

DOI: 10.11779/CJGE201409004

混凝土面板坝面板动力损伤有限元分析

孔宪京^{1, 2}, 徐斌^{1, 2*}, 邹德高^{1, 2}, 单其宽², 胡志强^{1, 2}

(1. 大连理工大学海岸与近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024; 2. 大连理工大学水利工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 联合采用混凝土塑性损伤模型和堆石料弹性本构模型, 建立了面板堆石坝弹性动力分析方法, 研究了地震荷载作用下混凝土面板的损伤发生和发展过程。计算结果表明: 地震时, 在 $0.65H$ (H 为坝高) 附近顺坡向拉应力最大, 面板首先在该部位出现损伤, 同时由于鞭稍效应, $0.85H$ 面板附近也出现损伤; 采用损伤模型, 损伤部位的面板出现软化, 应力得到释放, 计算结果比线弹性模型更加合理; 采用塑性损伤模型可以反映混凝土面板渐进破坏过程, 通过损伤变量可以清晰地了解面板的损伤分布和薄弱环节。此研究成果可以为进一步开展混凝土面板堆石坝极限抗震能力及抗震措施分析提供有效手段。

关键词: 混凝土面板堆石坝; 塑性损伤; 弹塑性分析; 本构模型

中图分类号: TU435; TV641.43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2014)09-1594-07

作者简介: 孔宪京 (1952-), 男, 江苏南京人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事高土石坝抗震和岩土地震工程研究。E-mail: kongxj@dlut.edu.cn。

Finite element dynamic analysis for seismic damage of slabs of concrete faced rockfill dams

KONG Xian-jing^{1, 2}, XU Bin^{1, 2}, ZOU De-gao^{1, 2}, SHAN Qi-kuan², HU Zhi-qiang^{1, 2}

(1. State Key Laboratory of Coastal & Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2. School of Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A 3D elastic-plastic dynamic analysis procedure platform for concrete faced rockfill dams (CFRD) is developed by combining the elastic-plastic model for rock-fill materials with the plastic damage model for concrete. The damage occurrence and development process of concrete slabs under earthquake load are investigated using the procedure. The results show that the maximum slope-direction tensile stress of the slabs occurs at the height of 0.65 of the dam and results in the tensile damage of the slabs at this position during earthquakes. Also, the tensile damage of the slabs occurs at the height of 0.85 of the dam because of the “whiplash effect”. The plastic damage model for concrete can reflect the damage process of the slab precisely. The damage variable can be used to analyze of the damage distribution and weakness position of the slabs. The research results may provide an effective method for the studies on the limit aseismic capacity and the aseismic design of CFRDs.

Key words: CFRD; plastic damage; elastic-plastic analysis; constitutive model

0 引言

混凝土面板堆石坝由于具有安全、经济、适应环境和气候条件等优点, 深受坝工界的青睐, 成为一种有竞争力的坝型。面板作为面板坝的主要防渗结构, 是整个大坝正常工作的最重要防线, 保证其安全可靠地工作运行一直是坝工界研究的首要问题。

面板混凝土作为一种准脆性材料, 在较小荷载作用下, 表现为线弹性行为, 随着拉应力的增加, 混凝土将发生损伤开裂, 并表现出刚度退化和应变软化的特性。目前分析面板堆石坝面板应力时, 基本都采用线弹性模型, 导致计算的应力往往远超过混凝土的强度。汶川地震中, 紫坪铺面板堆石坝主要的震害现象^[1]

除了坝体震陷、坝顶结构与下游坝坡等局部破坏以外, 以面板挤压破坏、错台和脱空等防渗体震损最为严重, 对大坝的安全构成了严重威胁。紫坪铺大坝面板地震破坏现象超出了以往的设计经验, 在以往设计和抗震复核时均没有充分考虑。目前, 中国混凝土面板堆石坝的发展正面临着从 200 m 级向 300 m 级坝高跨越的

基金项目: 地震行业科研专项经费项目 (201208013); 国家自然科学基金重大研究计划集成项目 (91215301); 国家自然科学基金项目 (51379028; 51279025); 新世纪优秀人才支持计划资助项目 (NCET-12-0083)

收稿日期: 2014-01-06

*通讯作者

技术挑战, 工程上迫切需要对强震时超高面板坝防渗面板的工作特性, 尤其是面板破損机理进行系统研究。此外, 汶川地震后, 高土石坝的极限抗震能力评估引起了广泛的关注, 在进行面板坝极限抗震能力分析时, 可以允许面板发生一定程度的破損, 但不考虑在超强地震荷载下混凝土材料的刚度退化、应变软化和损伤特性, 很难得到客观的结果。因此, 采用塑性损伤模型来描述混凝土面板的非线性行为, 开展面板堆石坝弹塑性分析方法研究对于300 m级面板堆石坝的抗震设计显得尤为迫切。

