

DOI: 10.11779/CJGE201409024

# 桩基三维弹性波动方程变步长交错网格有限差分数值计算

刘华瑄<sup>1,2</sup>, 刘东甲<sup>1</sup>, 卢志堂<sup>3</sup>, 陶俊<sup>1</sup>, 姜静<sup>1</sup>

(1. 合肥工业大学资源与环境工程学院, 安徽 合肥 230009; 2. 安徽省建筑科学研究院, 安徽 合肥 230001;  
3. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092)

**摘要:** 为了提高桩基低应变数值模拟的计算效率, 在传统差分方法的基础上, 将变步长交错网格有限差分法引入到三维桩土模型的数值计算中, 通过对三维弹性波动方程进行差分, 并在计算模型界面处引入吸收边界条件, 计算得到了桩在瞬态纵向激振力作用下的低应变数值模拟响应。计算结果表明: 在保证计算精度的同时, 由于该方法自身可变化的差分网格, 使得计算过程更加灵活简便, 降低了内存需求量, 减少了计算时间。吸收边界可以有效吸收到达计算模型界面处的入射波, 该方法在对低应变实测曲线的拟合和非对称缺陷桩的数值模拟中取得了良好的应用效果。

**关键词:** 交错网格; 有限差分法; 低应变; 桩基; 吸收边界

中图分类号: TU 473.16 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2014)09-1754-07

作者简介: 刘华瑄(1990-), 男, 安徽六安人, 硕士研究生, 主要从事桩土动力学计算研究。E-mail: liuhx0564@126.com。

## Numerical calculation of three-dimensional elastic wave equation of piles staggered grid finite difference using method with variable step lengths

LIU Hua-xuan<sup>1,2</sup>, LIU Dong-jia<sup>1</sup>, LU Zhi-tang<sup>3</sup>, TAO Jun<sup>1</sup>, JIANG Jing<sup>1</sup>

(1. School of Resources and Environmental Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. Anhui Institute of Building Research and Design, Hefei 230001, China; 3. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** To improve the computational efficiency of low-strain numerical simulation of piles, the variable step staggered grid finite difference method is introduced into the calculation of three-dimensional pile-soil model based on the traditional difference method. By differentiating three-dimensional elastic wave equation and introducing absorbing boundary conditions on the computational model interface, the low-strain numerical simulation of the response of piles is calculated under transient vertical exciting force. The results show that the computational accuracy is guaranteed and the computational process is more flexible and simple because of varied difference grids. The process can also reduce the memory requirements and the computational time. The absorbing boundary which absorbs the incident waves reaching the computational model interface is effective. The proposed method has achieved good effects on fitting low-strain measured curve and numerical simulation of asymmetric defective piles.

**Key words:** staggered grid; finite difference method; low strain; pile; absorbing boundary

## 0 引言

桩基础作为一种方便、实用和优良的基础形式而被广泛应用在工程建设中, 如何对桩基完整性进行快速准确的检测是桩基安全使用的重要保证。低应变反射波法是应用最为广泛的一种检测手段, 目前, 在对低应变数值模拟响应的理论研究中, 主要通过有限元法和有限差分法对理论模型进行数值计算。陈凡等<sup>[1]</sup>通过有限元方法研究了尺寸效应对一维桩基低应变检测理论的影响。Chow 等<sup>[2]</sup>利用有限元法计算并探讨了

低应变测桩时的三维效应。Chai 等<sup>[3]</sup>对基桩完整性检测过程中影响应力波传播的原因进行了分析。目前, 利用 ANSYS/LS\_DYNA 等有限元方法计算时, 由于网格划分比较大, 难以反映三维的真实状况, 有的甚至还需要进行滤波等手段加以处理。有限差分法由于结构简单、计算稳定, 可以更有效的模拟桩土系统的波动问题。

对应力波在介质中传播的研究, 国内外学者提出了很多基于有限差分格式的数值计算方法。Aki 等<sup>[4]</sup>提出了一维速度-应力有限差分法, 并对差分格式的稳定性进行了分析。Schubert<sup>[5]</sup>等论述了弹性动力学轴对称波在均质和非均质介质中传播的有限差分法。Gsell 等<sup>[6]</sup>在三维圆柱坐标体系下, 利用有限差分法模拟了弹性波的传播规律。Pitarka<sup>[7]</sup>通过四阶交错非均匀网格有限差分法对三维地震响应进行了模拟。董良国等<sup>[8]</sup>运用交错网格高阶差分法, 对一阶速度-应力弹性波方程进行了数值求解。

