

DOI: 10.11779/CJGE201412013

# 浅埋隧道围岩应力及位移的显式解析解

韩凯航, 张成平\*, 王梦恕

(北京交通大学城市地下工程教育部重点实验室, 北京 100044)

**摘要:** 浅埋隧道施工引起的地层位移将传递至地表进而形成地表沉降, 施工前准确预测地层位移是有效控制地表沉降的前提。基于复变函数法, 利用逆映射函数求解 $z$ 平面复势函数的级数形式, 并结合柯西-黎曼方程(C-R条件)对Verruijt提出的浅埋隧道围岩应力及位移隐式解析解中的解析函数求导, 得出了浅埋隧道应力及位移函数的级数显式表达式; 与Verruijt隐式解析解相比, 该显式解析解直观, 便于被工程人员使用, 其编程计算量也较小; 为确定显式解析解中的未知系数, 基于浅埋隧道洞室变形产生的原因, 提出了3种隧道洞室边界的变形模式和2种变形比率, 合理调整变形比率可以实现多种边界条件组合。工程实测地层位移与显示解析解的计算结果吻合度高, 验证了所提显式解析解的正确性和实用性。

**关键词:** 浅埋隧道; 应力和位移; 显式解析解; 变形模式; 复变函数法

**中图分类号:** TU457; U451.2      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-4548(2014)12-2253-07

**作者简介:** 韩凯航(1989-), 男, 博士研究生, 主要从事隧道及地下工程施工影响预测方面的研究。E-mail: han\_kaihang@126.com。

## Explicit analytical solutions for stress and displacement of surrounding rock in shallow tunnels

HAN Kai-hang, ZHANG Cheng-ping, WANG Meng-shu

(MOE Key Laboratory of Urban Underground Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** The ground movements caused by urban shallow tunnelling can be passed to the ground surface and then form surface settlements. It is necessary to accurately predict the ground movements before tunnelling for effectively controlling the ground settlements. Based on the complex variable function method, the series forms of complex potential functions in  $z$ -plane are first obtained using the inverse mapping function. By taking the derivative of analytical functions proposed by Verruijt with Cauchy-Riemann equations, explicit analytical solutions for the stress and displacement induced by shallow tunnelling are obtained. The explicit solutions are intuitional and easily used by engineers, which have smaller amount of calculation than the solutions proposed by Verruijt. Moreover, by improving the previous researches on deformation modes of shallow tunnels, three deformation modes and two deformation ratios are put forward. Finally, the explicit solutions are compared with the field test data of two tunnel projects, and the accuracy and practicability of the proposed explicit solutions are proved.

**Key words:** shallow tunnel; stress and displacement; explicit analytical solution; deformation mode; complex variable function method

## 0 引言

随着城市交通的不断发展, 以城市地铁及地下道路等为代表的城市隧道的修建将会大大增加, 这类隧道往往埋深较浅, 受到地面及地层中的建构筑物等复杂荷载的综合作用, 施工过程中的地层位移影响因素多, 准确预测地层位移较为困难。随着人们环保意识的不断增强, 城市隧道施工引起的地层位移及其对周围环境的影响控制问题已被相关学者充分重视, 而隧道施工前准确地预测地层位移是有效控制施工对环境影响程度的前提。

20世纪以来, 复变函数理论已被广泛地应用在弹性力学领域, 如徐芝纶<sup>[1]</sup>、Timoshenko等<sup>[2]</sup>、Muskhelishvili等<sup>[3]</sup>对此都有相关论述。Verruijt<sup>[4-5]</sup>系统阐述了利用复变函数法分析浅埋隧道周边围岩应力及位移的思路, 避免了双极坐标法计算上的困难, 也避

基金项目: 国家自然科学基金项目(51378002, 51008015); 新世纪优秀人才支持计划(NCET-12-0770); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2012JBZ013)

收稿日期: 2014-02-25

\*通讯作者

免了镜像法中关于奇点假设的不足，在给出应力场的同时还直接给出位移场的精确解析解。由于解决浅埋隧道周边应力场及位移场的精确性，复变函数法已被众多学者青睐，并在此基础上做了进一步研究<sup>[6-8]</sup>。

