

DOI: 10.11779/CJGE201410024

# 面板坝堆石料四参数非线性 K-G 模型研究

金鑫鑫, 杜丽惠, 王晓玥

(清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

**摘要:** 堆石料的广泛应用使得对其本构关系的研究至关重要。在热力学原理基础上, 由吉布斯自由能函数出发, 基于内变量热力学的理论基础, 推导堆石料四参数非线性 K-G 模型, 模型理论基础严谨, 能够反映堆石料的非线性、压硬性、部分各向异性等主要工程性质, 模型参数数量少并独立。针对室内等应力比试验和面板坝的二维应力应变数值模拟, 验证了四参数 K-G 模型的合理性。依托目前世界最高混凝土面板堆石坝 233 m 的水布垭面板坝, 进行了坝体的三维应力变形计算。结果表明: 坝体的应力变形分布趋势合理, 在填筑工况下, 四参数 K-G 模型计算的垂直位移为 2.02 m, 较其他非线性模型更接近于实测值, 因此四参数 K-G 模型可以用于面板坝堆石体的应力变形计算。

**关键词:** 面板堆石坝; 本构模型; 吉布斯自由能; 四参数 K-G 模型

中图分类号: TU452

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2014)10-1947-06

**作者简介:** 金鑫鑫(1987-), 女, 博士, 主要从事堆石料本构模型研究。E-mail: jxxkl@sina.cn。

## Nonlinear four-parameter K-G model for rockfills

JIN Xin-xin, DU Li-hui, WANG Xiao-yue

(The State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** The researches on constitutive relationship for rockfills are significant because of its wide application. Based on the theory of thermodynamics, a four-parameter K-G model is derived from the Gibbs free energy function. The model is theoretically rigorous and can reflect the nonlinearity, pressure rigidity, partly anisotropy and other engineering properties. Most importantly, only four parameters which are independent of each other are needed in this model. The iso-stress ratio tests and numerical simulations of two-dimensional CFRD validate the reasonability of the model. Furthermore, three-dimensional static calculation of Shuibuya CFRD is performed. The results show that the vertical displacement is 2.02 m, which is closer to the measured value than that of other nonlinear models. Therefore, the four-parameter K-G model can be used to calculate the stress and deformation of CFRDs.

**Key words:** CFRD; constitutive model; Gibbs free energy; four-parameter K-G model

## 0 引言

混凝土面板坝以其安全性、经济性、抗震性等突出优势近年来被广泛采用。堆石坝的变形是制约其安全运行的主要因素, 由此将造成面板脱空, 面板开裂等问题, 随着坝高的增加这一问题将更加突出<sup>[1-2]</sup>。由此准确的预测坝体的变形是设计建筑高面板堆石坝的关键。堆石料的本构关系近年来也受到很多学者的重视, 发展了一批比较有代表性的本构模型, 如沈珠江双屈服面模型、邓肯-张(E-B)模型、清华非线性弹性 K-G 模型等<sup>[3]</sup>。这些模型都一定程度上反映了堆石料的主要工程性质, 但同时也存在一些不足, 如弹塑性模型的参数数量多, 塑性的流动准则和硬化规律难以确定, 弹性模型无法反映剪胀性、应力路径相关性。热力学理论作为自然界普适的规律被引入到土的

本构关系建立当中<sup>[4-7]</sup>, Hously 等、Collins 等提出了内变量热力学<sup>[5-6]</sup>, 在自由能函数基础上推导应力应变关系, 而 Einav 等<sup>[8]</sup>也相继提出了能量函数形式, 这种方法在理论上是严密的, 也能很好的反映土体的物理力学性质, 因此具有很大的发展潜力。

本文在热力学的理论框架下建立堆石料的应力应变关系, 本模型适用于当前普遍采用的面板堆石坝实际填筑过程。模型只有 4 个参数, 模型可以反映堆石料的非线性、压硬性、剪缩性、部分各向异性等主要性质。室内三轴试验和二维面板坝的计算结果充分验证了模型的正确性, 针对实际高面板坝进行了三维计算, 并与实测数据进行对比, 验证了模型的有效性。

