触应力随着地基厚度的增大而减小。

(3) 在水平向弹性模量与竖直方向弹性模量加权平均值各自相同的情况下, 地基反力随着上层土的弹性模量的减小而明显增大。

参考文献:

[1] BUTTERFIELD R, BANERJEE P K. A rigid disc embedded in

- an elastic half space[J]. *Géotechnique*, 1971, **21**(2): 35 – 49.
- [2] BROW P T. Analysis of raft on clay[D]. Sydney: University of Sydney, 1972.
- [3] POULOS H G, DAVIS E H. Solutions for Soil and Rock Mechanics[M]. New York: Wiley, 1974.
- [4] CHOW Y K. Vertical deformation of rigid foundations of arbitrary shape on layered soil media[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1987, **11**(1): 1 – 15.
- [5] MILOVIC D. Stresses and displacements for shallow foundations[M]. Amsterdam: Elsevier, 1992.
- [6] 袁聚云, 孙祥波. 传递矩阵法分析中心荷载下对称刚性板地基沉降和反力[J]. 力学季刊, 2005, **26**(2): 316 – 321. (YUAN Ju-yun, SUN Xiang-bo. Analysis of settlement and contact pressure of symmetric rigid plate on subgrade under central concentrated load with method of transferring matrix[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2005, **26**(2): 316 – 321. (in Chinese))
- [7] 艾智勇, 梅阿敏. 多层地基上轴对称受荷刚性圆板问题[J]. 力学季刊, 2008, **29**(3): 425 – 429. (AI Zhi-yong, MEI A-min. Axisymmetric loaded rigid circular plate on multi-layered soil[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2008, **29**(3): 425 – 429. (in Chinese))
- [8] 艾智勇, 张逸帆. 层状横观各向同性地基与刚性条形基础共同作用分析[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(4): 752 – 756. (AI Zhi-yong, ZHANG Yi-fan. Interactive analysis of a rigid strip footing on transversely isotropic layered soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(4): 752 – 756. (in Chinese))
- [9] 艾智勇, 仓乃瑞, 成怡冲. 解析层元法求解层状横观各向同性地基轴对称问题[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(5): 863 – 867. (AI Zhi-yong, CANG Nai-rui, CHENG Yi-chong. Analytical layer-element method for axisymmetric problem of transversely isotropic multilayered soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(5): 863 – 867. (in Chinese))