然而，Verruijt 提出的解法在求解时涉及两复平面的反复映射，应力及位移解不能直接由保角映射前  $R$  域内坐标  $(x, y)$  的函数表示，即可称 Verruijt 提出的解法为隐式解析解（后文中简称为 Verruijt 解）。其存在以下几点不便：①该解法需要一定的专业理论知识，若不是研究复变函数的专业人员，无法像 Peck 经验公式那样直接被工程人员使用，而对于显式解析解，工程人员可以通过直接输入地层参数来求得应力及位移，这就使工程人员不必要花费很多时间来研究其复杂的映射原理；②Verruijt 求解过程涉及两个复平面的反复映射，计算效率低，求解过程复杂，编程计算量大，而显式解析解，可以直接将应力及位移编程为保角映射前  $R$  域内坐标  $(x, y)$  的函数，计算量较小；③Verruijt 解不直观，在叠加求解承载地层条件下隧道施工引起的围岩应力及位移时，其适用性较差。综上所述，推导基于复变函数法的浅埋隧道围岩应力场及位移场的显式解析解，有重要的理论意义和工程应用价值。

本文基于复变函数法，利用逆映射函数求解  $z$  平面复势函数的级数形式，并结合柯西-黎曼方程（C-R 条件）对 Verruijt 提出的浅埋隧道围岩应力及位移隐式解析解中的解析函数求导，得出浅埋隧道应力场及位移场函数的级数显式表达式，并提出 3 种隧道洞室边界的变形模式和 2 种变形比率，用以确定显式解析解中的未知系数。通过与工程实测数据对比分析，验证本文显式解析解的正确性和实用性。

## 1 应力及位移显式表达式推导

### 1.1 Verruijt 隐式解析解

Verruijt 在文献[4]中详细论述了复变函数法求解浅埋隧道应力及位移的问题。其基本原理为：平面问题的解，可以表示为区域  $R$ （除去孔洞的半平面  $y < 0$ ）内处处解析的复势  $\varphi_1(z)、\psi_1(z)$ ，浅埋隧道应力解及位移解可根据下式确定：

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2\{\varphi'_1(z) + \overline{\varphi'_1(z)}\} = 4\operatorname{Re}[\varphi'_1(z)] , \quad (1a)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2\{\bar{z}\varphi''_1(z) + \psi'_1(z)\} , \quad (1b)$$

$$2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\varphi_1(z) - z\varphi'_1(z) - \overline{\psi_1(z)} . \quad (1c)$$

半无限平面内只考虑一个孔洞时，映射函数为

$$z = \omega(\zeta) = -ih \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \frac{1+\zeta}{1-\zeta} = -ia \frac{1+\zeta}{1-\zeta} , \quad (2)$$

式中， $\alpha$  是由洞室半径  $r$  与洞室圆心埋深  $h$  的比值  $(r/h)$  定义的一个参数，可以表示为

$$\frac{r}{h} = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} . \quad (3)$$

保角映射后的  $\gamma$  域内解析函数为

$$\varphi(\zeta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k} , \quad (4a)$$

$$\psi(\zeta) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \zeta^{-k} . \quad (4b)$$

并与  $\varphi_1(z)、\psi_1(z)$  存在以下关系： $\varphi_1(z) = \varphi_1(\omega(\zeta)) = \varphi(\zeta)$ ， $\psi_1(z) = \psi_1(\omega(\zeta)) = \psi(\zeta)$ 。

然而，如图 1 所示，映射前区域  $R$  内每点的坐标可用  $(x, y)$  表示，映射后区域  $\gamma$  内每点的坐标可用  $(\zeta, \eta)$  表示。求解过程涉及两复平面的映射，即如需要求一点  $(x, y)$  处的应力或位移值，须先用映射函数映射到区域  $\gamma$  内得到与之对应的点  $(\zeta, \eta)$ ，求出值后再映射回相应的  $(x, y)$  点。也就是说，在求解过程中应力及位移解不能直接由保角映射前  $R$  域内坐标  $(x, y)$  的函数表示，对工程人员来说应用起来十分不便。

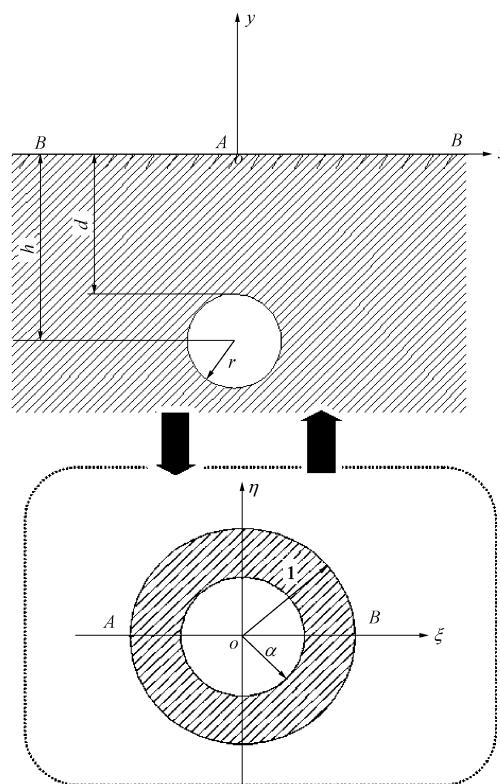


图 1 “黑箱理论”示意图

Fig. 1 Diagram of black box theory

### 1.2 显式解析解推导

本文将保角映射后的  $\gamma$  域内作为一个“黑箱”（见图 1），试图得出用保角映射前  $R$  域内坐标  $(x, y)$  表示的应力及位移场的显式表达函数，藉此在保留

