

DOI: 10.11779/CJGE201409016

## 第二类越流系统中结构性弱透水土层一维固结解析解

吴 浩, 谢康和, 黄大中

(浙江大学滨海和城市岩土工程研究中心, 浙江 杭州 310058)

**摘要:** 在第二类越流系统中, 考虑弱透水土层的结构性, 将单层土转化为土体厚度不断变化的双层土一维固结问题, 推导了以水头表示的结构性弱透水土层的一维固结解析解, 进而给出了水位瞬时和线性下降情况的解答。结合3种不同算例, 分析了在水位瞬时下降情况下, 土的结构性对固结性状的影响。结果表明: 结构特性越强, 水头变化越慢, 趋于稳定的时间越长, 按沉降定义的平均固结度在结构性强的土层中增加得越缓慢。

**关键词:** 弱透水土层; 越流系统; 结构性; 双层土; 解析解

中图分类号: TU47 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2014)09-1688-08

作者简介: 吴 浩(1988-), 男, 硕士研究生, 主要从事软黏土工程和地基处理的研究工作。E-mail: wuhao6812006@163.com。

### Analytical solution for one-dimensional consolidation of structured aquitard soils in second kind of leakage system

WU Hao, XIE Kang-he, HUANG Da-zhong

(Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

**Abstract:** Considering the behaviors of structured aquitard soils, the analytical solutions expressed by water head for one-dimensional consolidation of structured aquitard soils in the second kind of leakage system are deduced by transforming the structured soils into the double-layered ones with gradually changing thickness. The solutions are given in the case of instantaneous and linear decline of confined aquifer water level respectively. By comparing three different examples, the effects of the structured behaviors on the consolidation characteristics are analyzed in the case of instantaneous decline of confined aquifer water level. The results illustrate that the more conspicuously the structural behaviors perform, the slower the changing rate of the water level is, and that it takes longer time for the water level to achieve stable state, consequently, the increase rate for the average degree of consolidation in terms of deformation becomes slower.

**Key words:** aquitard soil; leakage system; structured behavior; double-layered soil; analytical solution

### 0 引言

由抽水层、弱透水层和相邻含水层(如果有的话)组成的含水层系统称为越流系统。对越流系统含水层抽水时, 弱透水层往往产生弹性释水, 并引发固结沉降问题, 这也恰恰是造成地面沉降的主导因素<sup>[1]</sup>。而弱透水层软黏土在其形成过程中, 往往受沉积力、沉积环境及土颗粒间胶结作用等的影响, 大部分都具有结构性<sup>[2]</sup>。已有试验表明: 当土体的结构破坏后, 其渗透性降低, 压缩性增大<sup>[3]</sup>。因此, 当含水层中水位降低显著, 引起弱透水土层中释水后有效应力大于结构屈服应力, 致使土的结构性遭到破坏后, 必将引起与不考虑结构性时差异的固结性状, 而这种差异性是不可忽略的, 因此开展该方面的理论研究具有十分重要的意义。

国内外学者对越流系统中水位变化引发弱透水层

的固结沉降问题做了一系列的研究。Hantush<sup>[4-5]</sup>研究了越流含水层中的定水头, 定流量抽水引起的弱透水层弹性释水问题。Ortega等<sup>[6]</sup>通过观测, 研究了墨西哥城附近抽水引发的弱透水层水力梯度变化及固结性状。任福尧等<sup>[7]</sup>结合上海两地的观测值, 从理论上分析了由抽、灌水引起的地面沉降或回弹的一维固结问题。骆冠勇等<sup>[8]</sup>推导了含水层减压引起的一维沉降固结度计算公式。曾婕等<sup>[9]</sup>采用含水层非稳定水位作为弱透水层边界条件, 给出了孔隙水压和固结变形的解析解。刘加才等<sup>[10]</sup>分析了考虑弱透水层土的黏弹塑性一维固结问题。

然而, 以上大多数研究并未考虑弱透水层土的结

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(51278453, 51179170); 教育部高校博士点专项科研基金项目(20120101110029)

收稿日期: 2014-01-13

构性对固结性状的影响。为此, 本文将引入双层地基一维固结思想<sup>[11-12]</sup>, 采用简化的  $k_v - \sigma'$  和  $m_v - \sigma'$  分段模型<sup>[13]</sup>来表征土的结构特性, 将含水层水位变化作为弱透水层土的固结边界条件, 推导以水头表示的一维固结解析解, 分析结构性的强弱对土层水头随时间变化及固结性状的影响。

## 1 问题的描述

### 1.1 越流系统模型

主含水层为抽水层, 上有一较厚的弱透水层, 抽水前, 主含水层与潜水层为定水头含水层, 将弱透水层顶面作为基准面, 并设初始水头同为  $h_0$ , 基本模型如图 1 所示。

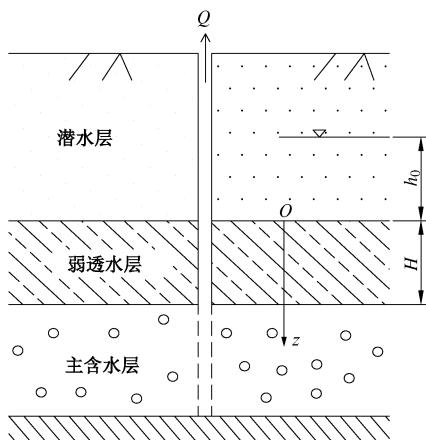


图 1 第二类越流系统模型图

Fig. 1 Conceptual model for second aquifer-aquitard system

### 1.2 基本假定及计算模型

除土的渗透系数和压缩系数及加载条件外, 与太沙基一维固结理论相同的假定。并设弱透水土层的厚度为  $H$ , 且任意位置处的总应力不变, 结构屈服应力为  $\sigma'_p$ 。主含水层水头随时间的变化如图 2 所示(图中  $t' = t - t_0$ )。