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(51279082); 国家自然科学基金青年科学基金项目(50809033)

**收稿日期:** 2013-12-17

## 1 四参数非线性 K-G 模型的建立

### 1.1 模型的建立

堆石料本身为耗散性散粒体材料, 在一定的应力状态下, 变形伴随着能量的释放, 本文中采用 Einav<sup>[8]</sup>提出的通用的吉布斯自由能函数, 其形式如式 (1) 所示, 根据应变与势函数之间的偏导关系, 可以求得应变的表达式如式 (2)、(3) 所示。

$$g_e[p, q] = -\frac{p^{2-m} - (2-m)p \cdot p_0^{1-m}}{\bar{K}(2-m)(1-m)p_r^{1-m}} - \frac{q^2}{6\bar{G}p_r^{1-n}p^n} + \frac{q_0(2qp_0 - nq_0p)}{6\bar{G}p_r^{1-n}p_0^{1+n}}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_v = -\frac{\partial g_e}{\partial p} = \frac{p^{1-m} - p_0^{1-m}}{\bar{K}(1-m)p_r^{1-m}} - \frac{nq^2}{6\bar{G}p_r^{1-n}p^{n+1}} + \frac{nq_0^2}{6\bar{G}p_r^{1-n}p_0^{n+1}}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_s = -\frac{\partial g_e}{\partial q} = \frac{q}{3\bar{G}p_r^{1-n}p^n} - \frac{q_0}{3\bar{G}p_r^{1-n}p_0^n} \quad (3)$$

因此柔度矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g_e}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 g_e}{\partial p \partial q} \\ \frac{\partial^2 g_e}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 g_e}{\partial q^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{K}p_r(p/p_r)^m} + \frac{\bar{m}^2}{3\bar{G}p_r(p/p_r)^n} & -\frac{m\eta}{3\bar{G}p_r(p/p_r)^n} \\ -\frac{m\eta}{3\bar{G}p_r(p/p_r)^n} & \frac{1}{3\bar{G}p_r(p/p_r)^n} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式中,  $\bar{K}$  为体积模量系数,  $\bar{G}$  为剪切模量系数,  $n$  为耦合应变指数,  $\bar{n} = n(n+1)/2$ ,  $m$  为体应变指数,  $p_r$  为压力参照, 取为 0.1 MPa,  $p_0$ ,  $q_0$  为应变为 0 时的压力值,  $\eta$  为应力比。

当  $n=0$  时, 次对角线元素为 0, 简化为各向同性的情况, 当  $m=0$  时, 弹性常数与压力无关, 即为线性弹性, 当二者同时成立时, 即为各向同性线弹性的情形。

在对试验数据整理分析的基础上, 综合考虑已经发展的 K-G 模型的形式<sup>[9-10]</sup>, 作如下假定: 剪应变和体应变均与平均应力成指数关系, 全量形式如下:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{3G} \left( \frac{p}{p_a} \right)^a \eta, \quad (5)$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{K} \left( \frac{p}{p_a} \right)^b - \frac{1-a}{2} \frac{1}{3G} \eta^2 \left( \frac{p}{p_a} \right)^a, \quad (6)$$

式中,  $K$  为体积模量系数,  $G$  为剪切模量系数,  $a$  为剪应变指数,  $b$  为体应变指数。

对式 (5)、(6) 两侧进行微分, 其中

$$d\eta = \frac{1}{p} dq + q \left( -\frac{1}{p^2} \right) dp, \quad (7)$$

可以得到

$$d\varepsilon_s = \frac{1}{3G} a \left( \frac{p}{p_a} \right)^{a-1} \frac{1}{p_a} \eta dp + \frac{1}{3G} \left( \frac{p}{p_a} \right)^a d\eta$$