国内外一些学者先后建立了基于宏观损伤力学的混凝土损伤模型^[2-4], 并将模型应用于研究混凝土重力坝的地震破坏过程和机理。其中, Lee等^[5]在Lubliner等^[4]研究基础上提出的塑性损伤模型进一步揭示了混凝土相互独立的拉、压损伤模式, 及反向加载时的刚度恢复现象, 并成功模拟了Koyna大坝震害^[6]。

本文在前期发展的筑坝堆石料弹塑性本构模型^[7-9]基础上, 引入Lee等^[5]提出的混凝土塑性损伤模型, 集成了面板堆石坝弹塑性静、动力分析方法, 开发了相应软件平台。通过对典型面板坝二维有限元动力反应分析, 研究混凝土面板在地震荷载作用下损伤的发生和发展过程。

1 混凝土塑性损伤模型^[5]

1.1 本构关系

损伤力学一般定义损伤因子 d ($0 \leq d \leq 1$), $d=0$ 表示材料为完好状态, $d=1$ 表示材料完全损伤, 对于混凝土材料, 意味着出现宏观裂缝。混凝土材料的总应力为

$$\sigma = (1-d)\bar{\sigma} = (1-d)E_0(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (1)$$

式中 $\bar{\sigma}$ 为有效应力; E_0 为初始弹性模量; ε 和 ε^p 分别为总应变和塑性应变。

由流动法则控制的塑性应变率通过标量塑性势函数 ϕ 假定, 对有效应力空间上的塑性势函数, 塑性应变率为

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial \phi(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \quad (2)$$

其中

$$\phi = \sqrt{2J_2} + \alpha_p I_1 \quad (3)$$

式中 λ 为塑性不变量; I_1 和 J_2 分别为主应力第一不变量和偏应力第二不变量; α_p 为与混凝土剪胀性相关的参数。

1.2 屈服条件

该屈服条件由Lubliner提出^[4], 经Lee等修改后^[5], 屈服面在有效应力空间定义, 屈服函数由有效应力和

损伤状态变量 κ 定义

$$\bar{F}(\bar{\sigma}, \kappa) = \frac{1}{1-\alpha} (\alpha I_1 + \sqrt{3J_2} + \beta(\kappa) \langle \bar{\sigma}_{max} \rangle) - c(\kappa) \quad (4)$$

式中 α 和 β 为无量纲参数; $\bar{\sigma}_{max}$ 是最大主应力的代数值; c 为内聚力参数。 α 和 β 分别被定义成

$$\alpha = \frac{f_{b0} - f_{c0}}{2f_{b0} - f_{c0}} \quad , \quad (5)$$

$$\beta = \frac{f_{c0}}{f_{t0}} (\alpha - 1) - (1 + \alpha) \quad . \quad (6)$$

式中 f_{c0} 和 f_{b0} 分别为单轴和双轴初始屈服应力; f_{t0} 为单轴初始屈服拉应力。图1为平面应力空间的初始屈服面, 该屈服面可退化为Drucker-Prager屈服面 ($\beta=0$) 和Mises屈服面 ($\alpha=\beta=0$)。

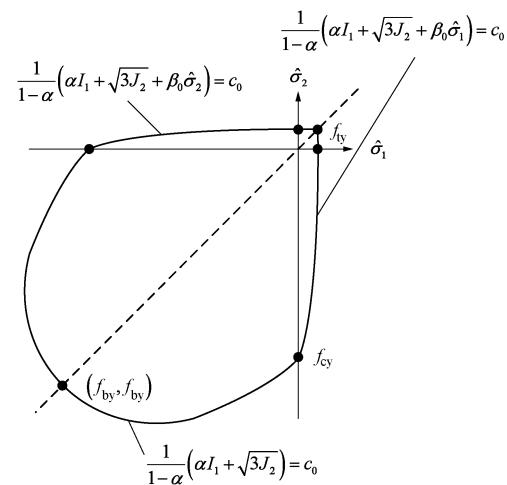


图1 平面应力空间的初始屈服面

Fig. 1 Initial yield function in plane stress space

1.3 损伤演化

对于准脆性材料的损伤可通过断裂能的耗散来定义, 同时拉、压受力状态会导致不同的损伤状态, 因此Lee等在Lubliner提出了Barcelona模型^[4]基础上进行了改进, 引入两个独立的损伤状态变量 κ_t 和 κ_c 来分别描述拉、压情况下的损伤描述。