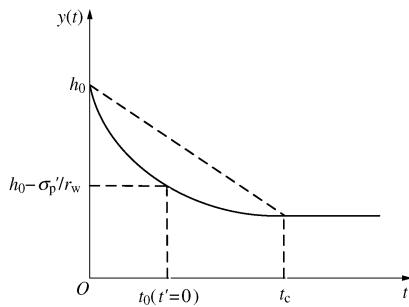


图 2 含水层水头变化曲线

Fig. 2 Variation of confined aquifer water head with time

当主含水层水头下降所引起土层有效应力增加值小于土体结构屈服应力时, 土体渗透系数和压缩系数不变。随着孔隙水压的不断消散, 当有效应力增加值大于结构屈服应力时, 下层土体开始发生结构破坏,

随着固结的进行, 弱透水层中存在一向向上移动的边界, 位于边界以下部分的土体渗透系数和压缩系数发生变化, 边界以上部分的土体与原状土相同。移动边界最终趋于某一特定的位置不再向上发展。计算简图如图 3 所示。

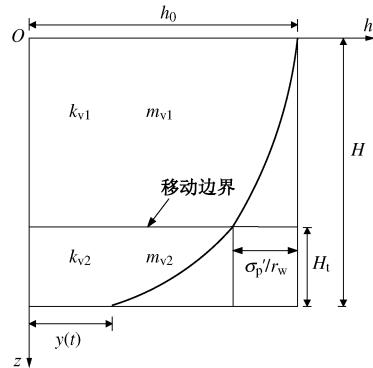


图 3 结构性弱透水层计算简图

Fig. 3 Calculation of structured aquitard

为便于推导解析解, 对软土的结构性曲线进行简化, 采用分段模型<sup>[13]</sup>。其模型如图 4 所示。

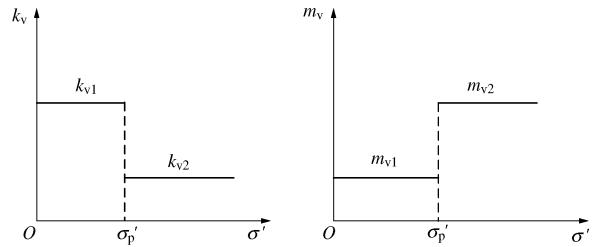


图 4 渗透系数和压缩系数简化模型

Fig. 4 Simplified model for variation of permeability and volume compressibility

当  $0 < t \leq t_0$  时, 可由太沙基一维固结理论获得  $t_0$  时刻的水头  $h(z)$ 。

当  $t_0 < t$  时, 对任意时刻  $t$ , 相应的结构性破坏的土层厚度为  $H_t$ , 于是转化为双层弱透水土层进行考虑。采用  $t'(t' = t - t_0)$  作为横坐标, 则求解方程为

$$c_{vi} \frac{\partial^2 h_i}{\partial z^2} = \frac{\partial h_i}{\partial t'} \quad (z_i \geq z \geq z_{i-1}, i=1,2), \quad (1)$$

边界条件为

$$\left. \begin{array}{l} h_1|_{z=0} = h_0, \\ h_2|_{z=H} = y(t'), \end{array} \right\} \quad (2)$$

层间连续条件

$$h_1|_{z=H-H_t} = h_2|_{z=H-H_t}, \quad (3)$$

$$k_{v1} \frac{\partial h_1}{\partial z}|_{z=H-H_t} = k_{v2} \frac{\partial h_2}{\partial z}|_{z=H-H_t}, \quad (4)$$

初始条件:

$$h|_{t'=0} = h(z), \quad (5)$$

式中,  $c_{v1} = \frac{k_{v1}}{r_w m_{v1}}$ ,  $c_{v2} = \frac{k_{v2}}{r_w m_{v2}}$ 。

## 2 求解过程

### 2.1 一般解答

(1) 水头计算

$0 < t \leq t_0$  时, 据文献[14]可得  $t$  时刻弱透水层的水头为

$$h(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{M}{H}z\right) \left( \frac{2(-1)^m}{M} e^{-\delta_m t} \int_0^t y'(\tau) e^{\delta_m \tau} d\tau \right) + h_0 - \frac{\sigma'_p z}{r_w H}, \quad (6)$$

式中,  $M = m\pi$ , ( $m = 1, 2, 3, \dots$ );  $\delta_m = \frac{c_{v1} M^2}{H^2}$ 。于是  $t = t_0$

时刻的土层水头为

$$h(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{M}{H}z\right) \left[ \frac{2(-1)^m}{M} e^{-\delta_m t_0} \int_0^{t_0} y'(\tau) e^{\delta_m \tau} d\tau \right] + h_0 - \frac{\sigma'_p z}{r_w H}. \quad (7)$$

当  $t_0 < t$  时, 对于任意一个固定的时刻  $t$ , 可以确定对应的下层土厚度  $H_t$ 。

定义无量纲参数:  $a = k_{v2}/k_{v1}$ ,  $b = m_{v2}/m_{v1}$ ,  $c = H_t/(H - H_t)$ , 由于边界条件非齐次, 可采用变量替换的思想将边界条件转化为齐次。

引入变换:

$$w_1 = h_1 - h_0 - \frac{a(y(t') - h_0)z}{a(H - H_t) + H_t}, \quad (8a)$$

$$w_2 = h_2 - \frac{y(t')(H - H_t)(a - 1) + H \times h_0}{a(H - H_t) + H_t} - \frac{(y(t') - h_0)z}{a(H - H_t) + H_t}. \quad (8b)$$

