DOI：10.11779/CJGE201410022

# 一种广义节理元模型

韦立德[1, 2]，韦昌富[1, 2]

（1. 中国科学院武汉岩土力学研究所，湖北 武汉 430071；2. 岩土力学与工程国家重点实验室，湖北 武汉 430071）

**摘 要**：采用传统节理元近似模拟岩石破坏过程需要同时增加单元和节点，过程非常复杂。为了更有效模拟岩石岩石破坏过程产生的节理，建议了一种只包含 2 个节点的广义节理元的模拟方法，通过推导给出了基本方程，提供了单元信息设置方式。采用该广义节理元近似模拟岩石破坏过程只需要增加单元，不需要增加节点。模拟实例表明：采用广义节理元法模拟效果在应力方面精度和传统节理元法的精度一样，该广义节理元法有效可行。

**关键词**：岩石力学；有限元；广义节理元

**中图分类号**：TU43 **文献标识码**：A **文章编号**：1000－4548(2014)10－1934－06

**作者简介**：韦立德(1974－ )，男，博士（后），副研究员，主要从事岩土力学与工程方面科研工作。E-mail: ldwei@whrsm.ac.cn。

# A generalized joint element method

WEI Li-de[1, 2], WEI Chang-fu[1, 2]

(1. Institute of Rock and Soil Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 2. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Wuhan 430071, China)

**Abstract**: When the traditional joint element methods are used to simulate the failure process of rock, it is necessary to increase the elements and the nodes, and the data processing is extremely complex. In order to more efficiently simulate the interaction between nodes in the finite element in fractured rock, a new simulating method is proposed. A simple interface element including two nodes, called the generalized joint element here, is suggested. Its fundamental equations are deduced, and its element organization method is offered. Using the generalized joint elements to simulate the joint in rock, it is necessary to increase the elements compared to the finite element mesh, and not necessary to change or increase the nodes. Numerical experiments of simulation of a rock joint indicate that the generalized joint element method is effective, and the accuracy of stress with the generalized joint elements is equal to that with the traditional ones.

**Key words**: rock mechanics; finite element; generalized joint element

## 0 引 言

岩石类非均质脆性材料的破裂是岩石力学领域研究的前沿课题，对裂纹群的扩展、相互作用直至宏观贯通的理论研究，目前仍是国际断裂力学界的一个难题[1-2]。

有限元法在 20 世纪 50 年代产生，由于其优点得到广泛应用，主要应用领域之一是岩石力学，岩石力学中有限元方法的综述可参见井兰如发表的文章[3]。为了满足岩石力学需求，学者们提出了用于描述岩石断裂行为的一些节理单元模型，比较有代表性的是 Goodman 等[4]、Beer[5]、雷晓燕等[6]提出、改进各种类型的节理元模型模型，也都成为模拟节理岩体强有力的工具。这些节理元模型如果用于分析岩石动态裂纹问题，裂纹扩展准则不论是采用断裂力学准则还是莫尔–库仑准侧和最大拉应力准则，都需要增加节点、改动节点位置和增加单元的网格重新剖分过程，数据处理太过复杂[7-8]；也正由于这一点，它们可胜任岩石单条裂纹扩展过程分析，但是它们在岩石裂纹群扩展过程分析方面表现得无能为力[7-8]，因此当前还没有采用这些现有的节理元于岩石裂纹群扩展过程分析的文献报道[9]。因此，找到一种用于分析岩石动态裂纹问题时不需要进行网格重新剖分过程的节理元，是采用有限元法进行包含裂纹群扩展的岩石破裂问题进行数值模拟需要解决的颈瓶难题之一。

针对目前存在的问题，本文提出一种广义节理元，当细观单元破裂后采用数个这种广义节理单元表征破坏界面，需要增加单元数而不需要节点变动，用于分析岩石动态裂纹问题时不需要进行网格重新剖分过