Verruijt 解精度的同时, 为工程应用人员提供一个简洁实用的形式。为此, 采用逆映射函数将  $\zeta$  平面解析函数  $\varphi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  转化为  $z$  平面解析函数  $\varphi_1(z)$ ,  $\psi_1(z)$ , 结合柯西-黎曼方程 (C-R 条件) 对 Verruijt 提出的浅埋隧道围岩应力及位移隐式解析解中的解析函数进行求导, 得出应力函数及位移函数的级数显式表达形式, 根据具体问题的边界条件求出显式公式中的相关系数, 进而给出该具体问题的地层应力及位移的显式表达式。

(1)  $z$  平面复势函数级数形式的求解

式 (2) 相应的逆映射函数为

$$\zeta = \omega^{-1}(z) = \frac{z + ia}{z - ia} , \quad (5)$$

若设  $z=x+iy$ , 则式 (5) 可变形为

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2 - a^2 + 2xai}{x^2 + (y-a)^2} = U + Vi , \quad (6)$$

式中,  $U = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{x^2 + (y-a)^2}$ ,  $V = \frac{2xa}{x^2 + (y-a)^2}$ 。

然后将式 (6) 转化为复数  $\zeta$  的三角形式如下:

$$\zeta = (\sqrt{U^2 + V^2}) \left\{ \cos \left( \arccos \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \right) + i \sin \left( \arccos \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \right) \right\} , \quad (7)$$

由复数的幂次运算的相关法则可知

$$\zeta^k = (\sqrt{U^2 + V^2})^k \left\{ \cos \left[ k \left( \arccos \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \right) \right] + i \sin \left[ k \left( \arccos \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \right) \right] \right\} . \quad (8)$$

根据问题的对称性, Verruijt 假定所有系数均为纯虚数, 为方便 (简化) 之后的求导, 将复势函数转化为实部和虚部的形式, 可设

$$\begin{aligned} a_0 &= a'_0 i , a_k = a'_k i , b_k = b'_k i , \\ c_0 &= c'_0 i , c_k = c'_k i , d_k = d'_k i . \end{aligned} \quad (9)$$

则复势函数式 (4a) 及式 (4b) 可变形为

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k} \\ &= a'_0 i + \sum_{k=1}^{\infty} a'_k i (\sqrt{U^2 + V^2})^k \left\{ \cos \left[ k \left( \arccos \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \right) \right] + i \sin \left[ k \left( \arccos \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \right) \right] \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k i (\sqrt{U^2 + V^2})^{-k} \cdot \\ &\quad \left\{ \cos [(-k)(\arccos \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}})] + i \sin [(-k)(\arccos \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}})] \right\} + \end{aligned}$$

$$i \sin \left[ (-k) \left( \arccos \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \right) \right] \} , \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \zeta^{-k} \\ &= c'_0 i + \sum_{k=1}^{\infty} c'_k i (\sqrt{U^2 + V^2})^k \left\{ \cos \left[ k \left( \arccos \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \right) \right] + i \sin \left[ k \left( \arccos \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \right) \right] \right\} + \\ &\quad \left\{ \cos \left[ (-k) \left( \arccos \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \right) \right] + i \sin \left[ (-k) \left( \arccos \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \right) \right] \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} d'_k i (\sqrt{U^2 + V^2})^{-k} \cdot \\ &\quad \left\{ \cos \left[ (-k) \left( \arccos \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \right) \right] + i \sin \left[ (-k) \left( \arccos \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} \right) \right] \right\} . \end{aligned} \quad (10b)$$

简化式 (10a)、(10b), 并考虑到式 (4a)、(4b) 得

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \varphi_1(\omega(\zeta)) = \varphi(\zeta) \\ &= \left\{ a'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a'_k W_1 + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k W_2 \right\} i - \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a'_k W_3 + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k W_4 \right\} , \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= \psi_1(\omega(\zeta)) = \psi(\zeta) \\ &= \left\{ c'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c'_k W_1 + \sum_{k=1}^{\infty} d'_k W_2 \right\} i - \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c'_k W_3 + \sum_{k=1}^{\infty} d'_k W_4 \right\} . \end{aligned} \quad (11b)$$