原求解方程转化为

$$c_{v1} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = \frac{\partial w_1}{\partial t'} + \frac{ay(t')z}{a(H - H_t) + H_t} \quad (0 \leq z \leq H - H_t), \quad (9a)$$

$$c_{v2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} = \frac{\partial w_2}{\partial t'} + \frac{y'(t')z - (1-a)y(t')(H - H_t)}{a(H - H_t) + H_t} \quad (H - H_t \leq z \leq H). \quad (9b)$$

则有定解条件:

边界条件

$$w_1|_{z=0} = 0, \quad w_2|_{z=H} = 0, \quad (10)$$

层间连续条件

$$w_1|_{z=H-H_t} = w_2|_{z=H-H_t}, \quad (11)$$

$$k_{v1} \frac{\partial w_1}{\partial z}|_{z=H-H_t} = k_{v2} \frac{\partial w_2}{\partial z}|_{z=H-H_t}, \quad (12)$$

初始条件

$$\left. \begin{array}{l} w_1|_{t'=0} = \varphi_1(z) \\ w_2|_{t'=0} = \varphi_2(z) \end{array} \right\}, \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= h(z) - h_0 + \frac{a\sigma'_p}{r_w [a(H - H_t) + H_t]} z \\ \varphi_2(z) &= h(z) + \frac{\sigma'_p}{r_w [a(H - H_t) + H_t]} z - \frac{h_0 H}{[a(H - H_t) + H_t]} - \\ &\quad \frac{(h_0 - \frac{\sigma'_p}{r_w})(H - H_t)(a - 1)}{[a(H - H_t) + H_t]}. \end{aligned}$$

参考太沙基单层地基一维固结解可设  $w_1$  和  $w_2$  的一般解形式为

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t') \sin\left(\lambda_m \frac{z}{H - H_t}\right) e^{-\beta_m t'}, \quad (14a)$$

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t') A_m \sin\left(\mu \lambda_m \frac{H - z}{H - H_t}\right) e^{-\beta_m t'}. \quad (14b)$$

$$\text{由条件 (11) 得 } A_m = \sin(\lambda_m)/\sin(\mu c \lambda_m), \quad (15)$$

$$\text{由条件 (12) 得 } \sqrt{ab} \tan(\lambda_m) \cot(\mu c \lambda_m) = -1, \quad (16)$$

式 (16) 为确定特征值  $\lambda_m$  的特征方程。

将式 (14a) 和式 (14b) 分别代入方程 (9a) 和 (9b) 得

$$\left. \begin{array}{l} \mu = \sqrt{\frac{c_{v1}}{c_{v2}}} = \sqrt{\frac{b}{a}}, \\ \beta_m = \frac{c_{v1} \lambda_m^2}{(H - H_t)^2}, \end{array} \right\} \quad (17)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ a'_m(t') + c_{v1} a_m(t') \left( \frac{\lambda_m}{H - H_t} \right)^2 \right] \sin\left(\lambda_m \frac{z}{H - H_t}\right) = -\frac{ay'(t')}{a(H - H_t) + H_t} z, \quad (18a)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ a'_m(t') + c_{v1} a_m(t') \left( \frac{\lambda_m}{H - H_t} \right)^2 \right] A_m \sin\left(\mu \lambda_m \frac{z}{H - H_t}\right) = -\frac{y'(t')}{a(H - H_t) + H_t} z + \frac{(1-a)y'(t')}{a+c}. \quad (18b)$$

由式 (16) 和以下正交关系:

$$\begin{aligned} &\int_0^{H-H_t} m_{v1} \sin(\lambda_m \frac{z}{H - H_t}) \sin(\lambda_n \frac{z}{H - H_t}) dz + \\ &\int_{H-H_t}^H m_{v2} A_m A_n \sin(\mu \lambda_m \frac{H - z}{H - H_t}) \sin(\mu \lambda_n \frac{H - z}{H - H_t}) dz \\ &= \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{1}{2} (H - H_t)^2 (1 + b c A_m^2) & (m = n) \end{cases}. \quad (19) \end{aligned}$$

则式 (18) 可简化成

$$a'_m(t') + c_{v1}a_m(t')\left(\frac{\lambda_m}{H - H_t}\right)^2 = C_m y'(t') , \quad (20)$$

式中,  $C_m = \frac{2\cos(\lambda_m)}{\lambda_m(1+bcA_m^2)\cos(\mu\lambda_m)}$ 。

于是解得  $a_m(t') = e^{-\beta_m t'} \left( \int_0^{t'} C_m y'(\tau) e^{\beta_m \tau} d\tau + B_m \right)$ , (21)

其中,  $B_m$  为待定系数。

由式 (13)、(14), 式 (19) 可解得

$$a_m(0) = B_m = \frac{2 \left[ \int_0^{H-H_t} \varphi_1(z) \sin\left(\lambda_m \frac{z}{H - H_t}\right) dz \right]}{(H - H_t)(1+bcA_m^2)} + \frac{\int_{H-H_t}^H b\varphi_2(z) A_m \sin\left(\mu\lambda_m \frac{H-z}{H - H_t}\right) dz}{(H - H_t)(1+bcA_m^2)} , \quad (22)$$

至此, 可求出  $w_1, w_2$  的一般表达式。

进而可求出满足求解条件的  $h_1, h_2$  的一般解为

$$h_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\lambda_m \frac{z}{H - H_t}\right) e^{-\beta_m t'} \left( \int_0^{t'} C_m y'(\tau) e^{\beta_m \tau} d\tau + B_m \right) + h_0 + \frac{a(y(t') - h_0)z}{a(H - H_t) + H_t} , \quad (23a)$$

$$h_2 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\mu\lambda_m \frac{H-z}{H - H_t}\right) e^{-\beta_m t'} \left( \int_0^{t'} C_m y'(\tau) e^{\beta_m \tau} d\tau + B_m \right) + \frac{(y(t') - h_0)z}{a(H - H_t) + H_t} + \frac{y(t')(H - H_t)(a-1) + H \times h_0}{a(H - H_t) + H_t} , \quad (23b)$$