通过有限差分法对桩土系统进行数值模拟的研究中, 柴华友<sup>[9]</sup>指出了应力波在桩身传播呈指数形式衰减。刘东甲<sup>[10]</sup>利用有限差分法对完整桩进行了瞬态纵向振动的数值模拟计算, 取得了良好的应用效果。柯宅邦等<sup>[11]</sup>采用交错网格有限差分法计算了空间轴对称条件的桩土振动问题, 研究了桩顶三维效应的来源以及避免三维干扰的方法。段军等<sup>[12]</sup>利用交错网格有限差分法对桩的一维纵向振动问题进行了数值计算。卢志堂等<sup>[13-14]</sup>在三维条件下, 通过差分法对三维直角坐标系下的大直径桩模型和圆柱坐标系下的管桩模型进行了低应变测试理论的分析研究。本文采用变步长交错网格有限差分法对桩土模型进行数值计算, 同时引入 Higdon 吸收边界条件, 在保证计算精度、提高计算效率的前提下对桩的三维弹性纵向振动问题进行数值计算。

## 1 理论公式推导

在变步长网格条件下, 通过对弹性波动方程中的速度分量和应力分量进行差分离散, 得到一阶弹性波动方程的变步长差分格式, 该方法已在地球物理的相关数值模拟中得到了很好的应用<sup>[7,15]</sup>。本文将该方法应用到桩土系统的动力响应研究中, 采用具有四阶空间精度和二阶时间精度的变步长网格差分算子。如图 1 所示, 以  $x$  轴为例, 节点  $m-1, m, m+1, m+2$  的间距分别为  $c_1\Delta, \Delta, c_2\Delta$ ,  $i$  为  $m$  和  $m+1$  中点处的节点, 各节点值的级数形式如式(1)~(4), 单位时间为  $\Delta t$ 。

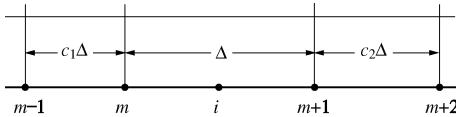


图 1 变步长网格有限差分示意图

Fig. 1 Schematic of variable step finite difference grid

$$\phi_{m+1} = \phi_i - \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{1}{2} + c_1\right) \Delta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} + c_1\right)^2 \Delta^2 -$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} + c_1\right)^3 \Delta^3 + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{2} + c_1\right)^4 \Delta^4 + \dots , \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \phi_m &= \phi_i - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\Delta}{2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 - \\ &\quad \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \frac{1}{4!} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^4 + \dots , \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \phi_{m+1} &= \phi_i + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\Delta}{2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \\ &\quad \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \frac{1}{4!} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^4 + \dots , \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \phi_{m+2} &= \phi_i + \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{1}{2} + c_2\right) \Delta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} + c_2\right)^2 \Delta^2 + \\ &\quad \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} + c_2\right)^3 \Delta^3 + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{2} + c_2\right)^4 \Delta^4 + \dots , \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $\phi_m$  表示  $k\Delta t$  时刻网格点  $(x, y, z)$  上的波场值  $\phi_{x,y,z}^k$ , 联立方程(1)~(4), 消除二阶及以上的高阶导数, 得到  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  关于  $\phi$  的线性组合, 其中, 用  $\Delta x$  代替  $\Delta$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{r_1 \phi_{x+1,y,z}^k - r_2 \phi_{x,y,z}^k + r_3 \phi_{x+2,y,z}^k - r_4 \phi_{x-1,y,z}^k}{\Delta x} , \quad (5)$$

$$r_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + 4c_2 + 4c_1c_2}{c_2(1+c_1)} , \quad (6)$$

$$r_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + 4c_1 + 4c_1c_2}{c_1(1+c_2)} , \quad (7)$$

$$r_3 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{c_2(1+c_2)(1+c_1+c_2)} , \quad (8)$$

$$r_4 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{c_1(1+c_1)(1+c_1+c_2)} . \quad (9)$$

同理, 可以得到关于  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  和  $\frac{\partial \phi}{\partial z}$  的公式, 值得注意

的是, 这里推导的是具有一般形式的变步长交错网格有限差分格式。

本文的变步长差分法采用二阶时间精度的差分算子, 定义为

$$\frac{\partial \phi_{x,y,z}^k}{\partial t} = \frac{\phi_{x,y,z}^{k+\frac{1}{2}} - \phi_{x,y,z}^{k-\frac{1}{2}}}{\Delta t} . \quad (10)$$