式中,

$$\begin{aligned} W_1 &= \left[ \frac{x^2 + (y+a)^2}{x^2 + (y-a)^2} \right]^{\frac{k}{2}} \cdot \\ &\quad \cos \left[ k \arccos \left( \frac{x^2 + y^2 - a^2}{\sqrt{x^4 + y^4 + a^4 + 2a^2x^2 + 2x^2y^2 - 2a^2y^2}} \right) \right], \\ W_2 &= \left[ \frac{x^2 + (y+a)^2}{x^2 + (y-a)^2} \right]^{\frac{k}{2}} \cdot \\ &\quad \cos \left[ (-k) \arccos \left( \frac{x^2 + y^2 - a^2}{\sqrt{x^4 + y^4 + a^4 + 2a^2x^2 + 2x^2y^2 - 2a^2y^2}} \right) \right], \\ W_3 &= \left[ \frac{x^2 + (y+a)^2}{x^2 + (y-a)^2} \right]^{\frac{k}{2}} \cdot \\ &\quad \sin \left[ k \arccos \left( \frac{x^2 + y^2 - a^2}{\sqrt{x^4 + y^4 + a^4 + 2a^2x^2 + 2x^2y^2 - 2a^2y^2}} \right) \right], \\ W_4 &= \left[ \frac{x^2 + (y+a)^2}{x^2 + (y-a)^2} \right]^{\frac{k}{2}} \cdot \\ &\quad \sin \left[ (-k) \arccos \left( \frac{x^2 + y^2 - a^2}{\sqrt{x^4 + y^4 + a^4 + 2a^2x^2 + 2x^2y^2 - 2a^2y^2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

(2) 根据柯西-黎曼方程对解析函数求导

因为  $\phi(\zeta)$ 、 $\psi(\zeta)$  都是解析函数, 根据柯西-黎曼方程(C-R 条件)可知: 当  $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$  在点  $z=x+iy$  可微时, 其导数可由下式来计算:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y} \quad . \quad (12)$$

于是, 对  $\phi_1(z)$  及  $\psi_1(z)$  (即式(11a)及式(11b)) 求导, 得

$$\begin{aligned} \phi'_1(z) = & \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \frac{\partial}{\partial x} W_1 + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k \frac{\partial}{\partial x} W_2 \right\} i - \\ & \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \frac{\partial}{\partial x} W_3 + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k \frac{\partial}{\partial x} W_4 \right\} , \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \psi'_1(z) = & \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c'_k \frac{\partial}{\partial x} W_1 + \sum_{k=1}^{\infty} d'_k \frac{\partial}{\partial x} W_2 \right\} i - \\ & \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c'_k \frac{\partial}{\partial x} W_3 + \sum_{k=1}^{\infty} d'_k \frac{\partial}{\partial x} W_4 \right\} , \end{aligned} \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} \phi''_1(z) = & \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_1 + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_2 \right\} i - \\ & \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_3 + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_4 \right\} . \end{aligned} \quad (13c)$$

(3) 浅埋隧道围岩应力及位移求解

将式(13a)、(13b)、(13c)代入式(1a)、(1b)、(1c)得应力函数及位移函数的显式表达式:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (-2a'_k + c'_k) \frac{\partial}{\partial x} W_3 + (-2b'_k + d'_k) \frac{\partial}{\partial x} W_4 - \right. \\ & \left. y \left( a'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_1 + b'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_2 \right) + x \left( a'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_3 + b'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_4 \right) \right] , \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -(2a'_k + c'_k) \frac{\partial}{\partial x} W_3 - (2b'_k + d'_k) \frac{\partial}{\partial x} W_4 + \right. \\ & \left. y \left( a'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_1 + b'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_2 \right) - x \left( a'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_3 + b'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_4 \right) \right] , \end{aligned} \quad (14b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c'_k \frac{\partial}{\partial x} W_1 + d'_k \frac{\partial}{\partial x} W_2 + \right. \\ & \left. x \left( a'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_1 + b'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_2 \right) + y \left( a'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_3 + b'_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_4 \right) \right] , \end{aligned} \quad (14c)$$

$$\begin{aligned} u_y = & (2\mu)^{-1} \left\{ (\kappa a'_0 + c'_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (\kappa a'_k + c'_k) W_1 + (\kappa b'_k + d'_k) W_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. x \left( a'_k \frac{\partial}{\partial x} W_1 + b'_k \frac{\partial}{\partial x} W_2 \right) + y \left( a'_k \frac{\partial}{\partial x} W_3 + b'_k \frac{\partial}{\partial x} W_4 \right) \right] \right\} , \end{aligned} \quad (14d)$$