基金项目：国家自然科学基金项目（51074152）

收稿日期：2014－02－21

程，从而有望对大量裂纹群的扩展进行处理。

## 1　假　　设

对于受荷载作用的岩体，节理的变形对岩体变形的贡献远远大于岩块变形的贡献，因此本文建议一种只包含 2 个节点的广义节理元，其定义如图 1 所示，包括位于节理上方且代表该部分岩块的节点 $j$、位于节理下方且代表该部分岩块的节点 $i$ 和节理厚度为 $h$ 的两个节理面。该广义节理元采用以下假设：①岩块的变形很小，忽略不计；②广义节理元内节理两侧的岩块只沿着节理面发生平动和沿节理面法向发生移动，没有转动；③节理的两个侧平面平行。

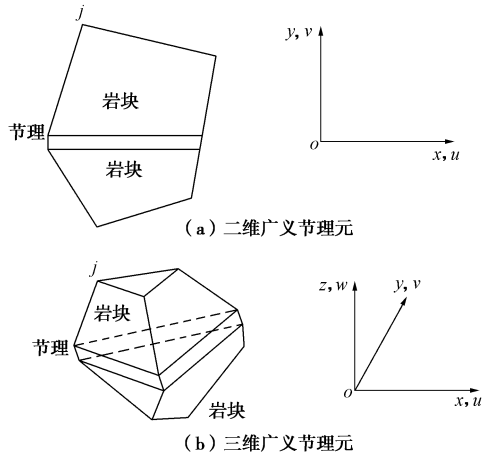


图 1 广义节理单元

Fig. 1 Generalized joint element

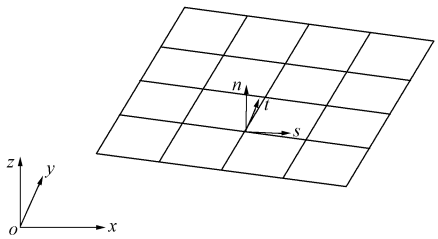


图 2 三维广义节理元方向矢量定义

Fig. 2 Definition of vectors in three-dimensional joint

## 2　广义节理元数学模型

### 2.1　三维情况

对于如图 1 所示的广义三维节理元，顶部岩块位移定义为

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{\mathrm{TOP}} = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} \quad , \tag{1}$$

底部岩块位移定义为

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{\mathrm{BOTTOM}} = \begin{Bmatrix} u_{\mathrm{i}} \\ v_{\mathrm{i}} \\ w_{\mathrm{i}} \end{Bmatrix} \quad , \tag{2}$$

在图 2 所示局部坐标系统中的相对位移为

$$\delta = \{\delta_{\mathrm{n}}, \delta_{\mathrm{s}}, \delta_{\mathrm{t}}\}^{\mathrm{T}} \quad , \tag{3}$$

在整体坐标系中相对位移可以采用以下方式表示：

$$\delta = LB \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} = LBa^{\mathrm{e}} \quad , \tag{4}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \tag{5}$$

式中，$L$ 是总体坐标系到局部坐标系的转换矩阵，其定义见文献[5]。

节理面应力由法向应力 $\sigma_{\mathrm{n}}$ 和切向应力 $\tau_{\mathrm{s}}$ 和 $\tau_{\mathrm{t}}$ 组成，它们分别和法向相对位移、切向相对位移相关。对于弹性材料本构模型，可以采用以下简单的本构关系:

$$\sigma = \{\sigma_{\mathrm{n}}, \sigma_{\mathrm{s}}, \sigma_{\mathrm{t}}\}^{\mathrm{T}} = D\delta \quad , \tag{6}$$

$$D = \begin{bmatrix} K_{\mathrm{n}} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\mathrm{s}} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\mathrm{t}} \end{bmatrix} \quad , \tag{7}$$

式中，$K_{\mathrm{n}}$ 是法向刚度，$K_{\mathrm{s}}$ 和 $K_{\mathrm{t}}$ 分别是 s 向和 t 向剪切刚度，它们可以通过实验确定，在某些情况下它们可以采用弹模 $E$ 和剪切模量 $G$ 表示：

$$\begin{cases} K_{\mathrm{n}} = E/h \\ K_{\mathrm{s}} = G/h \\ K_{\mathrm{t}} = G/h \end{cases} \quad 。 \tag{8}$$

