

DOI: 10.11779/CJGE201406015

考虑不排水抗剪强度空间变异性的条形基础极限承载力随机分析

祁小辉^{1, 2}, 李典庆^{1, 2*}, 周创兵^{1, 2}, 方国光^{1, 2}

(1. 武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072; 2. 武汉大学水工岩石力学教育部重点实验室, 湖北 武汉 430072)

摘要: 目前有关抗剪强度参数随深度变化对地基稳定性影响的研究还不深入。为此, 提出了考虑土体不排水抗剪强度均值和标准差随深度变化的地基稳定性随机分析方法。建立了表征不排水抗剪强度空间变异性的非平稳随机场模型, 采用 Karhunen-Loeve (KL) 展开离散随机场。探讨了土体不排水抗剪强度参数空间变异性对地基极限承载力的影响规律, 并比较了不排水抗剪强度参数平稳和非平稳随机场模型对地基稳定的影响。以不排水黏性地基稳定随机分析问题为例验证了所提方法的有效性。结果表明: 考虑不排水抗剪强度参数空间变异性时, 地基极限承载力均值和标准差随相关距离的增大而增大, 地基极限承载力对竖向向相关距离更为敏感。地基极限承载力均值随不排水抗剪强度变异系数的增加而减小, 标准差随变异系数的增加而增加。不排水抗剪强度变异性对地基失效概率有明显的影响, 安全系数较大时, 不排水抗剪强度相关距离越小, 地基失效概率越小。与不排水抗剪强度参数的非平稳随机场相比, 不排水抗剪强度的平稳随机场模型会高估地基极限承载力的变异性, 在相同的安全度水平下, 当地基的安全系数较低时, 平稳随机场模型会导致对地基失效概率的低估; 当地基安全系数较高时, 平稳随机场模型会导致对地基失效概率的高估。

关键词: 地基稳定性; 不排水抗剪强度; 空间变异性; 随机场; KL 展开; 极限承载力

中图分类号: TU471.12

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2014)06-1095-11

作者简介: 祁小辉(1989-), 男, 博士研究生, 主要从事岩土工程可靠性与风险分析方面的研究。E-mail: dianqing@whu.edu.cn。

Stochastic analysis of ultimate bearing capacity of strip footing considering spatial variability of undrained shear strength

QI Xiao-hui^{1, 2}, LI Dian-qing^{1, 2}, ZHOU Chuang-bing^{1, 2}, PHOON Kok-kwang^{1, 2}

(1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China; 2. Key Laboratory of Rock Mechanics in Hydraulic Structural Engineering (Wuhan University), Ministry of Education, Wuhan 430072, China)

Abstract: The effect of the variation of shear strength parameters of soils with depth on the stability of footing has not been thoroughly studied. A stochastic method is proposed for bearing capacity analysis of strip footing considering the variation of the mean and standard deviation of undrained shear strength parameters with depth. A non-stationary random field model is established, and the random field is discretized by the Karhunen-Loeve (KL) expansion. The effect of spatial variability of the undrained shear strength parameters on the ultimate bearing capacity is investigated. The results of bearing capacity associated with stationary and non-stationary random field models are compared. An undrained clay foundation is presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method. The results indicate that both the mean and standard deviation of bearing capacity increase with the increasing correlation length, and that the ultimate bearing capacity is more sensitive to the vertical correlation length than to the horizontal one. The mean of the ultimate bearing capacity decreases but the standard deviation increases as the coefficient of variance increases. The spatial variability of shear strength parameters of soils has a significant influence on the failure probability of foundation. When the factor of safety is large, the failure probability of foundation decreases with the decreasing correlation lengths. Compared with the non-stationary random field, stationary random field will highly overestimate the variation of the ultimate bearing capacity. When the factor of safety against shear failure is low, the stationary random field model will induce a lower

基金项目: 国家杰出青年科学基金项目(51225903); 国家重点基础研究发展计划(973计划)项目(2011CB013506); 国家自然科学基金项目(51329901)

收稿日期: 2013-10-17

*通讯作者

probability of failure than the non-stationary random field model. On the contrary, when the factor of safety against shear failure is high, the stationary random field model will induce a higher probability of failure.

Key words: foundation stability; undrained shear strength; spatial variability; random field; Karhunen-Loeve expansion; ultimate bearing capacity

0 引言

目前国内外诸多学者对考虑土体参数空间变异性的岩土结构物变形与稳定性问题进行了大量的研究^[1-12]。在国内,刘润等^[1]利用渤海油田的大量工程地质资料建立了渤海海域海洋土随机场模型,并将其应用于桩基可靠度分析中。朱红霞等^[2]基于天津港大量现场勘察资料建立了该地区的土性剖面随机场模型,并进行了边坡稳定可靠度分析。潘健等^[3]采用随机有限元方法研究了非均质地基上的条形基础沉降问题。吴振君等^[4]采用随机场模型考虑边坡滑面上岩土参数的空间变异性,采用验算点法研究了可靠指标对临界滑面上参数的敏感性。张继周等^[5]基于随机场离散的局部平均方法,计算了压缩模量的空间平均方差,并研究了地基沉降可靠度问题。李典庆等^[6-7]提出了考虑参数空间变异性的岩土工程可靠度分析非侵入式随机有限元法。祁小辉等^[8]研究了考虑土体空间变异性时边坡最危险滑动面分布规律。在国外,Griffiths 等^[9]利用随机有限元研究了考虑不排水抗剪强度参数空间变异性时两个平行刚性粗糙基础的相互作用,并与单个基础的情况进行了对比。Cho 等^[10]研究了考虑多参数相关性时抗剪强度参数空间变异性对条形地基稳定的影响。Kasama 等^[11]利用乔列斯基分解考虑黏性土体不排水抗剪强度参数的空间变异性,采用极限分析方法研究了条形基础的地基承载力。Zhalehjoo 等^[12]利用随机场理论和蒙特卡洛模拟比较了不同方法计算的浅基础地基承载力。