## 2 三维桩土模型

### 2.1 三维弹性波动方程和边界条件

建立桩土模型, 如图 2 所示。已知桩长为  $L$ , 桩径为  $D$ , 桩身密度为  $\rho_p$ , 拉梅常数为  $\lambda_p, \mu_p$ ; 桩侧土的密度为  $\rho_s$ , 拉梅常数为  $\lambda_s, \mu_s$ ; 桩底土的密度为  $\rho_b$ , 拉梅常数为  $\lambda_b, \mu_b$ 。对桩顶施加一个作用半径为  $r_0$  的纵向激振力  $P(t)$ 。

在低应变动测条件下, 假设桩土不分离, 同时不考虑体力, 将桩身、桩侧土和桩底土看作是各向同性

的线弹性体。因此，在桩土交界面处，速度和应力具有连续性。桩土系统振动的弹性波动方程可以用下式表示：

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \quad (11)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \quad (12)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad (17)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad (18)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \quad (19)$$

其中， $v_x, v_y, v_z$  分别表示质点振动的速度分量， $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  分别表示应力分量， $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  分别表示应变分量， $\rho$  表示弹性体的密度， $\lambda, \mu$  表示弹性体的拉梅常数。

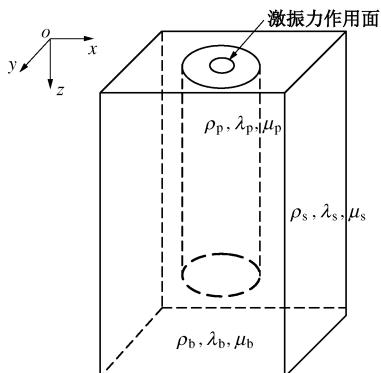


图 2 三维桩土模型示意图

Fig. 2 Schematic of three-dimensional pile-soil model

桩土模型的纵向激振力  $P(t)$  表示为

$$P(t) = \begin{cases} \frac{I}{t_0} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{t_0} t \right) & (0 \leq t \leq t_0) \\ 0 & (\text{其它}) \end{cases}, \quad (20)$$

其中， $I, t_0$  分别表示激振力冲量和作用时间。

在初始时刻，桩顶在没有受到激振力作用时，整个桩土系统处于静止状态，因此，在初始时刻，整个桩土系统中质点的速度分量和应力分量均为零。

桩顶和桩侧土顶部所在的界面上，纵向激振力产

生的桩顶弹性力为

$$\left. \sigma_z \right|_{z=0} = \begin{cases} -P(t)/(\pi r_0^2) & (\sqrt{x^2 + y^2} \leq r_0^2) \\ 0 & (\text{其它}) \end{cases}, \quad (21)$$

$$\left. \tau_{xz} \right|_{z=0} = \left. \tau_{yz} \right|_{z=0} = 0.$$

## 2.2 稳定性条件和吸收边界条件

计算过程中，整个模型需要满足 Courant 稳定性条件，即时间域和空间域采样间隔必须满足：

$$C_{\max} \Delta t \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2} \leq 1, \quad (22)$$

式中， $C_{\max}$  表示桩中最大波速， $\Delta t$  为时间步长， $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  分别为空间网格  $x, y, z$  方向的最小空间步长。

在波动方程的数值计算过程中，由于计算机内存的限制，需要对桩土系统的计算区域进行截取，从而保证数值计算能在有限的区域范围内得到实现，即在有限的区域中得到较高精度的无限空间解。本文采用 Higdon 吸收边界条件<sup>[16]</sup>，对桩土模型边界处的速度和应力分量进行吸收处理，以  $x$  方向边界为例，吸收边界条件表示为

$$B = \prod_{j=1}^m \left( \beta_i \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (23)$$

式中  $c$  是波速； $m$  是吸收边界条件的阶数； $\beta_i$  是正数，表示第  $i$  个算子能够完全吸收波速为  $c$ ，入射角为  $\pm \arccos \beta_i$  的弹性波。变步长交错网格有限差分吸收边界条件的差分算子表达形式为

$$D(E_x, E_t^{-1}) = \prod_{j=1}^m \left\{ \beta_i \left( \frac{I - E_t^{-1}}{\Delta t} \right) [(1-a)I + aE_x] - c \left( \frac{E_x - I}{\Delta x} \right) [(1-b)I + bE_t^{-1}] \right\}. \quad (24)$$

式中  $\Delta x$  和  $\Delta t$  分别表示  $x$  方向上的空间步长和时间步长； $I$  为单位算子，即不参与差分计算； $E_x$  为空间  $x$  方向的前移算子， $E_t$  为时间上的前移算子； $a$  和  $b$  分别表示空间和时间上的加权平均系数，本文中取  $a=b=0.5$ 。