单元刚度矩阵和等效何载矢量可以通过虚功原理获得。在节理内应力所做的功为

$$U = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{S}} \delta^{\mathrm{T}} \sigma \mathrm{d}S = \frac{1}{2} a^{\mathrm{eT}} (\int_{\mathrm{S}} B^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} DLB \mathrm{d}S) a^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} a^{\mathrm{eT}} (B^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} DLBS) a^{\mathrm{e}} \tag{9}$$

式中，$S$ 是节理面积。作用在节点上的力所做的功为

$$w = a^{\mathrm{eT}} F^{\mathrm{e}} \quad 。 \tag{10}$$

通过虚功原理可得

$$K^{\mathrm{e}} = B^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} DLBS \quad , \tag{11}$$

$$F^{\mathrm{e}} = B^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} \sigma S \quad 。 \tag{12}$$

### 2.2　二维情况

对于二维情况以上公式也适用，只是部分变量不出现而省略。

节理上部岩块位移是

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{\mathrm{TOP}} = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad , \tag{13}$$

节理下部岩块位移

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{\mathrm{BOTTOM}} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad , \tag{14}$$

在图 3 局部坐标系统中的相对位移为

$$\delta = \{\delta_{\mathrm{n}}, \delta_{\mathrm{s}}\}^{\mathrm{T}} \quad 。 \tag{15}$$

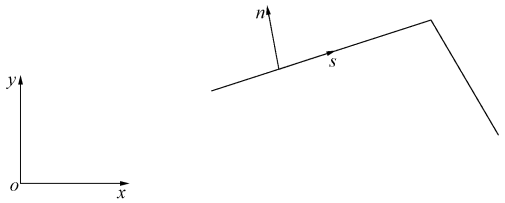


图 3 二维广义节理元方向矢量定义

Fig. 3 Definition of vectors in two-dimensional joint

弹性刚度矩阵简化为

$$D = \begin{bmatrix} K_{\mathrm{n}} & 0 \\ 0 & K_{\mathrm{s}} \end{bmatrix} \quad 。 \tag{16}$$

和以往方法一样，所有有限单元和节理单元集合成以下方程组。

$$K\mathrm{a} = F \quad 。 \tag{17}$$

本文中节理单元本构关系采用了理想弹塑性本构模型。

本文建议的广义节理元可以看成 Beer 所完善的节理元[5]的一种演化。和 Beer 所完善的节理元相比，很多内容如相对位移定义、相对位移和应力关系、单元刚度矩阵推导、等效荷载推导、本构关系等，都采用了和 Beer 所完善的相同的过程[5]；传统节理元采用一维型函数（二维问题）或者二维型函数（三维问题），而广义节理元型函数直取为形函数 $N$=1，传统节理元一般采用 2，3 个积分高斯点（二维问题）或者 4，9 个积分高斯点（三维问题），而广义节理元由于范围比传统节理元小而采用了 1 个积分高斯点，这两个不同点主要体现在式 1，2，4，9，11，12 等的不一样[5]。

## 3 广义节理元单元信息设置方法和算例

在此通过一个算例说明广义节理元单元信息设置方法，并讨论该模拟方法的有效性。

一块长方体岩体试样，长、宽和高度分别为 50，35 和 100 mm，岩块底面固定，顶面承受位移荷载，有一厚度为 1 mm 的节理贯穿，具体见图 4。拟采用的计算模型包括包含广义节理元的有限元网格模型（见图 5）、包含传统薄层单元的有限元网格模型（见图 6）、不考虑节理的有限元网格模型（见图 7），不考虑节理的有限元网格模型包含 8 个 8 节点 6 面体单元，共 30 个节点；包含传统薄层单元的有限元网格模型包含 10 个 8 节点 6 面体单元和 2 个薄层单元，共 38 个节点；包含广义节理元的有限元网格模型包含 6 个 8 节点 6 面体单元和 16 个广义节理单元，共 30 个节点，可见采该广义节理元近似模拟岩石破坏过程只需要增加单元，不需要增加节点。广义节理元单元设置说明如下。