损伤状态变量可以通过下式给出

$$\left. \begin{aligned} \kappa_k &= \frac{1}{g_k} \int_0^{\varepsilon^p} \sigma_k d\varepsilon^p \\ g_k &= \int_0^{\infty} \sigma_k d\varepsilon^p \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中 $k=t$ 表示受拉状态, $k=c$ 表示受压状态; g_k 为材料断裂能密度密度^[10], 与表征断裂带宽的单元特征长度 l_k 和断裂能 G_k 有关($g_k = G_k / l_k$)。

试验表明: 对于混凝土材料, 拉、压产生会微裂纹, 导致刚度退化。在循环荷载作用下, 微裂纹的张开与闭合使得刚度退化变得更加复杂。例如: 在从受拉转换为受压状态时, 材料刚度会得到恢复。因此,

模型中通过损伤状态变量 κ 来定义材料的拉压损伤因子

$$d(\kappa, \bar{\sigma}) = 1 - (1 - s_t d_c(\kappa_c))(1 - s_c d_t(\kappa_t)), \quad (8)$$

$$s_t = 1 - w_t r(\hat{\sigma}) \quad 0 \leq w_t \leq 1, \quad (9)$$

$$s_c = 1 - w_c r(\hat{\sigma}) \quad 0 \leq w_c \leq 1. \quad (10)$$

式中 d_t 和 d_c 分别单轴状态下的拉、压损伤因子; w_t 和 w_c 分别为拉、压刚度恢复系数, 0 表示刚度不恢复, 1 表示刚度完全恢复; $r(\hat{\sigma})$ 为权重因子, $0 \leq r(\hat{\sigma}) \leq 1$ 。

1.4 模型和程序数值验证

图 2(a)、(b) 给出了 Gopalaratnam 等^[11]和 Karsan 等^[12]进行的单轴拉、压试验与本文计算程序数值模拟结果的对比, 可以看出模拟的结果与试验吻合较好, 验证了计算程序的可靠性。

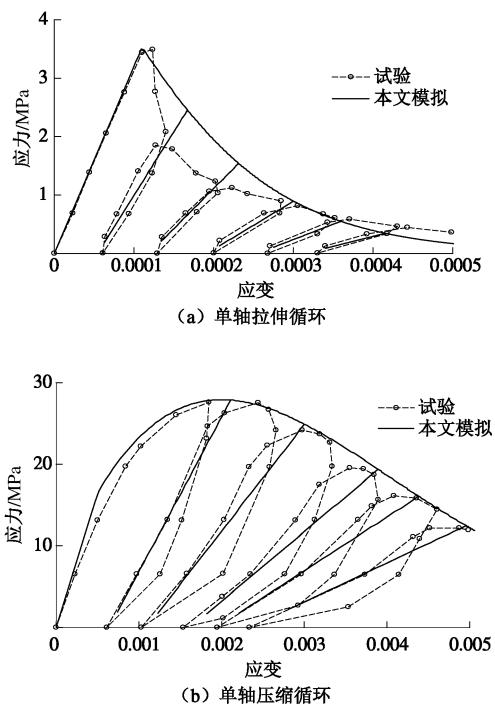


图 2 混凝土单轴试验结果与数值模拟

Fig. 2 Results of monotonic uniaxial loading tests of concrete and numerical simulation

2 堆石料广义塑性模型

广义塑性模型^[13-15]是由 Zienkiewicz 等在广义塑性理论框架上提出, 该模型最早主要用于砂土液化问题的分析, 即适用于围压范围变化较小的岩土问题, 而高土石坝中平均主应力的变化范围从 0 到 3 MPa, 为更好地考虑筑坝材料的压力相关特性, 笔者曾对上述广义塑性模型^[7-9]的剪切模量 K , 体积模量 G 、加载模量 H_L 和卸载模量 H_U 等进行了适当的改进。

$$K = K_0 p_a (p'/p_a)^{m_v}, \quad (11)$$

$$G = G_0 p_a (p'/p_a)^{m_s}, \quad (12)$$

$$H_L = H_0 \cdot p_a \cdot (p'/p_a)^{m_l} \cdot H_f \cdot (H_v + H_s) \cdot H_{DM} \cdot H_{den}, \quad (13)$$

$$H_u = H_{u0} \cdot p_a \cdot (p'/p_a)^{m_u} \cdot (\eta_u / M_g)^{-\gamma_u} \cdot H_{den} \\ |\eta_u / M_g| < 1. \quad (14)$$