## 3 定解问题的差分离散

令  $f_{x,y,z}^k$  表示空间直角坐标系中的任意速度和应力分量。为了解决一阶弹性波动方程中速度和应力存在的不连续性，对空间网格中的速度和应力分量进行交错采样，本文采用的交错网格参见文献[13]，通过把速度分量和应力分量定义在不同的网格系统上，保证了速度和应力的连续性。

用上面推导的变步长交错网格差分公式对式 (11) ~ (19) 进行差分离散，得到差分方程组：

$$v_x^{k+\frac{1}{2}} = v_x^{k-\frac{1}{2}} + (D_x \sigma_x^k + D_y \tau_{xy}^k + D_z \tau_{xz}^k) \Delta t / \rho, \quad (25)$$

$$v_z^{k+\frac{1}{2}} = v_z^{k-\frac{1}{2}} + (D_x \tau_{xy}^k + D_y \sigma_y^k + D_z \tau_{yz}^k) \Delta t / \rho, \quad (26)$$

$$v_z^{k+\frac{1}{2}} = v_z^{k-\frac{1}{2}} + (D_x \tau_{xz}^k + D_y \tau_{yz}^k + D_z \sigma_z^k) \Delta t / \rho, \quad (27)$$

$$\sigma_x^{k+\frac{1}{2}} = \sigma_x^{k-\frac{1}{2}} + [\lambda(D_y v_y^k + D_z v_z^k) + (\lambda + 2\mu) D_x v_x^k] \Delta t, \quad (28)$$

$$\sigma_y^{k+\frac{1}{2}} = \sigma_y^{k-\frac{1}{2}} + [\lambda(D_x v_x^k + D_z v_z^k) + (\lambda + 2\mu) D_y v_y^k] \Delta t, \quad (29)$$

$$\sigma_z^{k+\frac{1}{2}} = \sigma_z^{k-\frac{1}{2}} + [\lambda(D_x v_x^k + D_y v_y^k) + (\lambda + 2\mu) D_z v_z^k] \Delta t, \quad (30)$$

$$\tau_{xy}^{k+\frac{1}{2}} = \tau_{xy}^{k-\frac{1}{2}} + \mu(D_y v_x^{k+\frac{1}{2}} + D_x v_y^{k+\frac{1}{2}}) \Delta t, \quad (31)$$

$$\tau_{xz}^{k+\frac{1}{2}} = \tau_{xz}^{k-\frac{1}{2}} + \mu(D_z v_x^{k+\frac{1}{2}} + D_x v_z^{k+\frac{1}{2}}) \Delta t, \quad (32)$$

$$\tau_{yz}^{k+\frac{1}{2}} = \tau_{yz}^{k-\frac{1}{2}} + \mu(D_y v_z^{k+\frac{1}{2}} + D_z v_y^{k+\frac{1}{2}}) \Delta t, \quad (33)$$

其中,  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_z$  分别定义为  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向上的四阶精度变步长交错网格差分算子。

## 4 实例与数字计算分析

### 4.1 理论计算分析

由于计算模型在水平方向上的尺寸比较小, 因此采用相等的空间网格步长, 本文仅从竖直方向上考虑网格变化情况。通过建立桩土模型来考查变步长交错网格差分法的计算效果。模型桩为完整桩, 桩长  $L=11.0$  m, 桩直径  $D=700$  mm, 桩身密度  $\rho=2300$  kg/m<sup>3</sup>, 泊松比  $\nu=0.28$ , 弹性模量  $E=2.98 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>; 激振力冲量  $I=1.0$  N·s, 作用时间  $t_0=1.0$  ms, 作用半径  $r_0=0.04$  m; 桩侧土厚 0.2 m, 桩底土厚 0.4 m, 土参数如表 1 所示。

表 1 三维模型中的土参数

Table 1 Soil parameters of 3-D model

土类型	密度/(kg·m <sup>-3</sup> )	泊松比	剪切波速/(m·s <sup>-1</sup> )
桩侧土	1650	0.38	100
桩底土	1800	0.35	120

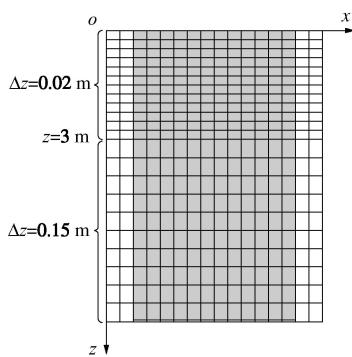


图 3 变步长网格划分示意图

Fig. 3 Schematic of variable step size mesh

对桩土模型分别采用常步长网格和变步长网格进行差分离散。在常步长网格情况下,  $\Delta z$  分别取 0.025 m、0.15 m; 对于变步长网格, 网格划分为两段, 如