$$= \frac{1}{3G} (a-1) \left( \frac{p}{p_a} \right)^{a-1} \frac{1}{p_a} \eta dp + \frac{1}{3G} \left( \frac{p}{p_a} \right)^{a-1} \frac{1}{p_a} dq, \quad (8)$$

$$d\varepsilon_v = \frac{1}{K} b \left( \frac{p}{p_a} \right)^{b-1} \frac{1}{p_a} dp - \frac{1}{3G} \eta^2 a \left( \frac{p}{p_a} \right)^{a-1} \frac{1}{p_a} dp - \frac{1}{3G} \left( \frac{p}{p_a} \right)^a 2\eta d\eta = \frac{1}{K} b \left( \frac{p}{p_a} \right)^{b-1} \frac{1}{p_a} dp + \frac{1}{3G} \eta^2 (2-a) \cdot \frac{1-a}{2} \left( \frac{p}{p_a} \right)^{a-1} \frac{1}{p_a} dp - \frac{1}{3G} \left( \frac{p}{p_a} \right)^{a-1} (1-a) \eta \frac{1}{p_a} dq. \quad (9)$$

与式 (4) 相比较, 可以得到

$$a-1 = -n, \quad (10)$$

$$3G = 3\bar{G}, \quad (11)$$

$$b-1 = -m, \quad (12)$$

$$\frac{b}{K} = \frac{1}{\bar{K}}, \quad (13)$$

$n$ ,  $m$  与  $a$ ,  $b$  取值范围相同, 在 0~1 之间, 反映应力对应变的影响;  $K$  和  $\bar{K}$ 、 $G$  和  $\bar{G}$  均为模量系数, 量纲一致, 因此式 (10)~(13) 可以得到满足, 所以假设的全量形式是合理的。

与清华非线性 K-G 模型相比, 四参数 K-G 模型并不是在多种材料的复杂应力路径的试验基础上得到, 而是在能量函数的基础上, 通过共轭关系得到非线性的应力应变关系, 理论基础扎实。清华 K-G 模型有 7 个主要参数, 需要非线性拟合得到, 精度难以保证, 四参数模型仅有 4 个模型参数, 均可以通过室内试验获得, 参数唯一且稳定。

### 1.2 四参数 K-G 模型的特点

四参数 K-G 模型是建立在吉布斯自由能函数的基础上, 符合热力学定律, 采用广义胡克定律形成刚度矩阵具有广泛的适用性。四参数 K-G 模型中应力应变关系为指数形式, 因此可以体现堆石料的非线性和压硬性; 矩阵中次对角元素相等, 即假设体积应力对于剪应变的影响和剪应力对于体积应变的影响相同, 事实证明这种做法是可行的<sup>[11]</sup>。次对角元素为负数, 表明模型能反映堆石料的剪缩性; 并且在一定程度上可以反映应力引起的各向异性。综上所述, 四参数 K-G 模型能够较全面的表现堆石料的主要工程性质。另外对清华非线性 K-G 模型的敏感性分析的结果表明体积模量和指数参数对计算结果影响较大, 与本文所采用的参数一致, 这也从侧面印证了采用的 4 个参数进行计算的可行性。因此基于自由能函数提出的本构模型在理论上是完备的, 且可以反映堆石料的物理力学行为, 模型的形式简单, 参数少且独立, 可以用于模拟堆石材料。

### 1.3 室内试验

选取水布垭主坝堆石料进行了一定应力比条件下

的三轴试验, 采取假定的关系式 (5)、(6) 拟合试验数据, 如图 1~4 所示, 拟合参数结果见表 1。其中体应变拟合部分将等式右侧的第二项移到等式左侧求和作为曲线图中的  $\text{total } \varepsilon_v$ , 可以看出假设的应力应关系可以反映堆石料的力学行为, 拟合曲线的精度在可接受范围内, 符合堆石料的应力变形规律, 因此四参数 K-G 模型具备基本的试验基础。