则弱透水层任一时刻任一深度处的孔压为

$$\begin{cases} u_1 = r_w \times (h_1 + z) & (0 \leq z \leq H_t) \\ u_2 = r_w \times (h_2 + z) & (H_t \leq z \leq H) \end{cases} . \quad (24)$$

当  $z = H - H_t$  时, 土层的有效应力等于结构屈服应力, 即  $\sigma'_p = r_w \times (h_0 - h_1|_{z=H-H_t})$ 。展开得

$$\sigma'_p = -r_w \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\lambda_m) e^{-\beta_m t'} \left( \int_0^{t'} C_m y'(\tau) e^{\beta_m \tau} d\tau + B_m \right) + r_w \frac{a(h_0 - y(t'))}{a + c} , \quad (25)$$

式中,  $c, \lambda_m, \beta_m, C_m$  及  $B_m$  均与  $H_t$  有关。已知移动边界所处位置, 可求得对应的时间  $t$ ; 同理, 已知时间  $t$  亦可求得相对应的移动边界位置  $H_t$ 。

## (2) 固结度计算

弱透水层任一时刻  $t$  的压缩量为

$$S_t = m_{v1} \int_0^H r_w (h_0 - h) dz \quad (0 < t \leq t_0) , \quad (26a)$$

$$S_t = m_{v1} \int_0^{H-H_t} r_w (h_0 - h_1) dz + m_{v1} \sigma'_p H_t + m_{v2} \int_{H-H_t}^H r_w (h_0 - \frac{\sigma'_p}{r_w} - h_2) dz \quad (t \geq t_0) . \quad (26b)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时,  $y(t')|_{t \rightarrow \infty} = h_0 - \Delta h$ , 由式(23)和(25)可得

$$\frac{\sigma'_p}{r_w} = \frac{a(\Delta h)}{a + c} , \quad (27)$$

$$h_1 = h_0 - \frac{a(\Delta h)z}{a(H - H_t) + H_t} , \quad (28a)$$

$$h_2 = h_0 + \frac{(1-a)(\Delta h) + H \times h_0}{a + c} - \frac{(\Delta h)z}{a(H - H_t) + H_t} , \quad (28b)$$

式中

$$H_t = \frac{aH(\Delta h \times r_w - \sigma'_p)}{\sigma'_p + a(\Delta h \times r_w - \sigma'_p)}, \quad H - H_t = \frac{H\sigma'_p}{\sigma'_p + a(\Delta h \times r_w - \sigma'_p)}.$$

可见, 在  $\sigma'_p, \Delta h$  给定情况下, 移动边界最终所处位置跟  $a$ , 即上下土层的渗透系数比相关。

弱透水层的最终压缩量为

$$S_{\infty} = m_{v1} \sigma'_p \frac{aH(\Delta h \times r_w - \sigma'_p)}{\sigma'_p + a(\Delta h \times r_w - \sigma'_p)} + m_{v1} \int_0^{H-H_t} \frac{\sigma'_p}{H - H_t} z dz + m_{v2} r_w \int_{H-H_t}^H \left[ \frac{(z-H)(\Delta h r_w - \sigma'_p)}{r_w H_t} + \Delta h - \frac{\sigma'_p}{r_w} \right] dz = \frac{1}{2} m_{v1} \sigma'_p (H_t + H) + \frac{1}{2} m_{v2} H_t (\Delta h r_w - \sigma'_p) . \quad (29)$$

按沉降定义的平均固结度为

$$U_s = \frac{S_t}{S_{\infty}} = \begin{cases} \frac{2Hr_w(h_0 - \bar{h}_1)}{\sigma'_p(H_t + H) + bH_t(r_w \Delta h - \sigma'_p)} & (0 < t \leq t_0) \\ \frac{2[r_w(H - H_t)(h_0 - \bar{h}_1)] + \sigma'_p H_t}{\sigma'_p(H_t + H) + bH_t(r_w \Delta h - \sigma'_p)} + \\ \frac{r_w H_t b(h_0 - \frac{\sigma'_p}{r_w} - \bar{h}_2)}{\sigma'_p(H_t + H) + bH_t(r_w \Delta h - \sigma'_p)} & (t_0 \leq t) \end{cases} \quad (30)$$

式中,  $\bar{h}_1 = \frac{0}{H}, \bar{h}_1 = \frac{\int_0^{H-H_t} h_1 dz}{H - H_t}, \bar{h}_2 = \frac{\int_{H-H_t}^H h_2 dz}{H_t}$ 。可以验证, 当  $t \rightarrow \infty$ , 上式子中  $U_s = 1$ 。

## 2.2 特殊抽水情形下的解答

分别给出水头瞬时下降和线性下降,  $t_0 < t$  的解答。

水头瞬时下降时, 式(23)和(25)可转化为

$$h_1 = h_0 - \frac{a(\Delta h)z}{[a(H - H_t) + H_t]} - \Delta h \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\lambda_m \frac{z}{H - H_t}\right) e^{-\beta_m t} , \quad (31a)$$

$$h_2 = h_0 + \frac{\Delta h(1-a)}{a+c} - \frac{\Delta h}{[a(H - H_t) + H_t]} z - \Delta h \sum_{m=1}^{\infty} C_m A_m \sin\left(\mu\lambda_m \frac{H-z}{H - H_t}\right) e^{-\beta_m t} , \quad (31b)$$

$$\frac{\sigma'_p}{r_w} - \frac{a(\Delta h)}{a+c} - \Delta h \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin(\lambda_m) e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2} = 0, \quad (32)$$