图 3 所示, 图中为  $x-z$  剖面的网格划分示意图, 阴影部分为桩身投影, 当  $z \leq 3$  m 时  $\Delta z=0.02$  m, 当  $z > 3$  m 时  $\Delta z=0.15$  m。水平方向上的网格划分, 取  $\Delta x=\Delta y=0.025$  m, 对离散化后的波动方程的差分格式通过 MATLAB 编程进行数值计算。

很多研究表明当拾振位置在  $0.55R \sim 0.67R$  ( $R$  为桩身半径) 时, 动测响应受到的三维干扰最小<sup>[1, 3, 11]</sup>。本文参照柯宅邦建议的最佳拾振位置, 在距桩顶中心  $0.55R$  处进行采样, 得到三维干扰最小的数值模拟响应, 如图 4 所示。在对桩进行三维动力学计算的过程中, 为了减少计算时间, 差分网格的尺寸划分会比较大, 但是, 网格越稀疏, 所得曲线的频散现象非常明显, 有时甚至需要对曲线进行二次处理; 若为了提高正演精度而将计算网格划分的比较密, 这对桩长或桩径都很大的桩进行数值模拟时, 计算量非常大。在同一计算环境下, 通过程序运行可知, 当  $\Delta z=0.15$  m 时, 计算时间为 7206 s, 但是模拟曲线出现了严重的频散; 当网格  $\Delta z$  细化到 0.025 m 时, 模拟曲线的精度得到了保证但相应的计算时长增加到 27593 s; 采用变步长网格进行数值计算时, 计算时长为 15859 s, 计算精度也很高。这说明变步长网格在保证计算精度的前提下, 通过对网格步长的调整, 减少了计算时间和对计算机内存的占用, 计算效率得到提高。

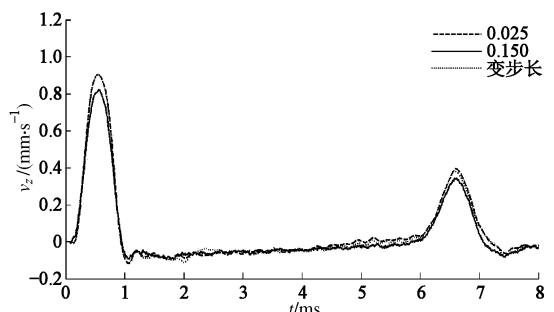


图 4 模型桩基于不同差分网格的数值模拟响应

Fig. 4 Numerical simulation of response of model piles based on different finite difference grids

图 5 为顶部中心剖面竖向速度时程图, 中间区域为桩顶, 两侧为桩侧土顶部, 图中虚线部分为桩土界面。在模型尺寸相同的情况下, 图 5 (a) 显示的是在没有采用吸收边界的情况下, 桩土顶部中心剖面竖向速度时程图。入射波到达模型界面后产生了反射, 在桩底反射波到达之前, 一部分反射波透射到桩身, 在桩身产生干扰信号, 这会对桩身完整性引起误判。为了规避模型界面反射波的影响, 桩侧土尺寸必须足够大, 从而保证人工界面反射波到达桩身的时间晚于桩底反射波到达桩顶。为实现这一目标, 就需要更大的计算时间和计算机内存。图 5 (b) 显示的是在采用吸

收边界的情况下, 桩土顶部中心剖面竖向速度时程图。在引入吸收边界后, 到达模型界面处的入射波完全被吸收边界所吸收, 从而没有产生反射信号, 桩底反射波清晰可见, 未受到干扰。

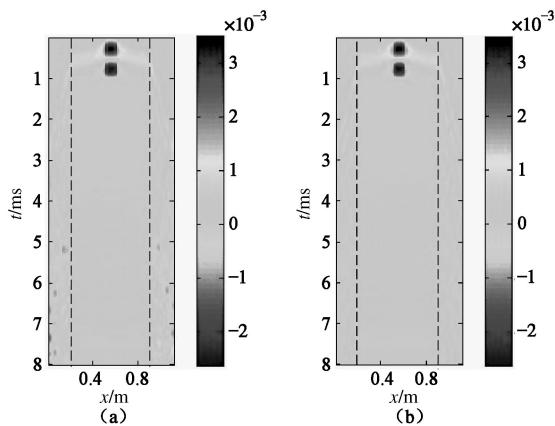


图 5 顶部中心剖面竖向速度时程图

Fig. 5 Time histories of vertical velocity at top of center section

#### 4.2 实际检验

通过对工程桩的模拟计算来考察变步长交错网格有限差分法的有效性。试验采用合肥工业大学试验桩基地中的#1 桩。#1 桩是人工挖孔灌注桩(完整桩), 混凝土等级为 C25, 桩长 7.0 m, 桩直径 800 mm。理论计算采用的主要参数: 桩身密度  $\rho = 2450 \text{ kg/m}^3$ , 桩长  $L = 7.0 \text{ m}$ , 桩直径  $D = 0.8 \text{ m}$ , 泊松比  $\nu = 0.28$ , 弹性模量  $E = 3.5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ; 激振力相关参数同上; 土参数如表 2 所示。