式中 H_0 为塑性模量系数; H_f , H_v 和 H_s 为塑性系数; $\xi = \int |d\varepsilon_{qs}|$ 为累计塑性应变; β_0 , β_1 和 γ_{DM} 为模型参数。

p_a 为标准大气压力, 同时将原模型中的 H_{DM} 修改为 $\exp((1 - \eta/\eta_{max})\gamma_{DM})$; η_{max} 为历史最大应力比; $H_{den} = \exp(\gamma_d \varepsilon_v)$ 为致密系数, 用来考虑堆石料循环硬化特性。修改后的模型能够更合理地考虑筑坝材料的压力相关性, 采用一套参数即可模拟多个围压的试验结果, 同时能够更好的反应堆石料的循环滞回特性。

3 混凝土面板堆石坝损伤分析

3.1 计算模型

采用二维混凝土面板堆石坝为计算模型。坝高 200 m, 上游坝坡为 1:1.4, 下游坝坡为 1:1.5, 大坝分 30 层填筑, 面板分三期浇筑(分期面板顶部高程分别为 60, 130 和 200 m), 水位蓄至 190 m。

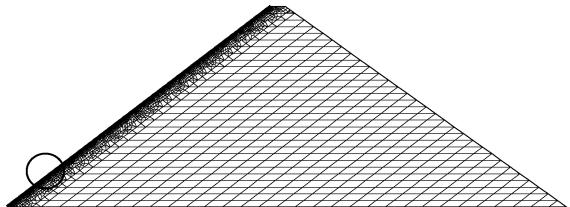


图 3 混凝土面板堆石坝有限元网格

Fig. 3 Finite element mesh of CFRD

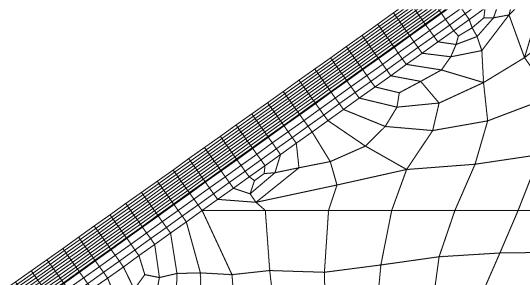


图 4 面板和垫层局部网格图

Fig. 4 Finite element mesh of slab

混凝土面板堆石坝有限元网格如图 3 所示, 对面板及以下的垫层料和过渡料的网格局部加密(图 4), 面板网格尺寸小于 0.3 m, 单元采用四边形 4 结点等参单元, 跗板与垫层接触面、面板与垫层接触面和面板周边缝均采用四边形 4 结点 Goodman 界面单元模拟。面板网格在厚度方向上共分 10 层, 以便于研究面

板损伤的发展过程。

3.2 材料参数

堆石料广义塑性模型参数^[7-9]如表 1 所示, 面板与垫层的接触面均采用理想弹塑性模型^[7], 参数如表 2 所示。面板混凝土标号为 C30, 损伤模型参数如表 3 所示, 弹性模量 E , 抗拉强度 f_t 和抗压强度 f_c 取值参考文献[5]。混凝土断裂能 G 尚未有系统性研究成果, 其取值目前有较大的不确定性^[16], 本文计算时取 325, 并进行了参数敏感性分析。本文计算时过渡料与垫层料取堆石料参数。

表 1 堆石料广义塑性模型参数

Table 1 Parameters of generalized plastic model from gravel materials

G_0	K_0	M_g	M_f	α_f	α_g	H_0	H_{U0}	m_s
1000	1400	1.8	1.38	0.45	0.4	1800	3000	0.5
m_v	m_l	m_u	r_d	γ_{DM}	γ_u	β_0	β_1	
0.5	0.2	0.2	180	50	4	35	0.022	

表 2 理想弹塑性接触面模型参数

Table 2 Parameters of perfect elastic-plastic model for concrete-gravel interface of CFRDs

k_1	k_2	n	$\varphi /(^{\circ})$	c / kPa
300	10^{10}	0.8	41.5	0

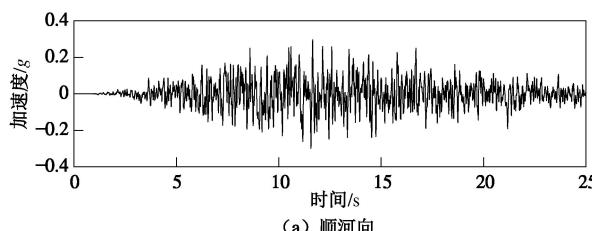
表 3 混凝土塑性损伤模型参数

Table 3 Parameters of concrete plastic damage model

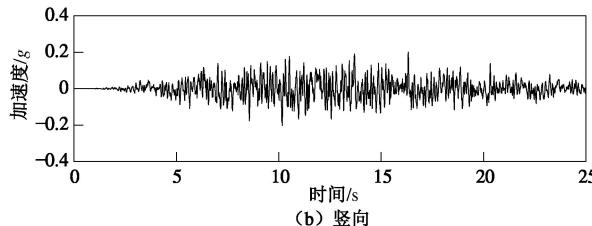
$\rho /(\text{g} \cdot \text{cm}^{-3})$	E / GPa	f_t / MPa	f_c / MPa	$G_t / (\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$
2.4	31	3.48	27.6	325