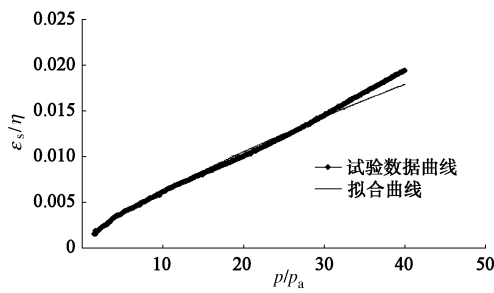


图 1 主堆石剪应变与平均应力关系图

Fig. 1 Relationship between shear strain and mean stress of main rockfill

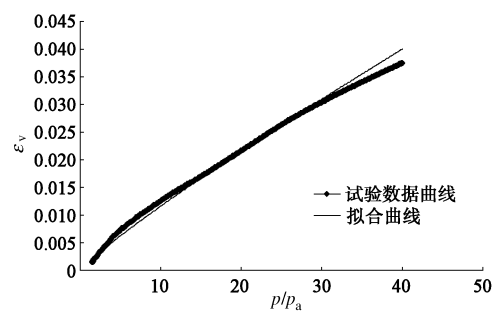


图 2 主堆石总体积应变与平均应力关系图

Fig. 2 Relationship between total volume strain and mean stress of main rockfill

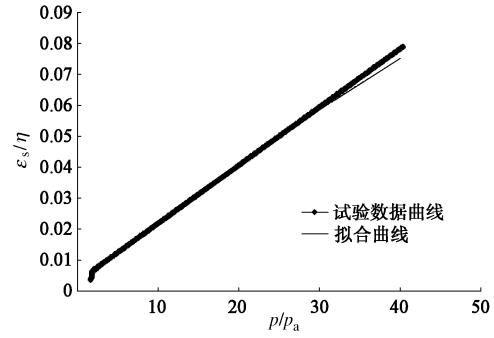


图 3 次堆石剪应变与平均应力关系图

Fig. 3 Relationship between shear strain and mean stress of secondary rockfill

1.4 模型的验证

分别对室内等应力比压缩试验和水布垭面板堆石坝二维条件下的应力变形状态进行了数值模拟计算, 以分析该模型用于实际计算的合理性。

(1) 室内三轴等应力比试验

试验采用了水布垭面板坝的主堆石料作为试验对

象, 考虑在填筑工况下, 采用与坝体实际填筑过程应力比相近的应力路径来拟合模型参数。根据资料<sup>[12]</sup>, 施工期堆石体的大部分区域的主应力比保持常数, 大致为 2.7。因此试样首先在 0.4 MPa 围压下固结, 再在应力比为 2.7 的路径下进行压缩。运用四参数模型计算应力应变关系, 并与试验数据进行对比, 如图 5 所示, 二者符合的较好, 说明模型可以反映堆石料的等应力比条件下的物理力学性质。

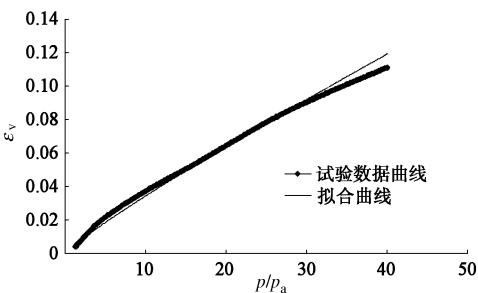


图 4 次堆石总体积应变与平均应力关系图

Fig. 4 Relationship between total volume strain and mean stress of secondary rockfill

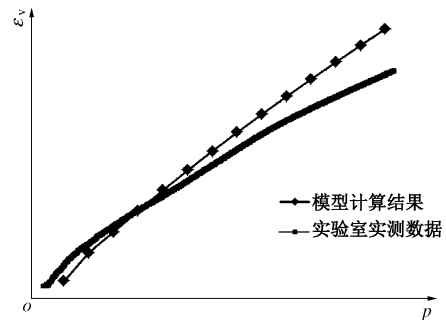


图 5 主堆石等应力比下  $\varepsilon_v - p$  曲线

Fig. 5  $\varepsilon_v - p$  curves of main rockfill under constant stress ratio

(2) 水布垭面板坝二维计算

水布垭面板坝为目前世界最高面板坝, 最大坝高 233 m, 水库死水位为 350 m, 正常蓄水位为 400 m。大坝填筑整体分为 6 期, 采用反台法施工, 具体分期和相应的填筑过程见图 6。在坝体建设过程中, 为了保证坝体的安全, 在 0+132 m、0+212 m、0+256 m 3 个断面埋设了大量的监测仪器, 主断面监测仪器布置图如图 7<sup>[13-14]</sup>。