式中,  $T_v = \frac{c_{vl} t}{H^2}$ 。

可以验证, 当不考虑土的结构性时, 即  $a = k_{v2}/k_{vl} = 1$ ,  $b = m_{v2}/m_{vl} = 1$ , 式 (31) 可以退化成文献[14]给出的水头表达式解答, 从而也说明了一般解答的正确性。

按沉降定义的固结度为

$$U_s = \frac{S_t}{S_\infty} = \frac{aH(\Delta h)r_w + (bc + 2ab - a)H_t(\Delta h)r_w}{[\sigma'_p(H_t + H) + bH_t(\Delta h r_w - \sigma'_p)](a+c)} + \frac{2\sigma'_p H_t(1-b)(a+c)}{[\sigma'_p(H_t + H) + bH_t(\Delta h r_w - \sigma'_p)](a+c)} + \frac{2r_w(\Delta h)(H - H_t) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{\lambda_m} [1 - \frac{\cos(\lambda_m)}{\cos(\mu c \lambda_m)}] e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2}}{[\sigma'_p(H_t + H) + bH_t(\Delta h r_w - \sigma'_p)]}, \quad (33)$$

可以验证, 当  $t \rightarrow \infty$ , 上式  $U_s = 1$ 。

水头线性下降时, 水头变化函数为

$$y(t) = \begin{cases} h_0 - \frac{\Delta h}{t_c} t & (0 < t \leq t_c) \\ h_0 - \Delta h & (t_c < t) \end{cases}. \quad (34)$$

$t = t_0$  时, 式 (6) 可转化为

$$h(z) = h_0 - \frac{z\sigma'_p}{r_w H} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(\Delta h)(-1)^{m+1}}{M^3 T_{vc}} \sin\left(\frac{M}{H} z\right) (1 - e^{-M^2 T_{v0}}). \quad (35)$$

当  $t_0 < t < t_c$  时, 式 (23) 和 (25) 分别转化为

$$h_i = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sin\left(\lambda_m \frac{z}{H - H_t}\right) \left[ \frac{C_m(-\Delta h)}{(1+c)^2 \lambda_m^2 T_{vc}} (1 - e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2}) + B_m e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2} \right] \right\} + h_0 - \frac{a(\Delta h)tz}{[a(H - H_t) + H_t]t_c} & i=1 \\ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_m \sin\left(\mu \lambda_m \frac{H-z}{H-H_t}\right) \left[ \frac{C_m(-\Delta h)}{(1+c)^2 \lambda_m^2 T_{vc}} (1 - e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2}) + B_m e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2} \right] \right\} + h_0 + \left( \frac{t\Delta h}{t_c} \right) \left( \frac{(1-a)(H-H_t)-z}{a(H-H_t)+H_t} \right) & i=2 \end{cases}, \quad (36)$$

$$\frac{\sigma'_p}{r_w} - \frac{a(\Delta h)t}{(a+c)t_c} + \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\lambda_m) \left[ \frac{C_m(-\Delta h)}{(1+c)^2 \lambda_m^2 T_{vc}} (1 - e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2}) + B_m e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2} \right] = 0, \quad (37)$$

式中,  $T_{v0} = \frac{c_{vl} t_0}{H^2}$ ,  $T_{v1} = T_v - T_{v0}$ ,  $T_{cl} = \frac{c_{vl}(t_c - t_0)}{H^2}$ 。

按沉降定义的固结度为

$$U_s = \frac{S_t}{S_\infty} = \frac{r_w aH(\Delta h)t + r_w(bc + 2ab - a)H_t(\Delta h)t}{[\sigma'_p(H_t + H) + bH_t(\Delta h r_w - \sigma'_p)](a+c)} + \frac{2\sigma'_p H_t(1-b)(a+c)t_c}{[\sigma'_p(H_t + H) + bH_t(\Delta h r_w - \sigma'_p)](a+c)} - 2r_w \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{H - H_t}{\lambda_m} \left[ 1 - \frac{\cos(\lambda_m)}{\cos(\mu c \lambda_m)} \right] \left[ \frac{C_m(-\Delta h)}{(1+c)^2 \lambda_m^2 T_{vc}} \right] \times (1 - e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2}) + B_m e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2} \right\} / [\sigma'_p(H_t + H) + bH_t(r_w \Delta h - \sigma'_p)] \quad (38)$$

当  $t > t_c$  时, 由式 (23) 和 (25) 可得到

$$h_i = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sin\left(\lambda_m \frac{z}{H - H_t}\right) \left[ \frac{C_m(-\Delta h)}{(1+c)^2 \lambda_m^2 T_{vc}} (e^{-\lambda_m^2 T_{cl}(1+c)^2} - 1) \times \right. \right. \\ \left. \left. e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2} + B_m e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2} \right] \right\} - \frac{a(\Delta h)tz}{[a(H - H_t) + H_t]t_c} + h_0 & (i=1), \\ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_m \sin\left(\mu \lambda_m \frac{H-z}{H-H_t}\right) \left[ \frac{C_m(-\Delta h)}{(1+c)^2 \lambda_m^2 T_{vc}} (e^{-\lambda_m^2 T_{vc}(1+c)^2} - 1) \times \right. \right. \\ \left. \left. e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2} + B_m e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2} \right] \right\} + h_0 + \\ \frac{(1-a)\Delta h}{a+c} - \frac{z(\Delta h)}{a(H - H_t) + H_t} & (i=2), \end{cases} \quad (39)$$

$$\frac{\sigma'_p}{r_w} - \frac{a(\Delta h)z}{[a(H - H_t) + H_t]} + \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\lambda_m) \frac{z}{H - H_t} \left[ \frac{C_m(-\Delta h)}{(1+c)^2 \lambda_m^2 T_{vc}} \times \right. \\ \left. e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2} (e^{-\lambda_m^2 T_{cl}(1+c)^2} - 1) + B_m e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2} \right] = 0. \quad (40)$$