表 2 三维模型中的土参数

Table 2 Soil parameters of 3-D model

土类型	密度/(kg·m <sup>-3</sup> )	泊松比	剪切波速/(m·s <sup>-1</sup> )
桩侧土	1960	0.38	200
桩底土	1980	0.35	220

三维桩土模型的尺寸为  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 7.4 \text{ m}$ , 在网格划分上,  $\Delta x = \Delta y = 0.025 \text{ m}$ ; 完整桩垂直方向空间变步长网格划分为: 当  $z \leq 3 \text{ m}$  时  $\Delta z = 0.04 \text{ m}$ , 当  $z > 3 \text{ m}$  时  $\Delta z = 0.2 \text{ m}$ 。

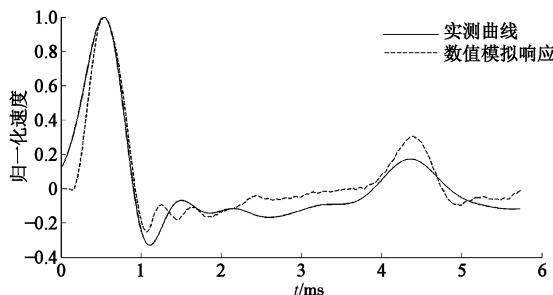


图 6 工程桩实测曲线拟合

Fig. 6 Measured fitting and curves of engineering piles  
利用变步长交错网格差分法对#1 桩进行数值模

拟, 计算得到相应的数值模拟响应, 如图 6 所示。结果表明, 数值模拟响应与实测曲线变化形态相一致, 说明了该差分方法具有很好的计算效果。

#### 4.3 桩身非对称缺陷的识别研究

在低应变动力测试中, 桩身缺陷通常为非对称缺陷, 由于拾振位置不同, 得到的动测曲线存在差别, 这需要进行理论研究。为了对该类缺陷桩实现有效地数值计算, 可以采用变步长交错网格有限差分计算方法, 在计算模型中, 缺陷位置采用较细小的计算网格, 其余部分采用较大网格。建立非对称缺陷桩的三维桩土模型, 桩长  $L = 8.0 \text{ m}$ , 桩直径  $D = 800 \text{ mm}$ , 相关桩土参数同上述模型桩, 如图 7 所示, 深色阴影部分为桩身设置的圆柱体缺陷在桩顶面的投影, 缺陷内为填土, 填土的参数密度  $\rho = 1650 \text{ kg/m}^3$ , 泊松比  $\nu = 0.38$ , 剪切波速  $v = 100 \text{ m/s}$ , 缺陷半径为  $200 \text{ mm}$ 。采用中心激振, 相关激振力参数和上述模型桩一致。在距桩顶中心  $0.55R$  半径的圆上, 选取 3 个不同的拾振点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ , 其中, 拾振点  $B$  位于缺陷垂直投影于桩顶面的位置。对计算模型网格进行划分, 在竖直方向上, 缺陷所在桩身段的单位网格  $\Delta z = 0.025 \text{ m}$ , 其余部分桩身段的单位网格  $\Delta z = 0.15 \text{ m}$ ; 水平截面上的常步长单位网格  $\Delta x = \Delta y = 0.025 \text{ m}$ 。

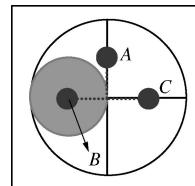


图 7 桩身非对称缺陷位置示意图

Fig. 7 Schematic of asymmetric defect location of a pile

桩身在距桩顶  $1.0 \sim 2.0 \text{ m}$  处存在非对称缺陷, 在各拾振点获得的数值模拟响应如图 8 所示。缺陷位置的一次反射中, 拾振点  $B$  的缺陷反射强度最大, 拾振点  $A$  次之, 拾振点  $C$  最小; 缺陷的二次反射不够明显。