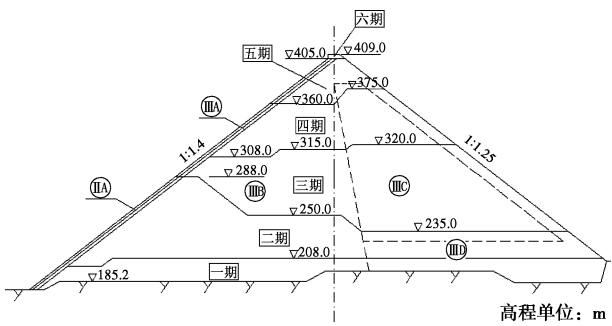


图 6 水布垭面板坝分期分区填筑图

Fig. 6 Zoned filling of Shuibuya CFRD

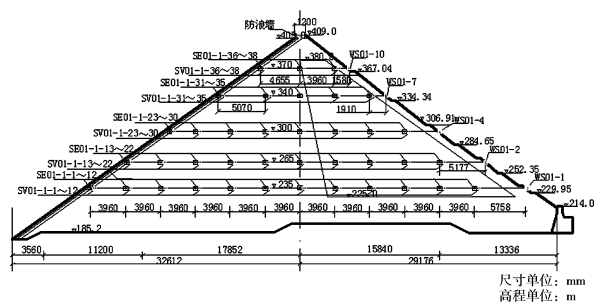


图 7 0+212 m 断面监测仪器布置图

Fig. 7 Layout of monitoring instrumentation of 0+212 m section

水布垭面板坝二维计算采用 0+240 m 断面, 最大坝高 208 m。由于主次堆石的体积占了坝体的绝大部分, 为了简单起见, 只做两个堆石分区。模型参数见表 1。

表 1 水布垭面板坝四参数非线性 K-G 模型堆石体材料参数

Table 1 Material parameters of four-parameter K-G model

坝料	K	G	a	b
主堆石	666.7	333.3	0.7729	0.8937
次堆石	232.55	107.527	0.8627	0.901

计算结果见图 8~11, 坝体的最大垂直位移位于材料性质稍差的下游次堆石区坝体中部, 最大值为 2.3 m, 接近于坝高的 1%, 水平位移最大值出现在接近坝坡位置为 0.95 m, 两侧近乎对称。最大应力按照柱状土压力估计应出现在坝体底部, 最大应力为 3.95 MPa。通过与实测数据的整理结果对比<sup>[14]</sup>, 应力位移分布趋势合理, 数值大小在合理范围内。