$$u_x = (2\mu)^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (-\kappa a'_k + c'_k) W_3 + (-\kappa b'_k + d'_k) W_4 + \right. \right.$$

$$x \left( a'_k \frac{\partial}{\partial x} W_3 + b'_k \frac{\partial}{\partial x} W_4 \right) - y \left( a'_k \frac{\partial}{\partial x} W_1 + b'_k \frac{\partial}{\partial x} W_2 \right) \right] \right\} . \quad (14e)$$

### 1.3 显式解析解优越性分析

(1) 式(14a)~(14e)中, 将保角映射后的  $\gamma$  域内作为一个“黑箱”, 应力及位移函数显式解析解, 其左右两边都是映射前  $R$  域内的形式, 对于工程人员, 不需要研究其理论原理, 可以如 Peck 经验公式那样, 通过直接输入参数, 即可直接通过坐标  $(x, y)$  求得相应点的值。

(2) 式(14a)~(14e)中, 所含输入参数可分为两组: ①隧道几何及地层参数:  $E$ ,  $\mu$ ,  $v$ ,  $\kappa$ ,  $h$ ,  $r$ ,  $a$ 。从形式上讲, 因其含所有坐标  $(x, y)$  为显式解析解表达式的主体函数部分, 确定了函数的几何形状; ②变形边界条件相关系数:  $a_0$ ,  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_0$ ,  $c_k$ ,  $d_k$ , 可由隧道边界变形条件确定。从形式上讲, 其为主体函数部分的系数, 确定了函数的几何尺寸大小。因此, 显式解析解能明确研究不同地层参数及变形边界条件对解析解的影响规律。

(3) 式(14a)~(14e)中, 编程过程只涉及映射前复平面, 计算效率较隐式解析解高, 求解过程简单, 可以通过直接输入地层参数来求得所得的应力及位移。显式解析解可以直接将应力及位移编程为保角映射前  $R$  域内用坐标  $(x, y)$  的函数, 计算量较小, 计算效率高。

## 2 浅埋隧道洞室变形模式

显式解析解中, 变形边界条件相关系数  $a_0$ ,  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_0$ ,  $c_k$ ,  $d_k$  可由隧道边界变形条件确定, 因此, 合理的确定浅埋隧道洞室变形模式是本文另一重点研究的问题。国内外学者对隧道洞室变形进行了一系列的研究, Verruijt<sup>[4]</sup>、Bobet 等<sup>[9]</sup>认为, 隧道地层变形是均匀径向收缩, 包括了盾尾空隙和衬砌自收缩变形; Loganathan 等<sup>[10]</sup>在 Verruijt<sup>[4]</sup>提出的孔洞径向收缩变形的基础上提出了孔洞的椭圆化变形; Park<sup>[11]</sup>简化出 4 种用三角级数表示的径向变形模式。

从隧道洞室变形产生的原因分析, 本文总结并改进了以上学者的隧道洞室变形模式, 认为应采用图 2 所示的 3 种隧道洞室变形模式: ①均布径向收缩(地层损失)  $u_0$ , 由周边围岩对隧道的体积应力引起, 使隧道体积发生改变而形状不变; ②椭圆化变形  $u_t$ , 由周边围岩对隧道的偏应力引起, 使隧道形状发生改变而体积不变; ③竖向位移  $u_s$ , 一方面隧道衬砌由于自身重力影响, 离开盾尾后自身发生沉降, 另一方面由于衬砌重量轻于被开挖地层材料重量而产生的浮力效

应影响, 这两种影响综合考虑即可。因此, 开挖造成的隧道洞室变形为径向收缩、椭圆化变形和竖向位移3种基本方式的综合作用。

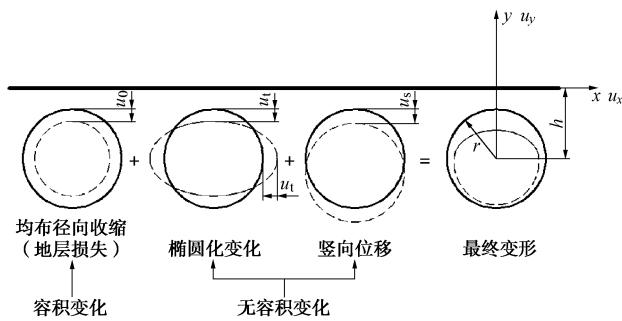


图2 浅埋隧道变形模式示意图

Fig. 2 Deformation modes of shallow tunnel

由于各工程实测隧道洞室变形数据往往只是均匀径向收缩变形, 如何确定椭圆化变形及竖向沉降的大小将成为一个问题。基于此, 本文提出两个比率, 用以根据径向收缩变形去量化椭圆化变形及竖向沉降的大小,  $\rho_t$  为椭圆化比率,  $\rho_s$  为竖向沉降比率, 定义如下式所示:

$$\rho_t = \frac{u_t}{u_0}, \quad (15a)$$

$$\rho_s = \frac{u_s}{u_0}. \quad (15b)$$

之前的学者对于隧道洞室变形模式的研究仅仅是提取有限的几种, 本文提出的两个比率, 改进了之前学者对隧道洞室变形边界的研究, 即可通过改变两参数的大小, 去研究多种不同组合的隧道洞室变形。

根据隧道边界变形  $u_0$ ,  $u_t$ ,  $u_s$  的值, 可由 Verrijt<sup>[4]</sup>提出的方法确定变形边界条件相关系数  $a_0$ ,  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_0$ ,  $c_k$ ,  $d_k$  的值。将  $a_0$ ,  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_0$ ,  $c_k$ ,  $d_k$  及  $E$ ,  $\mu$ ,  $v$ ,  $\kappa$ ,  $h$ ,  $r$ ,  $a$  的值代入式(14a)~(14e)中, 则式(14a)~(14e)简化为只含  $x$  和  $y$  函数的表达式。此时, 可根据具体的  $x$  和  $y$  的值, 求得相应位置处的围岩应力及位移。

### 3 显式解析解应用及验证

为说明显式解析解的实用性, 现引用以下两组隧道实例进行分析。两组隧道<sup>[12-13]</sup>的施工方法为 EPB, 地层性质为软黏土,  $r=1.85$  m,  $h=9.70$  m, 泊松比为 0.5, 其余参数见表 1。工程中, 实测点的位移常采用延伸仪及倾角仪测量, 可得到地层中水平及竖向测线上监测点的水平及竖向位移。运用本文推导的显式解析公式式(14d)~(14e), 可以简洁方便地提出

大量地层各点位移数据, 现将工程实测数据及解析解进行对比, 结果分析如下:

#### (1) 旧金山 4 号线隧道 N-2 标段

旧金山 4 号线隧道 N-2 标段使用直径为 3.7 m EPB 盾构机修建直径为 3.56 m 的隧道。该工程施工时, 采用仪器布置 23 个测点测量地层的竖向及水平位移, 如图 3 所示。圆点为实测数据, 实线为显式解析解每隔 1 m 提取数据连线做出的曲线。