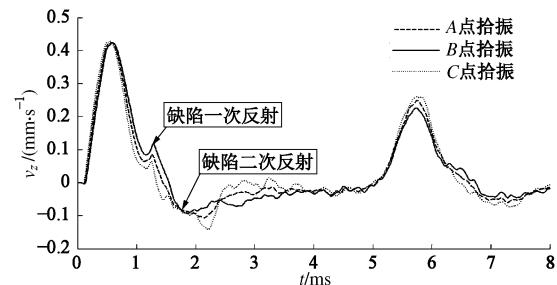


图 8 1.0~2.0 m 非对称缺陷桩的数值模拟响应

Fig. 8 Numerical simulation of response of 1.0~2.0 m asymmetric defect pile

桩身在距桩顶  $2.0 \sim 3.0 \text{ m}$  处存在非对称缺陷时, 在各拾振点获得的数值模拟响应如图 9 所示。缺陷一

次反射, 拾振点 C 的缺陷反射强度最大, 拾振点 A 次之, 拾振点 B 最小; 但在缺陷的二次反射中, 拾振 B 的缺陷反射强度最大, 拾振点 A 次之, 拾振点 C 最小。

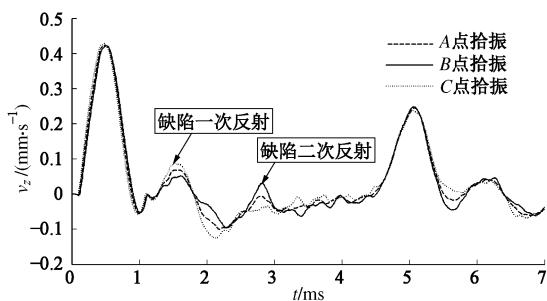


图 9 2.0~3.0 m 非对称缺陷桩的数值模拟响应

Fig. 9 Numerical simulation of response of 2.0~3.0 m asymmetric defect pile

桩身在距桩顶 3.0~4.0 m 处存在非对称缺陷时, 在各拾振点获得的数值模拟响应如图 10 所示。各拾振点的缺陷一次反射强度基本相同; 但缺陷的二次反射, 依然表现出拾振点 B 的缺陷反射强度最大, 拾振点 A 次之, 拾振点 C 最小。

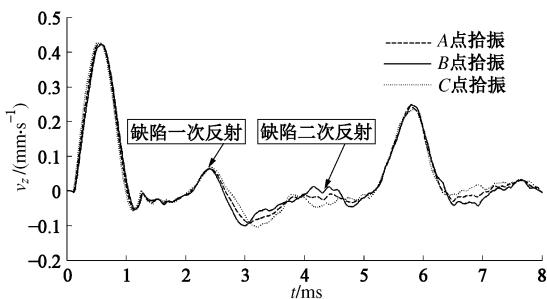


图 10 3.0~4.0 m 非对称缺陷的测数值模拟响应

Fig. 10 Numerical simulation of response of 3.0~4.0 m asymmetric defect pile

桩身在距桩顶 4.0~5.0 m 处存在非对称缺陷时, 在各拾振点获得的数值模拟响应如图 11 所示。缺陷的一次反射中, 各点的反射强度差别不大。

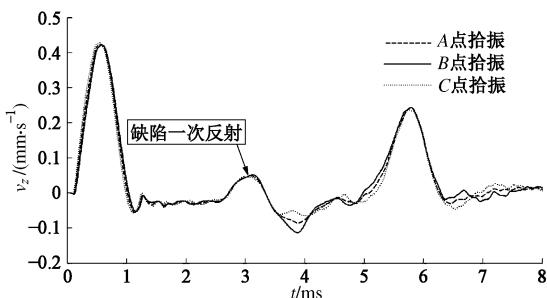


图 11 4.0~5.0 m 非对称缺陷桩的数值模拟响应

Fig. 11 Numerical simulation of response of 4.0~5.0 m asymmetric defect pile

通过上述分析可知, 当缺陷位置较浅时, 位于缺陷位置正上方的拾振点, 缺陷一次反射最强。当缺陷深度在 2.0 m 以下时, 缺陷对面的拾振点, 缺陷一次反射最强, 缺陷位置正上方拾振点的二次反射最强。当缺陷深度在 4.0 m 以下时, 各拾振点的一次反射基本一致。针对非对称缺陷桩在不同缺陷深度处得到的动测曲线与拾振位置存在的相关性, 在实测过程中, 要根据实际情况和经验合理选取拾振位置, 保证桩基检测的质量。

## 5 结 论

(1) 利用变步长交错网格有限差法计算了三维直角坐标系下的桩土系统振动问题, 得到了瞬态纵向激振力作用下桩顶低应变数值模拟响应, 很好地模拟了应力波在桩身的传播过程, 取得了良好的应用效果。

(2) 变步长网格可以根据实际需要, 依据不同的网格步长, 加密或减少计算模型的网格数量, 提高对桩土模型模拟的计算效率, 节约了计算时间。

(3) 引入 Higdon 吸收边界条件, 通过对模型边界处的反射波进行吸收处理, 很好的消除了模型边界处反射波对桩身纵向振动的干扰。采用吸收边界后, 计算模型尺寸大大减小, 减少了对计算机内存的占用, 提高了计算效率。