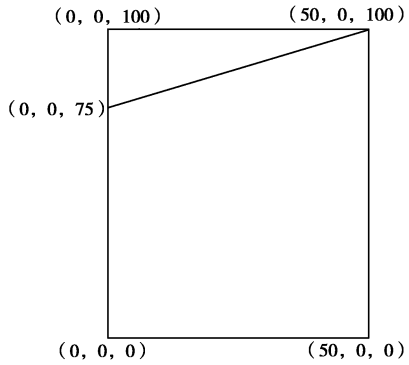


图 4 几何模型

Fig. 4 Geometrical model

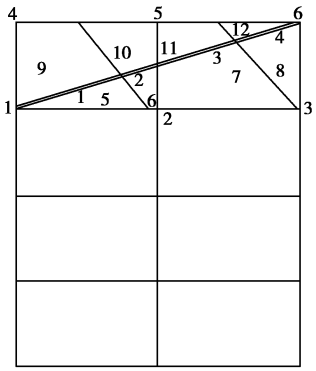


图 5 三维广义节理元网格模型

Fig. 5 3D generalized joint element model

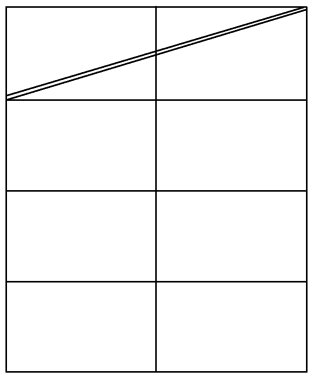

图 6 三维传统节理元网格模型

Fig. 6 3D joint element model

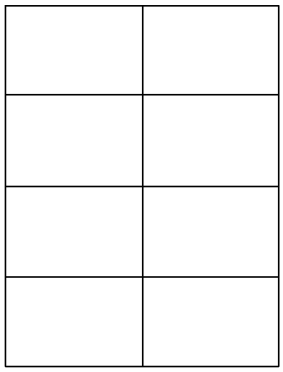

图 7 三维有限元网格模型

Fig. 7 3D finite element model

由于是二维问题且沿面 $y$=35/2 mm 对称，设置面 $y$=35/2 mm 后我们可以不考虑后面一排节点和前一排节点之间的相对位移和相互作用力（在节理附近）。对于前半部由节理段 1、节理段 2、岩块 5、岩块 6、岩块 9 和岩块 10 组成的部分，设置岩块 5、6 之间分割平面且与节理 1，2 垂直, 该平面也是岩块 9、10 之间分割平面，具体见图 5。以节理段 1 与岩块 5、9 建立第 1 一个广义节理元单元，以模拟岩块 5 和 9 沿着节理段 1 滑动力学反应；以节理段 2 与岩块 6、10 建立第 2 个广义节理元单元，以模拟岩块 6 和 10 沿着节理段 2 滑动力学反应；以分割平面与岩块 5、6 建立第 3 个广义节理元单元，以模拟节点 1 和 2 被岩块 5、6 约束；以分割平面与岩块 9、10 建立第 4 个广义节理元单元，以模拟节点 3 和 4 被岩块 9、10 约束。单元信息列在表 1 中。采用同样过程建立后半部由节理段 1、接力段 2、岩块 5、岩块 6、岩块 9 和岩块 10 组成部分的另外 4 个广义节理单元。通过这样过程形成 8 个广义节理单元。通过一样过程可形成属于节理段 3、4 和岩块 7、8、11、12 组成范围的另外 8 个广义节理单元（见图 5）。这样就产生了采用于模拟有节理穿过的范围内岩体的力学反应的 16 个广义节理单元，而在此范围外的岩体力学反应采用 6 个有限元单元模拟。

表 1 广义节理元信息

Table 1 Information of generalized joint elements

| 单元号 | 材料号 | 节点信息 | 节理面 | 厚度/mm | 节理面法向 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1，4 | 节理 1 的接触平面 | 1 | −0.4472,0.8944,0 |
| 2 | 2 | 2，5 | 节理 2 的接触平面 | 1 | −0.4472,0.8944,0 |
| 3 | 3 | 1，2 | 岩块 5 和 6 之间的切割面 | 1 | 0.8944, 0.4472,0 |
| 4 | 3 | 4，5 | 岩块 9 和 10 之间的切割面 | 1 | 0.8944, 0.4472,0 |