按沉降定义的平均固结度为

$$U_s = \frac{S_t}{S_\infty} = \frac{r_w(bc + 2ab - a)H_t(\Delta h)}{[\sigma'_p(H_t + H) + bH_t(r_w \Delta h - \sigma'_p)](a+c)} + \frac{r_w aH(\Delta h) + 2\sigma'_p H_t(1-b)(a+c)}{[\sigma'_p(H_t + H) + bH_t(r_w \Delta h - \sigma'_p)](a+c)} - 2r_w \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{(H - H_t)}{\lambda_m} \left[ 1 - \frac{\cos(\lambda_m)}{\cos(\mu c \lambda_m)} \right] \left[ \frac{C_m(-\Delta h)}{(1+c)^2 \lambda_m^2 T_{vc}} \times \right. \right. \\ \left. \left. e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2} (e^{-\lambda_m^2 T_{cl}(1+c)^2} - 1) + B_m e^{-\lambda_m^2 T_{v1}(1+c)^2} \right] \right\} / [\sigma'_p(H_t + H) + bH_t(r_w \Delta h - \sigma'_p)] \quad (41)$$

### 3 计算及分析

#### 3.1 算例简介

现考虑瞬时抽水情形, 结合 3 种不同算例, 分析弱透水土层的结构性对固结性状的影响。假定土层计算参数见表 1, 厚度取 15 m, 初始水头  $h_0 = 15$  m, 含水层水头瞬时下降 10 m, 土的结构屈服应力取 50 kPa。

表 1 3 种算例下的固结计算参数

Table 1 Parameters of consolidation for three examples

算例	渗透系数/( $10^{-8} \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )		体积压缩系数/MPa $^{-1}$	
	原状土	重塑土	原状土	重塑土
1	1.6	1.6	0.4	0.4
2	1.6	0.8	0.4	0.8
3	1.6	0.4	0.4	1.6

### 3.2 水头及孔压曲线

采用上述理论和给出的参数, 进行一维固结性状分析。由图 5, 6 可知, 算例 2, 3 (考虑结构性) 与算例 1 (不考虑结构性) 相比, 水头减小速率更慢, 且算例 3 (结构性最强) 的减小速率最慢。由于抽水使得土层有效应力增加并导致结构破坏, 渗透系数降低, 致使弱透水层的释水速率减缓。且结构性越强, 释水速率越慢。

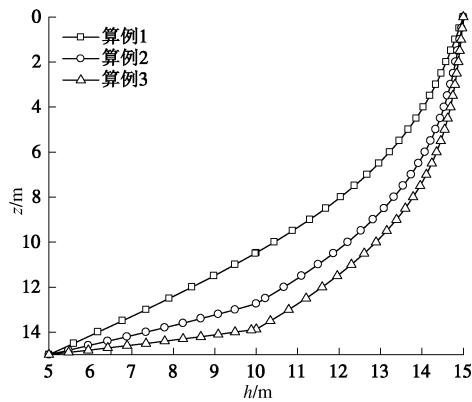
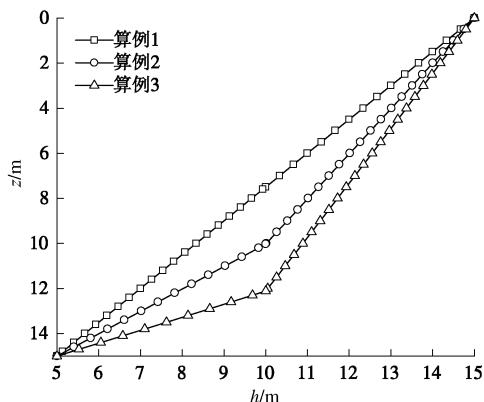
图 5  $T_v=0.1$  水头曲线Fig. 5 Curves of water head-depth for time factor of  $T_v$  at 0.1图 6  $T_v=1$  水头曲线Fig. 6 Curves of water head-depth for time factor of  $T_v$  at 1

图 7, 8 反映了土层中孔隙水压的变化趋势, 由此可知孔压的变化趋势是先增大后减小, 算例 2, 3 的值大于算例 1。且 2, 3 曲线接近底部处有明显的转折点。这可以看作是两部分孔压叠加的结果, 一方面静水压力随着深度的增加而增大; 另一方面, 弱透水层底部释水, 导致孔压降低。且渗透系数减小得越多, 同一深度处的孔隙水压越大, 孔压转折点越靠近底部。