(4) 在变步长交错网格有限差法对桩身存在的非对称缺陷的数值计算中, 通过加密缺陷处的网格单元, 在保证计算效率的同时, 分析了缺陷位置和拾振点位置的相关性。

## 参考文献:

- [1] 陈凡, 王仁军. 尺寸效应对基桩低应变完整性检测的影响[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(5): 92~96. (CHEN Fan, WANG Ren-jun. Dimension effect on low strain integrity testing of piles[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, 20(5): 92~96. (in Chinese))
- [2] CHOW Y K, PHOON K K, CHOW W F, et al. Low strain integrity testing of piles: three dimensional effects[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2003, 129(11): 1057~1062.
- [3] CHAI H Y, PHOON K K, ZHANG D J. Effects of the source on wave propagation in pile integrity testing[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2010, 136(9): 1200~1208.
- [4] AKI K, RICHARDS P G. Quantitative seismology, theory and methods[M]. San Francisco: W H Freeman & Co, 1980.
- [5] SCHUBERT F, PEIFFER A, KOHLER B. The elastodynamic

- finite integration technique for waves in cylindrical geometries[J]. Acoustical Society of America, 1998, **104**(5): 2064 - 2614.
- [6] GSELL D, LEUTENEGGER T, DUAL J. Modeling three-dimensional elastic wave propagation in circular cylindrical structures using a finite-difference approach[J]. Acoustical Society of America, 2003, **116**(6): 3284 - 3293.
- [7] PITARKA A. 3D elastic finite-difference modeling of seismic motion using staggered grids with nonuniform spacing[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1999, **89**(1): 54 - 68.
- [8] 董良国, 马在田, 曹景忠, 等. 一阶弹性波方程交错网格高阶差分解法[J]. 地球物理学报, 2000, **43**(3): 411 - 419. (DONG Liang-guo, MA Zai-tian, CAO Jing-zhong, et al. A staggered-grid high-order difference method of one-order elastic wave equation[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2000, **43**(3): 411 - 419. (in Chinese))
- [9] 柴华友. 桩土相互作用对基桩定量分析的影响[J]. 岩土力学, 1996, **17**(4): 41 - 47. (CHAI Hua-you. Effect of pile-soil interaction on pile integrity quantitative analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 1996, **17**(4): 41 - 47. (in Chinese))
- [10] 刘东甲. 完整桩瞬态纵向振动的模拟计算[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2000, **23**(5): 683 - 687. (LIU Dong-jia. Simulation and calculation of transient longitudinal vibration of integrate piles[J]. Journal of Hefei University of Technology (Natural Science), 2000, **23**(5): 683 - 687. (in Chinese))
- [11] 柯宅邦, 刘东甲. 低应变反射波法测桩的轴对称问题数值计算[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(12): 2111 - 2115. (KE Zhai-bang, LIU Dong-jia. Numerical computation of axisymmetric problems in low strain integrity tests on piles[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(12): 2111 - 2115. (in Chinese))
- [12] 段军, 刘东甲, 程晓东, 等. 桩的一维纵向振动问题的交叉网格有限差分法数值计算[J]. 工程地球物理学报, 2008, **5**(1): 54 - 59. (DUAN Jun, LIU Dong-jia, CHENG Xiao-dong, et al. Numerical calculation of one dimensional longitudinal vibration of pile by finite difference method of staggered grid[J]. Chinese Journal of Engineering Geophysics, 2008, **5**(1): 54 - 59. (in Chinese))
- [13] 卢志堂, 刘东甲, 龙丽丽, 等. 基桩低应变检测三维问题的数值计算[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2011, **34**(6): 905 - 909. (LU Zhi-tang, LIU Dong-jia, LONG Li-li, et al. 3-D numerical computation for low strain integrity testing of piles[J]. Journal of Hefei University of Technology (Natural Science), 2011, **34**(6): 905 - 909. (in Chinese))
- [14] LU Z T, WANG Z L, LIU D J. Study on low-strain integrity testing of pipe-pile using the elastodynamic finite integration technique[J]. International Journal for Numerical and Analytical methods in Geomechanics, 2013, **37**: 536 - 550.
- [15] 孙卫涛. 弹性波动方程的有限差分数值方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009. (SUN Wei-tao. The finite difference numerical method of elastic wave equation[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009. (in Chinese))
- [16] HIGDON R L. Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation[J]. Mathematics of Computation, 1986, **47**: 437 - 459.