节理行为物理模拟的原则简而言之，在节理两侧的岩块相对运动采用真实节理参数模拟，刚度取值和传统节理元相同；在节理同侧的岩块相对运动采用虚设节理面和真实节理面垂直的虚设节理模拟，且刚度参数取值和岩石弹模相当或更大，节理厚度可取 2 节点实际间距或某一很小值，以保证该 2 节点间相对位移非常小为准。

表 2 计算用材料参数

Table 2 Parameters for mechanical analysis

| 材料号 | 抗拉强度/kPa | 凝聚力/kPa | 内摩擦角/(°) | 膨胀角/(°) | 法向刚度/(GPa·m$^{-1}$) | 切向刚度/(MPa·m$^{-1}$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | — | 18000 | 52 | 0.0 | 50 GPa（弹模） | 0.2（泊松比） |
| 2 | 3.0 | 5680 | 15 | 0.0 | 0.5 | 0.2 |
| 3 | — | — | — | — | 50 | 20000 |

在此算例中，岩块上表面施加面力荷载，每级荷载 0.42 MPa，底面施加约束，约束 3 个方向的位移。采用笔者研制的三维有限元程序进行了 7 个方案计算。方案 1 为包含广义节理单元的有限元计算，方案 2 为包含传统节理单元的有限元计算，方案 3 为弹性有限元计算，它们的计算结果位移对比见图 8，9。图 8 是顶面长边中点（0.025，0，0.1）处竖向位移，图 9 是直边（$x$=0，$y$=0）和直边（$x$=0.05，$y$=0）处 $x$ 向水平位移。对比可见，广义节理元计算结果和传统节理元计算结果位移一致，它们的差值较小，竖向位移广义节理元计算结果比传统节理元计算结果小，是广义节理元计算过程中忽略了高度在 0.075～0.1 m 范围内岩块弹性变形所致，对表 2 参数本文建议方法引起的误差为 13.8%；本文建议的模型引起的误差会随切向刚度增加而增加，当切向刚度变达到和岩块一样大（就刚度而论相当于不存在节理）或更大时会得到最大误差，在本文例中最大相对误差可近似估计为忽略了弹性变形的岩块体积和总体积之商（即 25%），本文建议广义节理元适用于节理面剪切刚度比岩块剪切模量很小的情况；由于误差由产生裂纹的单元体积产生，因此通过加密单元减小产生裂纹的单元体积的方式可以降低误差；计算结果显示，当顶面荷载加到第 73 级（30.66 MPa）计算再也不能够收敛，因此包含节理元计算在第 73 级（30.66 MPa）时位移大小和计算迭代次数有关，当迭代次数增加节理面以上岩块位移还在大幅度增加；计算结果表明，包含广义节理元情况的失稳荷载和包含传统节理元的失稳荷载相等，都是第 73 级（30.66 MPa）。通过比较得到结论，采用该广义节理元近似模拟岩石破坏过程只需要增加单元，不需要增加节点，用于分析岩石动态裂纹问题时不需要进行网格重新剖分过程，是该节理元模型的优越性；采用广义节理元法模拟效果在应力方面精度与