3.3 地震动输入

地震动输入采用《水工建筑物抗震设计规范》(DL5073—2000) 规范谱人工地震波(见图 5), 顺河向地震波峰值加速度峰值为 $0.3g$, 垂直地震峰值加速度取顺河峰值加速度的 $2/3$ 。



(a) 顺河向



(b) 竖向

图 5 地震动加速度时程

Fig. 5 Time histories of input ground motion

3.4 计算结果分析

对混凝土面板, 同时采用了线弹性和塑性损伤两种模型进行分析。

图 6 和图 7 分别为坝断面中轴线加速度放大倍数沿坝高的分布及竖向永久变形等值线, 可以看出不同混凝土模型对大坝的加速度和地震沉降变形影响不大, 这是因为大坝的加速度反应和整体变形主要依赖于堆石体材料特性。

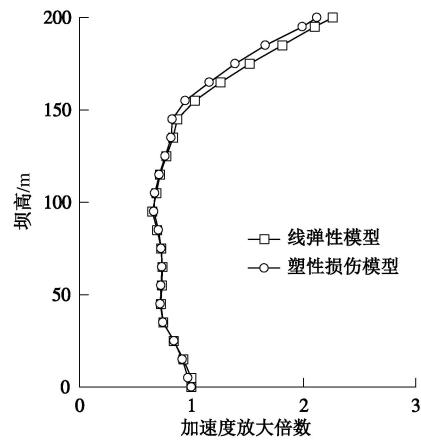
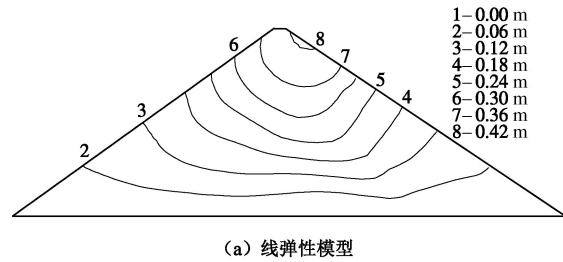
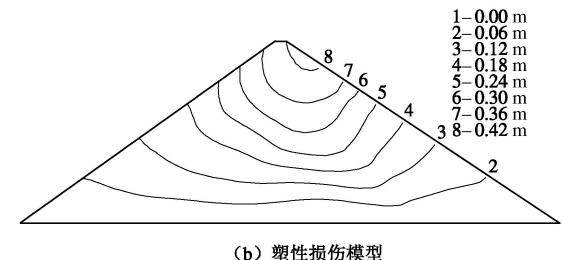


图 6 坝断面中轴线加速度放大倍数

Fig. 6 Acceleration magnification along dam axis



(a) 线弹性模型



(b) 塑性损伤模型

图 7 面板混凝土采用不同模型时竖向永久变形等值线

Fig. 7 Contours of displacements at horizontal direction using different slab concrete models

图 8 为两种模型计算得到的地震时面板顺坡向最大拉应力包络线。可以看出, 面板采用线弹性模型时, 在 $0.4H \sim 0.9H$ (H 为坝高) 范围内的顺坡向拉应力超过了混凝土的抗拉强度; 塑性损伤模型则反映了混凝土超过抗拉强度后的应变软化和应力重分布特性, 顺坡向拉应力包络线均小于混凝土抗拉强度, 计算结果更为合理。