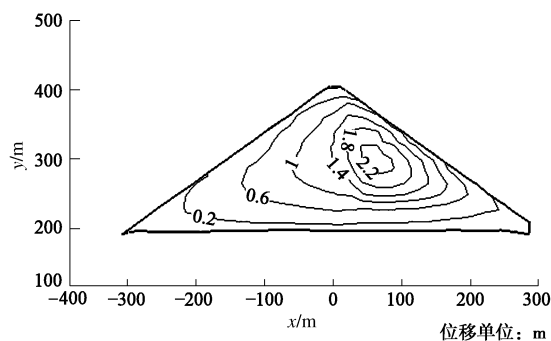


图 8 主断面垂直位移等值线图

Fig. 8 Isogram of vertical displacement

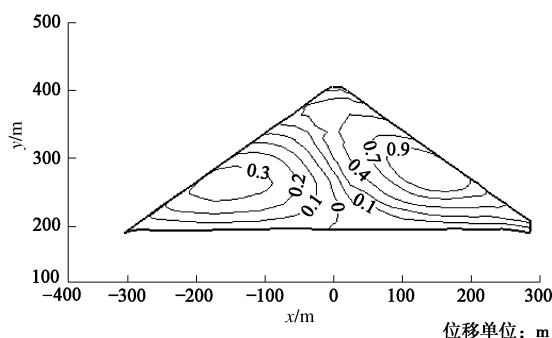


图 9 主断面水平位移等值线图

Fig. 9 Isogram of horizontal displacement

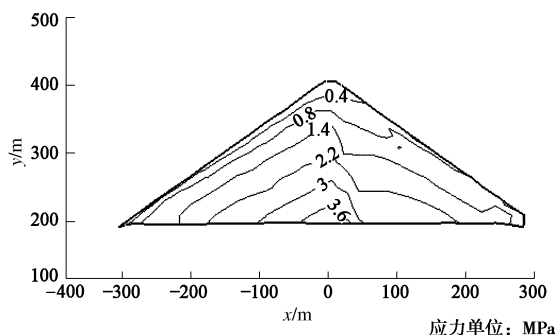


图 10 主断面大主应力等值线图

Fig. 10 Isogram of maximum principal stress

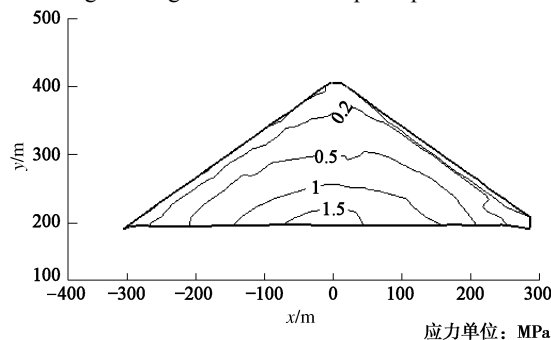


图 11 主断面小主应力等值线图

Fig. 11 Isogram of minimum principal stress

通过上述计算分析可看出, 四参数非线性 K-G 模型用于室内等比试验以及实际坝体的二维计算结果都能够在一定程度上反映堆石料的主要特点和工程性质。

## 2 四参数 K-G 模型的实际工程应用

采用四参数 K-G 模型模拟了不同坝高面板堆石坝的三维应力变形状态, 通过与实测数据对比, 证明不同坝高的位移应力结果分布合理, 数值大小在合理范围, 充分说明四参数 K-G 模型可以用于模拟面板堆石坝的三维仿真计算。此处列出对水布垭面板堆石坝坝体填筑过程的三维有限元仿真计算结果。

四参数非线性 K-G 模型计算结果见图 12~15。本文还采用邓肯-张 (E-B) 模型和清华非线性弹性 K-G 模型对水布垭面板坝进行了三维仿真计算, 模型参数参考文献[13], 其中清华非线性 K-G 模型参数是采用反演分析得到的结果, 计算结果见表 2。可以看