传统节理元法的精度基本一样，该广义节理元法在精度方面有效可行。

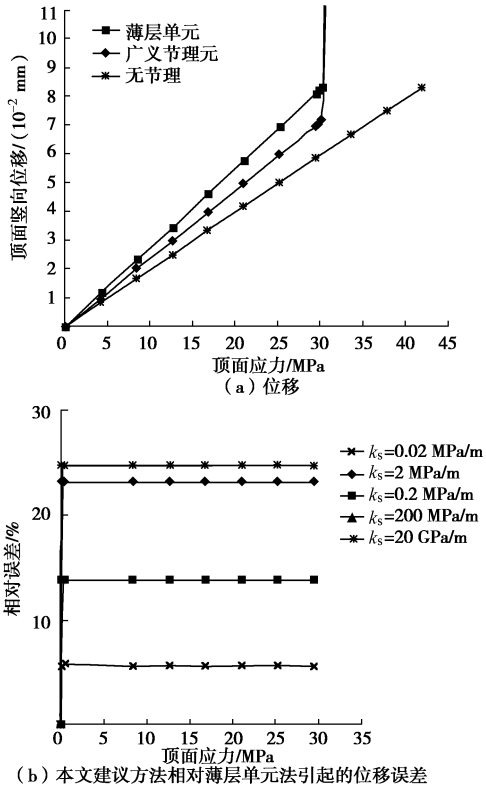


图 8 竖向位移对比

Fig. 8 Comparison of vertical displacement

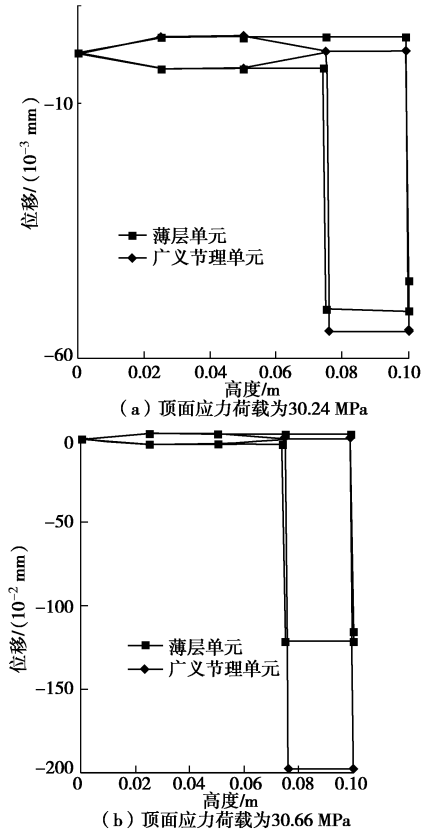


图 9 横向位移对比

Fig. 9 Comparison of transversal displacements

为了考察节理面法向刚度（$k_n$）和切向刚度（$k_s$ 和 $k_t$）对广义节理元计算结果影响规律，笔者设计了 4 个计算方案，方案 4 为提高节理面法向刚度到原来 10 倍包含广义节理单元的有限元计算，方案 5 为降低节理面法向刚度到原来 0.1 倍包含广义节理单元的有限元计算，方案 6 为提高节理面切向刚度到原来 10 倍包含广义节理单元的有限元计算，计算结果竖向位移对比见图 10，11，对比可见，法向刚度对广义节理单元的计算结果影响不大，切向刚度对广义节理单元的计算结果影响很大，计算结果和理论分析结果一致。

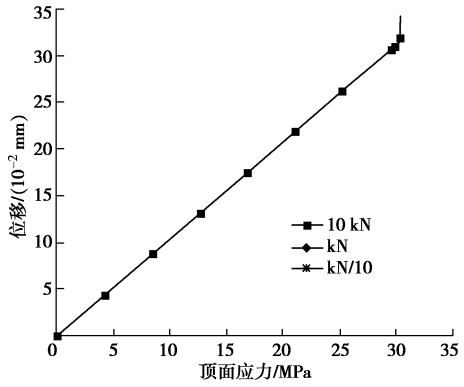


图 10 不同法向刚度对竖向位移影响对比

Fig. 10 Comparison of vertical displacements under different normal stiffnesses

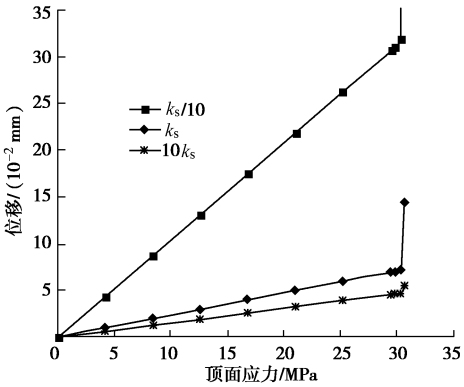


图 11 不同切向刚度对竖向位移影响对比

Fig. 11 Comparison of vertical displacements under different tangential stiffnesses

## 4 广义节理元和传统节理元的关系

广义节理元可以看成Beer所完善的节理元[5]的一种演化。和 Beer 所完善的节理元相比，Beer 所完善的节理元通过节点确定节理中心线（面），广义节理元一般需要通过输入数据指定节理中心线（面）；传统节理元采用一维型函数（二维问题）或者二维型函数（三维问题），而广义节理元型函数直取为形函数 $N$=1；传统节理元一般采用 2，3 个积分高斯点（二维问题）或