表 1 隧道几何尺寸及地层参数

Table 1 Tunnel geometry and soil parameters

项目	$u_0/\text{mm}$	$\rho_t$	$\rho_s$
4 号线隧道	16.00	2.11	0.5
2 号线隧道	56.00	0.61	0.5

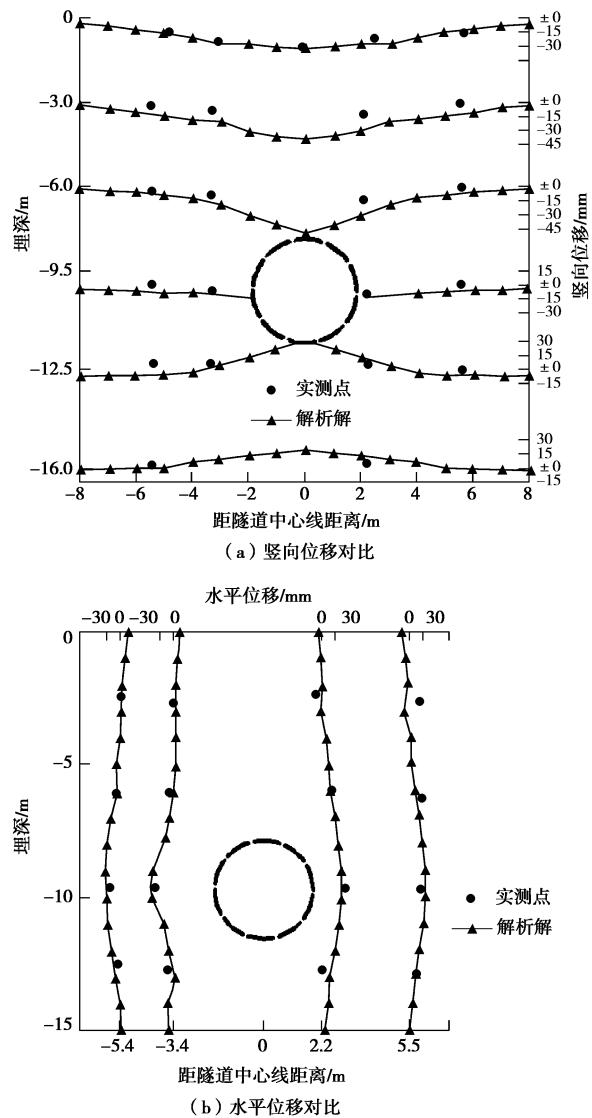


图 3 解析解与实测位移对比图(旧金山 4 号线隧道 N-2 标段)

Fig. 3 Comparison between computed and measured displacements (N-2 Tunnel, San Francisco Line No. 4)

## (2) 旧金山 2 号线隧道 N-2 标段

为不失解析解的普遍性,同样的方法去研究旧金山 2 号线隧道 N-2 标段显式解析解与实测地层位移,如图 4 所示。

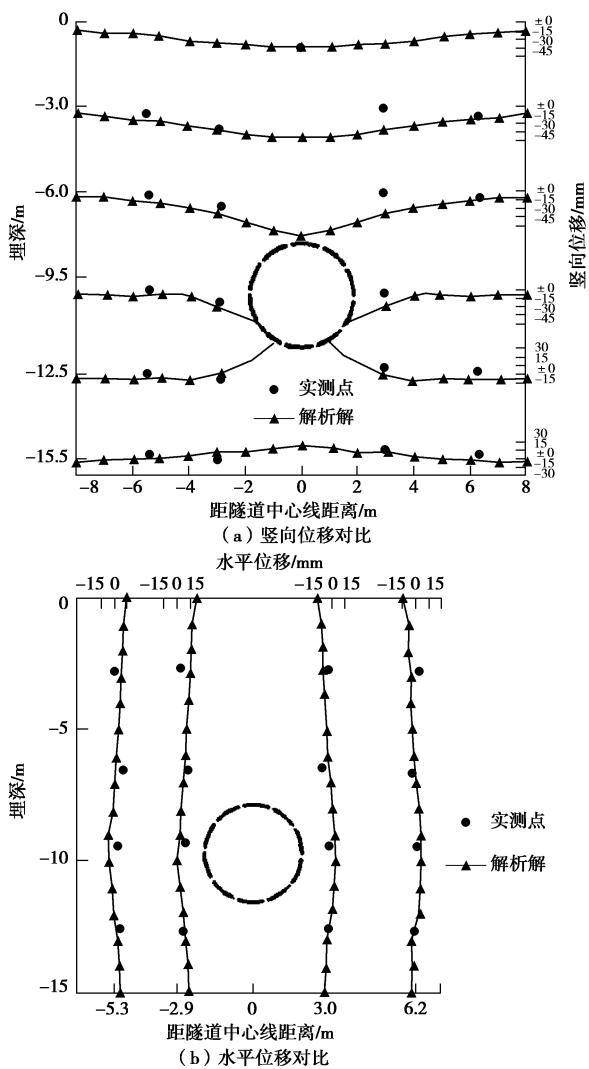


图 4 解析解与实测位移对比图(旧金山 2 号线隧道 N-2 标段)

Fig. 4 Comparison between computed and measured displacements (N-2 Tunnel, San Francisco Line No. 2)

由图 3, 4 可知,绝大部分实测点都与显式解析解重合,表明本文推导的基于复变函数法的显式解析解可以很好地预测隧道施工引起的地层位移。

通过以上分析可见,显示解析解的优势在于可以方便工程人员做出多条地表及地层内部测线,用以系统研究地层内位移变化规律,实用性好,对城市隧道施工的沉降预测有重要意义。而且,若研究地面及地层中的建构筑物等荷载作用下的地层应力及位移,较隐式解析解而言,可以更加方便地叠加各种荷载,从而大大提高复杂条件下隧道施工地层应力及位移的计算效率。

## 4 结 论

(1) 利用逆映射函数将  $\zeta$  平面解析函数  $\varphi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  转化为  $z$  平面解析函数  $\varphi_1(z)$ ,  $\psi_1(z)$ ,结合柯西-黎曼方程(C-R 条件)对 Verruijt 提出的浅埋隧道围岩应力及位移隐式解析解中的解析函数求导,得出了应力函数及位移函数的级数显式表达形式;该显式解析解直观,便于被工程人员使用,且较隐式解析解的编程计算量小。