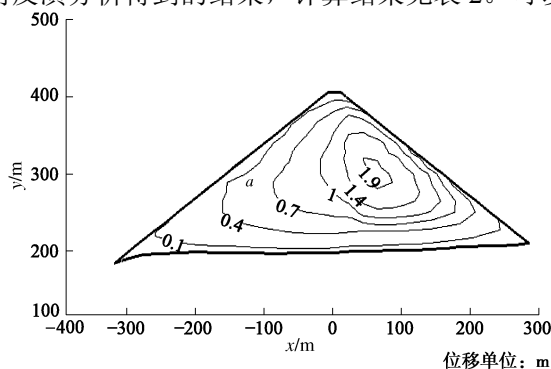


图 12 0+212 m 断面垂直位移等值线图

Fig. 12 Isogram of vertical displacement

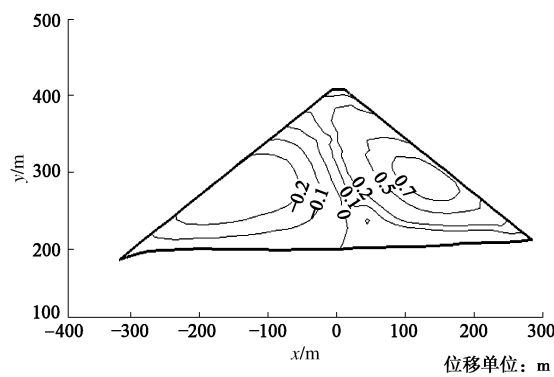


图 13 0+212 m 断面水平位移等值线图  
Fig. 13 Isogram of horizontal displacement

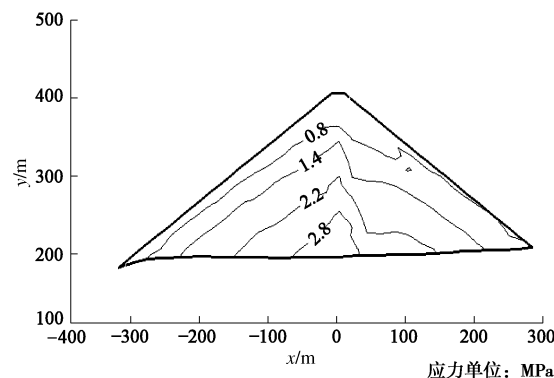


图 14 0+212 m 断面大主应力等值线图  
Fig. 14 Isogram of maximum principal stress

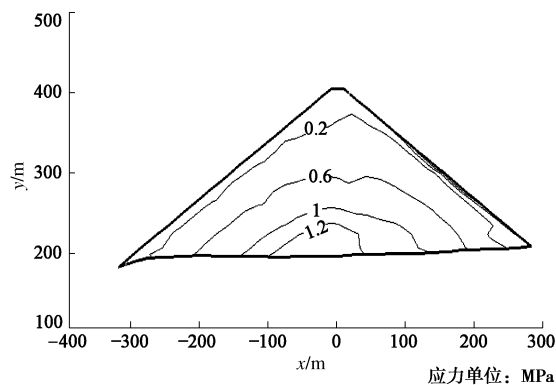


图 15 0+212 m 断面小主应力等值线图  
Fig. 15 Isogram of minimum principal stress

表 2 不同本构模型计算结果

Table 2 Results of different constitutive models

本构模型	最大沉降/m	向上游最大位移/m	向下游最大位移/m	最小主应力/MPa	最大主应力/MPa
E-B	1.87	0.433	0.511	1.02	2.91
清华	2.00	0.157	0.34	0.82	3.18
K-G	2.02	0.311	0.813	1.438	3.11

出, 四参数 K-G 模型计算的垂直位移为 2.02 m, 大于

另外两个模型计算结果, 更加接近实测的 2.276 m<sup>[15]</sup>。

### 3 结 语

本文在热力学理论下建立了四参数非线性堆石料本构模型, 可以反映堆石料的非线性、剪缩性、部分各向异性等主要的工程性质, 四参数模型参数数量少, 物理意义明确, 在目前的试验水平下可以获得, 针对目前坝高最大的水布垭面板坝进行的模拟计算与实测结果比较接近, 因此四参数模型对于 200 m 级的面板坝具有一定的适应性。但是也应该注意到, 堆石料是弹塑性材料, 具备耗散性, 因此对于塑性变形的耗散势还应该进行深入的研究, 更好的完善堆石料的本构关系。

#### 参考文献:

[1] 马洪琪, 曹克明. 超高面板坝的关键技术问题[C]// 中国大坝技术发展水平与工程实例. 北京: 中国水利水电出版社, 2007: 52 - 61. (MA Hong-qi, CAO Ke-ming. Key technology of super-high concrete face rockfill dams[C]// Large Dam Construction in China State of the Art and Case Histories. Beijing: China Water Power Press, 2007: 52 - 61. (in Chinese))