者 4，9 个积分高斯点（三维问题），而广义节理元由于范围比传统节理元小而采用了 1 个积分高斯点；其它内容如相对位移定义、相对位移和应力关系、单元刚度矩阵推导、等效荷载推导、本够关系等，都采用了和传统节理元相同的过程。从这些角度看，广义节理元可以看成 Beer 所完善的节理元的一种简化，这样也说明了广义节理元理论上的合理性，即从理论上证明了该广义节理元法在精度方面有效可行；但是它采用了在节理单元范围内两个节点各自代表的 body 位移都和该节点处位移相等假设使得可以考虑节理引起的位移这个主要因素而忽略在节理单元范围内岩块的位移这个次要因素，而且只包含 2 个结点，从而能够灵活模拟已经破坏单元各个节点间的相互作用，用于分析岩石动态裂纹问题时不需要进行网格重新剖分过程，是该节理元模型的优越性。

## 5 结　　语

本文建议一种只包含 2 个结点的广义节理单元，给出了相关理论、应用说明和应用实例。本文建议的广义节理元模型的创新点（和以往节理元模型不同之处）表现在：建议节理元和以往节理元模型相比节点数不同、基本假设不同（第 2 部分）；建议节理元和以往节理元模型相比形函数、积分点数不同（第 3 部分）；建议节理元和以往节理元模型相比节理单元信息设置方法不同、节理行为物理模拟方法不同（第 4 部分）。通过实例证实采用该广义节理元进行岩石节理模拟时应力精度和采用传统节理单元模拟精度基本一样，并且通过理论对说明了该节理元模型在精度方面合理可行。广义节理元的优越性不体现在精度上，而是体现在功能上。采用该广义节理元近似模拟岩石破坏过程只需要增加单元，不需要增加节点，用于分析岩石动态裂纹问题时不需要进行网格重新剖分过程，是该节理元模型的优越性。本文只是该广义节理元的初步研究成果，不同广义节理元单元信息设置方法对结果的影响、如何采用该节理元模型进行岩石裂纹群扩展模拟等其它问题有待进一步研究和讨论。

**参考文献：**

[1] 潘鹏志, 冯夏庭, 周　辉. 脆性岩石破裂演化过程的三维细胞自动机模拟[J]. 岩土力学, 2009, **30**(5): 1471－1476. (PAN Peng-zhi, FENG Xia-ting, ZHOU Hui. Failure evolution processes of brittle rocks using 3D cellular automaton method[J]. Chinese Journal of Rock and Soil Mechanics, 2009, **30**(5): 1471－1476. (in Chinese))

[2] 张楚汉. 论岩石、混凝土离散-接触-断裂分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, **27**(2): 217－235. (ZHANG Chu-han. Discrete-contact-fracture analysis of rock and concrete[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, **27**(2): 217－235. (in Chinese))

[3] JING L. A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 2003, **40**(3): 283－353.

[4] GOODMAN R E, TAYLOR R L, BREKKE T L. A model for the mechanics of jointed rock[J]. Journal of Soil Mechanics & Foundations Div, 1968(5): 637－659.

[5] BEER G. An isoparametric joint/interface element for finite element analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1985, **21**: 585－600.

[6] 雷晓燕, SWOBODA G, 杜庆华. 接触摩擦单元的理论及应用[J]. 岩土工程学报, 1994, **16**(3): 23－32. (LEI Xiao-yan, SWOBODA G, DU Qing-hua. Theory and application of contact-friction interface element[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, **16**(3): 23－32. (in Chinese))

[7] 邱　峰, 丁　桦. 模拟岩石材料破坏的有限元方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, **26**(增刊 1): 26633－2668. (QIU Feng, DING Hua. Finite element method simulating failure of rock material[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, **26**(S1): 2663－2668. (in Chinese))

[8] CHARALAMBIDES P G, MCMEEKING R M. Finite element method simulation of crack propagation in a brittle microcracking solid[J]. Mechanics of Materials, 1987, **6**(1): 71－87.

[9] ZHANG Xiu-li, JIAO Yu-yong, ZHAO Jian. Simulation of failure process of jointed rock[J]. Journal of Center South University of Technologe, 2008, **15**(6): 888－894.