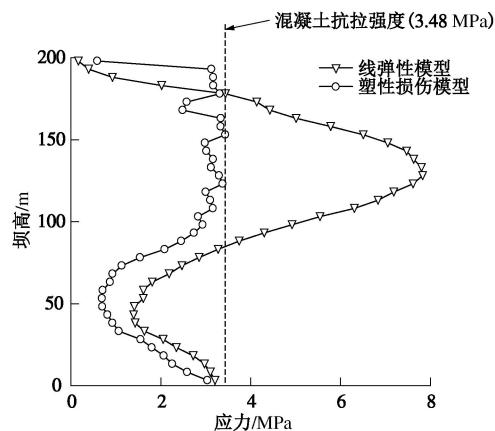
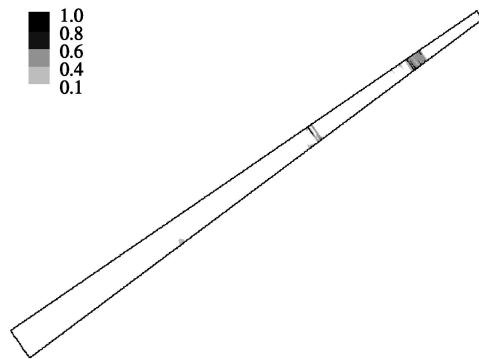


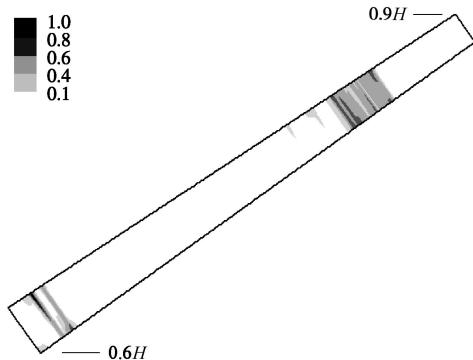
图 8 面板顺坡向应力

Fig. 8 Slope-direction tensile stress of slab

图 9 为混凝土面板在地震后的损伤分布 ($d=0$ 表示未损伤, $d=1$ 表示完全损伤破坏, 通常认为超过 0.8 为严重损伤^[4])。图 9 (a) 为面板整体的损伤分布, 图 9 (b) 为 $0.6H \sim 0.9H$ 的局部损伤分布。 $t=11\text{ s}$ 时在面板 $0.65H$ 的位置发生部分损伤, 损伤因子 $0.6 < d < 0.8$, 发生位置为面板与垫层料接触部位。 $t=15\text{ s}$ 时在面板 $0.85H$ 的位置发生损伤, $t=16\text{ s}$ 时在面板 $0.85H$ 的位置损伤范围加大, 但损伤因子未超出 0.8。



(a) 面板整体损伤分布



(b) 面板局部损伤分布

图 9 地震结束时刻面板损伤分布图

Fig. 9 Damage distribution of slab at end of earthquake

地震过程中, 首先在 $0.65H$ 处发生损伤, 这与线弹性模型计算的该部位顺坡向拉应力最大结果一致。图 10 所示为 $0.65H$ 处面板的损伤发生与发展过程。可以看出面板由于受到堆石体摩擦作用及堆石体向下游

变形导致的面板受拉发生损伤, 随着地震动过程的发展, 损伤程度逐渐增大, 局部超过 0.8。

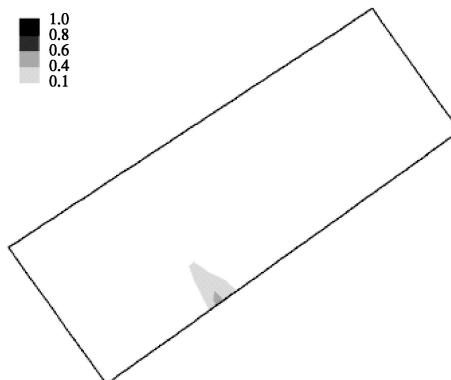
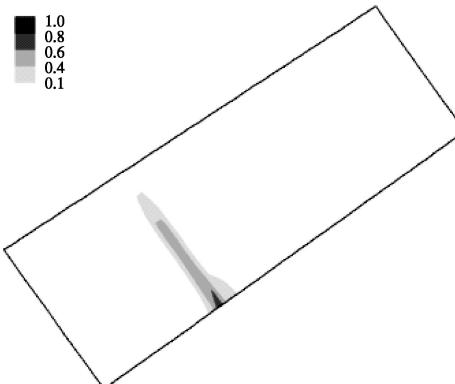
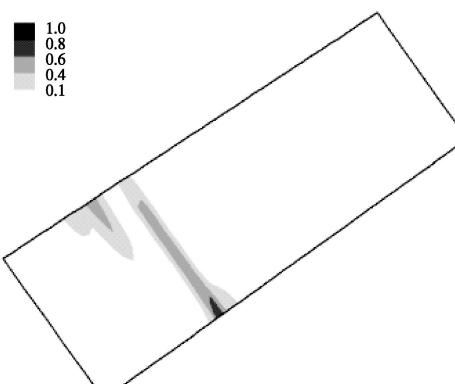
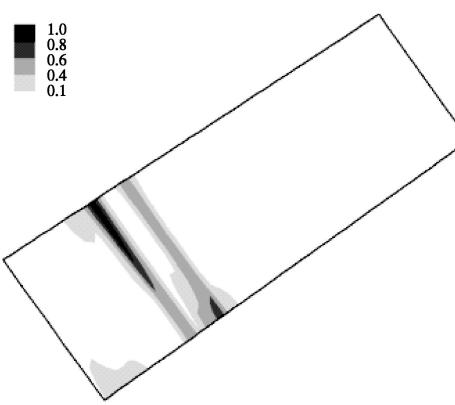
(a) $t=11\text{ s}$ (b) $t=15\text{ s}$ (c) $t=16\text{ s}$ (d) $t=17\text{ s}$ 图 10 面板损伤发生和发展过程 ($0.65H$)