(2) 基于隧道洞室变形产生的原因,提出了 3 种隧道洞室边界的变形模式,并定义了 2 种变形比率,该比率可用于根据径向收缩变形去量化椭圆化变形及竖向沉降变形,合理的调整其大小可实现多种边界条件的不同组合,据此可确定浅埋隧道围岩应力及位移显式解析解中的未知系数。

(3) 基于工程实例,将浅埋隧道围岩应力及位移显式解析解进行了应用,并将显式解析解的理论计算结果与工程实测地层位移进行了对比分析,验证了本文显式解析解的正确性和实用性。

## 参 考 文 献:

- [1] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004. (XU Zhi-lun. Theory of elasticity[M]. Beijing: Higher Education Press, 2004. (in Chinese))
- [2] TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. Theory of elasticity[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. (TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. Theory of elasticity[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese))
- [3] MUSKHELISHVILI N I. Mathematical theory of elasticity[M]. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1954.
- [4] VERRUIJT A. A complex variable solution for a deforming circular tunnel in an elastic half-plane[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1997, 21(2): 77 - 89.
- [5] VERRUIJT A. Deformations of an elastic half-plane with a circular cavity[J]. International Journal for Solids and Structures, 1998, 35(21): 2795 - 2804.
- [6] 王立忠, 吕学金. 复变函数分析盾构隧道施工引起的地基变形[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(3): 319 - 327. (WANG Li-zhong, LÜ Xue-jin. A complex variable solution for different kinds of oval deformation around circular tunnel in an elastic half plane[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(3): 319 - 327. (in Chinese))
- [7] 晏莉, 阳军生, 刘宝琛. 浅埋双孔平行隧道开挖围岩应

- 力和位移分析[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(3): 413 - 419.  
(YAN Li, YANG Jun-sheng, LIU Bao-chen. Stress and displacement of surrounding rock with shallow twin-parallel tunnels[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(3): 413 - 419. (in Chinese))
- [8] 王志良, 申林方, 姚 激, 等. 浅埋隧道围岩应力场的计算复变函数求解法[J]. 岩土力学, 2010, 31(增刊 1): 86 - 90.  
(WANG Zhi-liang, SHEN Lin-fang, YAO Ji, et al. Calculation of stress field in surrounding rocks of shallow tunnel using computational function of complex variable method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(S1): 86 - 90. (in Chinese))
- [9] BOBET A. Analytical solutions for shallow tunnels in saturated ground[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2001, 127(12): 1258 - 1266.
- [10] LOGANATHAN N, POULOS H G. Analytical prediction for tunneling-induced ground movements in clays[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1998, 124(9): 846 - 856.
- [11] PARK K H. Elastic solution for tunneling-induced ground movements in clays[J]. International Journal of Geomechanics, 2004, 4(4): 310 - 318.
- [12] PINTO F, WHITTLE A J. Ground movements due to shallow tunnels in soft ground. I: Analytical solutions[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2014, 140(4): 04013040.
- [13] PINTO F, ZYMNIS D M, WHITTLE A J. Ground movements due to shallow tunnels in soft ground. II: Analytical interpretation and prediction[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2014, 140(4): 04013041.

### 欢迎订阅《勘察科学技术》

《勘察科学技术》是由中勘冶金勘察设计研究院有限责任公司（原冶金勘察研究总院）主办的学术—技术类双月刊，是中国科技论文统计源期刊，中国地质文摘引用期刊，中国学术期刊（光盘版）、中国期刊网万方数据科技期刊群全文收录期刊，多次被评为河北省优秀期刊。

《勘察科学技术》主要介绍岩土工程设计与施工、工程地质、环境地质、水文地质及地下水资源评价、工程测量及地理信息系统、工程物探、岩土测试、工程检测及地下管网探测等专业的科研成果、生产经验、工程实录以及新理论、新技术、新方法。

《勘察科学技术》内容丰富，理论结合实际，适于从事岩

土工程及勘察的广大科研、设计、施工、监理、教学的专业技术人员及高等院校学生阅读、收藏。

《勘察科学技术》国内外公开发行，双月刊，大16开本，双月20日出版。每期定价10.0元，全年60元。邮发代号18-153。全国各地邮局均可订阅，也可随时汇款到本编辑部订阅。

本刊兼营广告，价格适中，印制精良，注重实效。

欢迎广大读者投稿、订阅和广告惠顾。

地址：河北省保定市东风中路1285号《勘察科学技术》编辑部；邮编：071069；Tel：0312-3020887, 3094054；Fax：0312-3034561；E-mail：kckxjs@163.com, kckxjs@126.com。

（《勘察科学技术》编辑部 供稿）