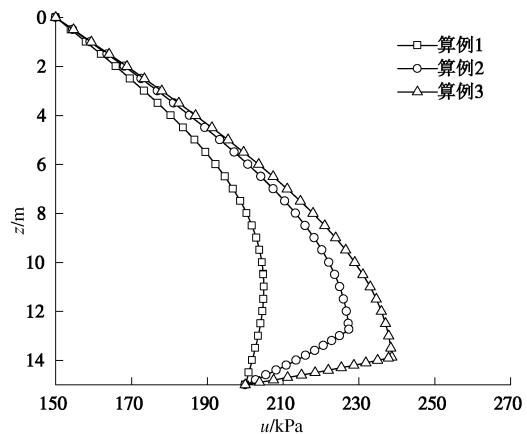
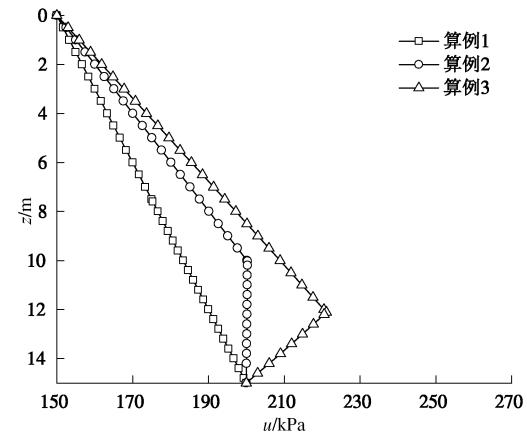
图 7  $T_v=0.1$  孔压曲线Fig. 7 Curves of pore pressure-depth for time factor of  $T_v$  at 0.1图 8  $T_v=1$  孔压曲线Fig. 8 Curves of pore pressure-depth for time factor of  $T_v$  at 1

图 9~11 反映了不同算例下水头随时间因子的变化趋势。图 9 曲线与已有算例相吻合<sup>[14]</sup>, 在图 10, 11 曲线中, 存在一个非光滑点, 该点水头的减小值正好对应着土体的结构屈服应力, 这与计算的移动边界所处位置相吻合。且移动边界随着时间的增加不断上移, 最终趋于某特定位置, 该最终位置也与理论计算相吻合。

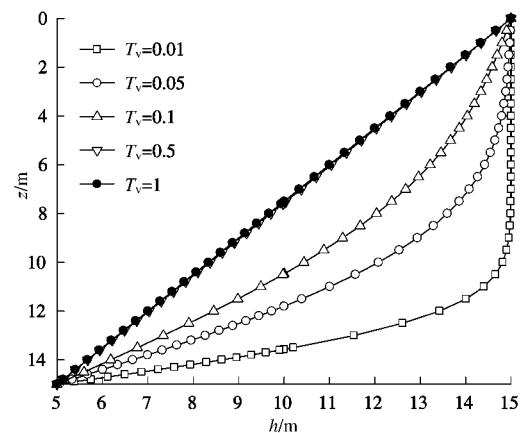


图 9 算例 1 不同时间因子孔压曲线

Fig. 9 Curves of water head-depth with different time factors for example No. 1

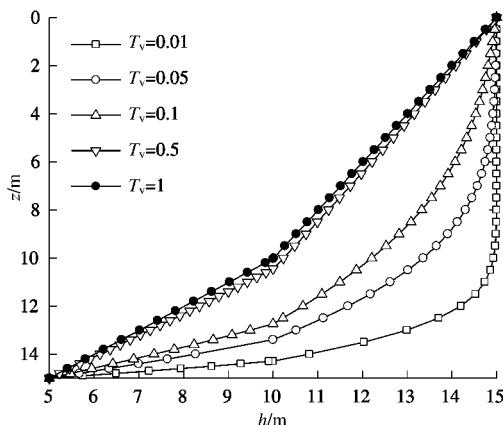


图 10 算例 2 不同时间因子孔压曲线

Fig. 10 Curves of water head-depth with different time factors for example No. 2

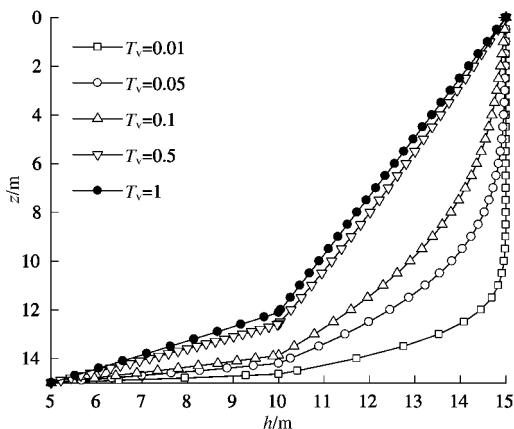


图 11 算例 3 不同时间因子孔压曲线

Fig. 11 Curves of water head-depth with different time factors for example No. 3

### 3.3 平均固结度曲线

图 12 反映的是不同算例下, 按沉降定义的平均固结度对比曲线。由图可知, 当考虑结构性时, 土层的

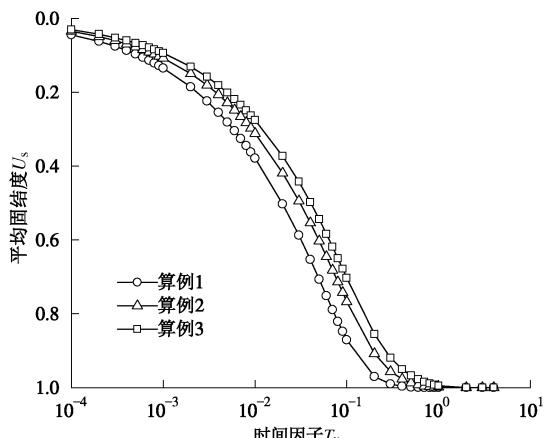
图 12 不同算例下的  $U_s$  对比曲线

Fig. 12 Curves of consolidation rate in terms of deformation for different examples

平均固结度小于不考虑时的土层平均固结度, 且结构性越明显, 平均固结度增加得越小。这可归结为两方面的原因: 一方面是由于土体结构破坏后, 体积压缩系数  $m_v$  增大, 导致总体最终沉降量  $S_\infty$  的增加; 另一方面, 渗透系数  $k_v$  的减少, 导致水头变化速率减缓, 即  $S_t$  的减小。时间因子  $T_v = 1$  时, 固结基本完成。