Fig. 10 Occurrence and development of slab damage

图 11 为发生损伤和未发生损伤典型单元的顺坡

向应力时程, 对于没有发生损伤的单元, 两种模型计算结果基本一致; 对于发生损伤的单元, 采用混凝土塑性损伤模型时单元应力未超过混凝土抗拉强度, 结果更为合理。这是因为部分单元发生损伤后, 面板应力重新分布, 而采用线弹性模型则无法反应这一现象。

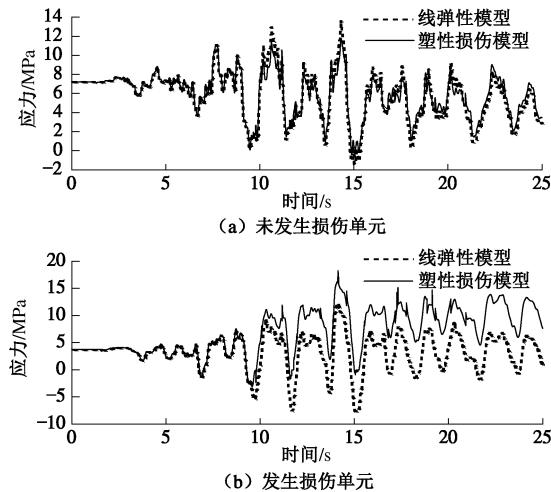


图 11 典型单元顺坡向应力时程

Fig. 11 Stress histories of typical element along slope direction

混凝土断裂能指的是根据单位体积蕴含的耗散能, 其取值有一个范围, 与混凝土标号和性能有关。图 12 为不同断裂能情况下地震结束时面板损伤分布, 可以看出, 随着断裂能的增大, 损伤因子大于 0.8 的

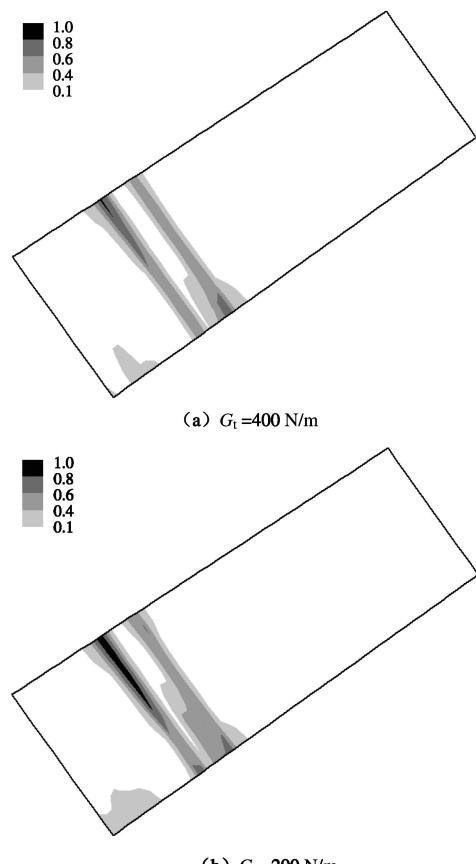


图 12 不同断裂能对面板损伤的影响

Fig. 12 Impact of different fracture energy on slab damage

部分有所减小, 但损伤位置并没有明显变化。这主要是面板应力分布是决定损伤部位的主要因素, 也说明通过采取措施, 如加入纤维等材料, 提高混凝土的断裂能可以有效减轻面板损伤。

4 结 论

联合采用堆石料广义塑性模型和混凝土塑性损伤模型, 实现了面板弹塑性损伤的数值分析方法, 开展了地震荷载作用下 200 m 混凝土面板堆石坝面板动力损伤研究。

(1) 在地震作用下, $0.65H$ 附近面板顺坡向拉应力最大, 该部位首先出现损伤, 同时由于鞭稍效应, 面板在 $0.85H$ 处也出现损伤破坏。可以认为这一范围为面板抗震安全的关键部位, 在抗震设计时, 应采取必要的措施保证混凝土面板的安全。