[2] 蒋国澄, 赵增凯. 中国混凝土面板堆石坝的近期进展[J]. 贵州水力发电, 2004, 18(5): 1 - 4. (JIANG Guo-cheng, ZHAO Zeng-kai. Recent development of concrete face rockfill dam of China[J]. Guizhou Water Power, 2004, 18(5): 1 - 4. (in Chinese))

[3] 蒋彭年. 土的本构关系[M]. 北京: 科学出版社, 1982: 102 - 103. (JIANG Peng-nian. Constitutive relations of soils[M]. Beijing: Science Press, 1982: 102 - 103. (in Chinese))

[4] BOYCE H R. A non-linear model for the elastic behaviour of granular materials under repeated loading[C]// Brookfield Pub Co. Swansea, 1980.

[5] HOULSBY G T, PUZRIN A M. A thermomechanical framework for constitutive models for rate-independent dissipative materials[J]. International Journal of Plasticity, 2000, 16(9): 1017 - 1047.

[6] COLLINS I F, MUHUNTHAN B. On the relationship between stress-dilatancy, anisotropy, and plastic dissipation for granular materials[J]. Géotechnique, 2003, 53(7): 611 - 618.

[7] HOULSBY G T, AMOROSI A, ROJAS E. Elastic moduli of soils dependent on pressure: a hyperelastic formulation[J]. Géotechnique, 2005, 55(5): 383 - 392.

[8] EINAV I. Pressure-dependent elasticity and energy

- conservation in elastoplastic models for soils[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2004, **130**: 81 - 92.
- [9] NAYLOR D J. Stress-strain laws for soil[M]// Developments in Soil Mechanics, SCOTT C R, ed. Essex: Applied Science Publishers Ltd, 1978: 39 - 68.
- [10] GAO L. The non-linear uncoupled KG model for rockfill materials and its verification[C]// 14th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Hamburg, 1997.
- [11] 相彪, 张宗亮, 迟世春, 等. 复杂应力路径下堆石料本构关系研究[J]. 岩土力学, 2010(6): 1716 - 1722. (XIANG Biao, ZHANG Zong-liang, CHI Shi-chun, et al. Study of constitutive relations of rockfill under complex stress path[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010(6): 1716 - 1722. (in Chinese))
- [12] 张林洪, 刘荣佩, 谢婉丽, 等. 应力比路径条件下堆石料的应力应变特性[J]. 大坝观测与土工测试, 2001(4): 46 - 49. (ZHANG Lin-hong, LIU Rong-pei, XIE Wan-li, et al. Properties of stress and strain of rockfill under the path of equal stress ratio[J]. Dam Observation and Geotechnical Tests, 2001(4): 46 - 49. (in Chinese))
- [13] 李昌彩. 水布垭面板堆石坝前期关键技术研究[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2005. (LI Chang-cai. Shuibuya CFRD key technologies in prophase[M]. Beijing: China Water Power Press, 2005. (in Chinese))
- [14] 杜丽惠. 水布垭面板堆石坝的反馈分析研究[C]// 高堆石坝筑坝与工程安全技术研讨会论文集. 昆明, 2011. (DU Li-hui. Back analysis on deformation of Shuibuya CFRD[C]// High Rockfill Dam and Engineering Safety Technical Symposium Proceedings. Kunming, 2011. (in Chinese))
- [15] 张岩, 燕乔. 水布垭面板堆石坝变形性态分析[J]. 大坝与安全, 2010(2): 40 - 44. (ZHANG Yan, YAN Qiao. Analysis on the deformation behavior of Shuibuya concrete face slab rock-fill dam[J]. Large Dam & Safety, 2010(2): 40 - 44. (in Chinese))
- 

## 本期广告索引

- 封 2 北京筑信达工程咨询有限公司  
封 3 北京理正软件股份有限公司  
封 4 上海分元土木工程科技有限公司  
后插 1 台州建元勘察仪器有限公司  
后插 2 西安力创材料检测技术有限公司