## 4 结 论

结合太沙基一维固结理论, 考虑弱透水土层的结构性, 研究了第二类越流系统中主含水层水位变化对固结性状的影响。通过引入简化的  $k_v - \sigma'$  和  $m_v - \sigma'$  分段模型, 并采用土层厚度随时间不断变化的双层地基一维固结思想, 推导了以水头表示的一维固结解析解。获得了水头瞬时下降和线性下降情形的解答。通过计算实例分析, 主要结论如下:

(1) 弱透水层土结构破坏后,  $k_v$  值减小, 致使释水速率减缓。且  $k_v$  值下降越多, 水头减小越慢。孔压变化趋势是先增大后减小, 结构性越强, 孔压转折点越靠近土层底部。

(2) 土层中移动边界位置随时间增加不断上移, 最终趋于某特定位置, 该位置与上下土层渗透系数之比, 结构屈服应力大小及主含水层水头最终下降高度有关。

(3) 土层结构性越明显, 按沉降定义的平均固结度  $U_s$  增加速率越慢。

(4) 论文在固结理论上作了些探索性研究工作, 对计算模型进行了相应简化; 算例分析参考了我国沿海地区部分结构性土参数, 由于渗透系数和体积压缩系数跟有效应力的变化有着密切关系, 要获取系统的实测数据存在一定困难, 对具体工程可按照本文给出的解析解, 适当调整相应参数进行计算, 获得结果具有一定的参考价值。

## 参 考 文 献:

- [1] 陈崇希, 林 敏. 地下水动力学[M]. 武汉: 中国地质大学出版社, 1999. (CHEN Chong-xi, LIN Min. Underground hydrodynamics[M]. Wuhan: China University of Geosciences Press, 1999. (in Chinese))
- [2] 沈珠江. 土体结构性的数学模型——21 世纪土力学的核心问题[J]. 岩土工程学报, 1996, 18(1): 95 - 97. (SHEN Zhu-jiang. Mathematical modelling considering soil structure: A key issue in soil mechanics in the 21st Century[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, 18(1): 95 - 97. (in Chinese))
- [3] 王 军, 陈云敏. 均质结构性软土地基的一维固结解析解

- [J]. 水利学报, 2003, **34**(3): 19 - 24. (WANG Jun, CHEN Yun-min. Analytical solution to one-dimensional consolidation of homogeneous structured soft foundation[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2003, **34**(3): 19 - 24. (in Chinese))
- [4] HANTUSH Mahdi S. Nonsteady flow to flowing wells in leaky aquifers[J]. Journal of Geophysical Research, 1959, **64**(8): 1043 - 1052.
- [5] HANTUSH Mahdi S. Modification of the theory of leaky aquifers[J]. Journal of Geophysical Research 1960, **65**(11): 3713 - 3725.
- [6] ORTEGA G A, RUDOLPH J A, D L. Large-scale aquitard consolidation near Mexico City[J]. Ground Water, 1993, **31**(5): 708 - 718.
- [7] 任福尧, 苏河源. 关于由抽水或灌水引起的隔水层的一维固结问题[J]. 上海地质, 1981(2): 44 - 55. (REN Fu-yao, SU He-yuan. One-dimensional consolidation of aquitard due to water extracting and filling[J]. Shanghai Geology, 1981(2): 44 - 55. (in Chinese))
- [8] 骆冠勇, 潘 泓, 曹 洪, 等. 承压水减压引起的沉降分析[J]. 岩土力学, 2004, **25**(2): 196 - 200. (LUO Guan-yong, PAN Hong, CAO Hong, et al. Analysis of settlements caused by decompression of confined water[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, **25**(2): 196 - 200. (in Chinese))
- [9] 曾 婕, 王旭东. 考虑含水层非稳定流的弱透水层一维固结解答[J]. 南京工业大学学报, 2012, **34**(2): 85 - 90. (ZENG Jie, WANG Xu-dong. Analytical solution to one-dimensional consolidation of aquitards for unsteady flow in confined aquifers[J]. Journal of Nanjing Technology, 2012, **34**(2): 85 - 90. (in Chinese))
- [10] LIU J C, LEI G G, MEI G X. One-dimensional consolidation of visco-elastic aquitard due to withdrawal of deep-groundwater[J]. Journal of Central South University, 2012, **19**: 282 - 286.
- [11] 袁茂田, 钱令希. 层状饱和土体一维固结分析[J]. 岩土力学, 1992, **13**(4): 45 - 56. (LUAN Mao-tian, QIAN Ling-xi. Analysis of one dimensional consolidation of layered saturated soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 1992, **13**(4): 45 - 56. (in Chinese))
- [12] 谢康和. 双层地基一维固结理论与应用[J]. 岩土工程学报, 1994, **16**(5): 24 - 35. (XIE Kang-he. Theory of one dimensional consolidation of double-layered ground and its applications[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, **16**(5): 24 - 25. (in Chinese))
- [13] 安 然, 谢康和, 邓岳保, 等. 变荷载下结构性土一维固结近似解[J]. 岩土力学, 2012, **33**(10): 3194 - 3200. (AN Ran, XIE Kang-he, DENG Yue-bao, et al. Approximate solution for one-dimensional consolidation of structured soils under time-dependent loading[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, **33**(10): 3194 - 3200. (in Chinese))
- [14] 谢康和, 陶立为, 王玉林, 等. 越流系统中弱透水层的一维固结解及分析[J]. 沈阳工业大学学报, 2012, **34**(5): 581 - 585. (XIE Kang-he, TAO Li-wei, WANG Yu-lin, et al. One-dimensional consolidation solution and analysis for aquitard in leakage system[J]. Journal of Shenyang University of Technology, 2012, **34**(5): 581 - 585. (in Chinese))