(2) 采用塑性损伤模型可以很好地反映混凝土面板的损伤发展过程, 通过损伤变量可以了解面板的损伤分布和薄弱环节, 计算结果比通常采用的线弹性模型更为合理, 可从防渗体损伤角度评价混凝土面板堆石坝极限抗震能力及面板抗震设计提供指导。

(3) 本文方法也可以应用于高土石坝地下混凝土防渗墙及高趾墙的损伤分析。

需要指出的是, 本文分析时未考虑钢筋对于面板混凝土损伤的影响以及面板坝的三维效应, 建立钢筋与混凝土相互作用的分析方法, 深入分析三维面板堆石坝面板动力损伤过程及其机理将是进一步研究的重点。

参考文献:

- [1] 陈生水, 霍家平, 章为民. 汶川“5.12”地震对紫坪铺混凝土面板堆石坝的影响及原因分析[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(6): 795 – 801. (CHEN Sheng-shui, HUO Jia-ping, ZHANG Wei-min. Analysis of effects of “5.12” Wenchuan earthquake on Zipingpu concrete face rock-fill dam[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(6): 795 – 801. (in Chinese))
- [2] HILLERBORG A, MODEER M, PETERSSON P E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements[J]. Cement and Concrete Research, 1976(6): 733 – 782.
- [3] BAZANT Z P, OH B H. Crack band theory for fracture of concrete[J]. Materiaux Constructions, 1983(16): 155 – 177.
- [4] LUBLINER J, OLIVEE J, OLLER S, et al. A plastic-damage model for concrete[J]. International Journal of Solids and Structures, 1989, 25(3): 299 – 326.

- [5] LEE J, FENVES L G. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1998, **124**(3): 892 - 900.
- [6] LEE J, FENVES L G. A plastic-damage concrete model for earthquake analysis of dams[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1998, **27**(9): 937 - 956.
- [7] 孔宪京, 邹德高, 徐斌, 等. 紫坪铺面板堆石坝三维有限元弹塑性分析[J]. 水力发电学报, 2013, **32**(2): 213 - 222. (KONG Xian-jing, ZOU De-gao, XU Bin, et al. Three dimension finite element elasto-plastic analysis of Zipingpu concrete-faced rockfill dam[J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2013, **32**(2): 213 - 222. (in Chinese))
- [8] XU Bin, ZOU De-gao, LIU Hua-bei. Three-dimensional simulation of the construction process of the Zipingpu concrete face rockfill dam based on a generalized plasticity model[J]. Computers and Geotechnics, 2012, **43**: 143 - 154.
- [9] ZOU De-gao, XU Bin, KONG Xian-jing, et al. Numerical simulation of the seismic response of the Zipingpu concrete face rockfill dam during the Wenchuan earthquake based on a generalized plasticity mode[J]. Computers and Geotechnics, 2013, **49**: 111 - 122.
- [10] OLIVER J. A consistent characteristic length for smeared cracking models[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1989, **28**(2): 461 - 474.
- [11] GOPALARATNAM V S, SHAH S P. Softening response of plain concrete in direct tension[J]. ACI Journal Proceedings, 1985, **82**(3): 310 - 323.
- [12] KARSAN I D, JIRSA J O. Behavior of concrete under compressive loading[J]. Journal of the Structural Division, 1969, **95**(12): 2535 - 2563.
- [13] PASTOR M, ZIENKIEWICZ O C, CHAN A H C. Generalized plasticity and the modeling of soil behavior[J]. Int J Numer Anal Meth Geomech, 1990, **14**(3): 151 - 190.
- [14] ZIENKIEWICZ O C, LEUNG K H, PASTOR M. Simple model for transient soil loading in earthquake analysis I: basic model and its application[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1985, **9**(5): 453 - 476.
- [15] PASTOR M, ZIENKIEWICZ O C, LEUNG K H. Simple model for transient soil loading in earthquake analysis II: non-associative models for sands[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1985, **9**(5): 477 - 498.
- [16] 唐欣薇, 周元德, 张楚汉. 基于细观力学模型的混凝土坝抗震分析[J]. 水力发电学报, 2013, **32**(2): 195 - 200. (TANG Xin-wei, ZHOU Yuan-de, ZHANG Chu-han. Concrete dam seismic analysis based on mesoscale damage mechanics[J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2013, **32**(2): 195 - 200. (in Chinese))