总体来说,上述文献对考虑土体参数空间变异性的岩土结构物可靠度问题做了有益的探索,上述研究在建立土体参数空间变异性的随机场模型时,大部分都假定土体抗剪强度参数均值沿土体深度方向相同(如文献[9~11]),或者土体均值沿深度方向线性变化但标准差不变(如文献[12])。然而,由于不同深度土体往往经历不同的地质、环境和化学作用,这导致土体参数呈现出随深度变化的趋势。此外,几乎所有的土体特性参数都受应力水平的影响,土体应力水平一般因土体自重随深度逐渐增加,同时其又受物质组成、固结情况和化学键合等的影响,而固结过程又由侵蚀作用,人工开挖扰动和地下水波动等因素控制,这些因素都会导致土体特性参数在深度方向上的不均匀性^[13]。此外,大量实测资料表明^[14-17],土体抗剪强

度参数的统计量(均值、标准差)在深度方向并非保持不变,土体抗剪强度参数随机场的平稳性假定与实测数据并不相符。因此将土体特性参数统计量在深度方向上视为定值的做法值得商榷。

本文在考虑土体不排水抗剪强度参数空间变异性基础上,提出了考虑土体不排水抗剪强度均值和标准差随深度变化的地基稳定性随机分析方法。建立了土体不排水抗剪强度参数不平稳随机场模型,采用 Karhunen-Loeve (KL) 展开进行随机场离散。探讨了考虑土体不排水抗剪强度参数空间变异性时条形基础地基极限承载力变化规律,比较了不排水抗剪强度参数平稳和不平稳随机场模型对地基稳定的影响。以不排水黏性土地基稳定性问题为例验证了所提方法的有效性。

1 土体不排水抗剪强度空间变异性及其模拟

Lumb^[14]根据土体特性参数统计特性随深度变化情况,将土体参数的空间变异性划分为图 1 所示的 3 种情况:①均值和标准差随深度不变(平稳随机场);②均值随深度线性增加,标准差不变(不平稳随机场);③均值及标准差均随深度线性增加(不平稳随机场)。如果忽略了土体抗剪强度参数的不平稳性,将不能合理地估计土体抗剪强度参数变异性^[16-17]。

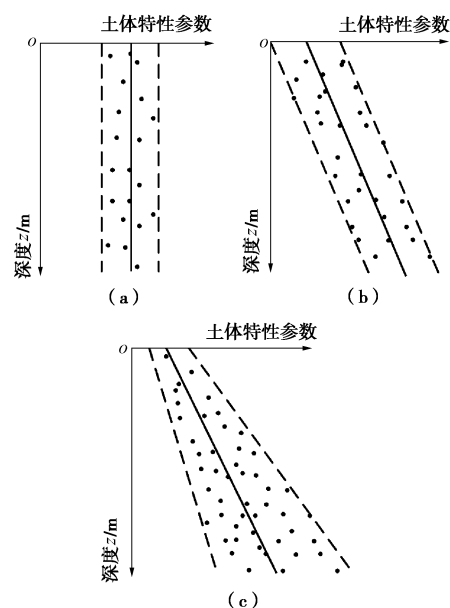


图 1 不同形式的土体参数随深度变化

Fig. 1 Different forms of a soil parameter with depth z

目前有关土体参数空间变异性分析一般不考虑土体参数统计量(均值或标准差)随土体深度变化情况。如前所述, 由于不同深度土体往往经历不同的地质、环境和化学作用, 这导致土体参数呈现出随深度变化的趋势。本节将详细分析土体不排水抗剪强度随深度变化的特性。图 1(a) 模型简单, 目前应用的较多。图 1(c) 更能反映实测数据的统计规律。为此, 本文重点研究这 2 种随机场模型。

1.1 不排水抗剪强度参数均值随深度变化

不排水抗剪强度广泛应用于地基稳定分析中, 值得指出的是, 不排水抗剪强度并非土体的基本特性参数, 而是与应力水平有关的物理量, 它随着应力水平的增大而增大。对于中低塑性土, 不排水抗剪强度参数可以用表示为^[13]

$$s_u / \sigma' = (0.23 \pm 0.04) OCR^{0.8} \quad (1)$$

式中 s_u 为不排水抗剪强度; σ' 为竖向向有效上覆压力, 可以表示为 $\sigma' = \gamma' z$, 其中 γ' 为土体有效重度, z 为土体深度; OCR 为超固结比, 可以表示为

$$OCR = \sigma_p / \sigma' \quad (2)$$

式中, σ_p 为前期竖向向有效固结应力。当只考虑土体自重时, 对于地表历史最大埋深为 d 的 σ_p 可简单表示为 $\sigma_p = \gamma' (z + d)$, 由此 OCR 简化为

$$OCR = (z + d) / z \quad (3)$$

对于正常固结土体, OCR 值为 1; 对于超固结土体, OCR 的值一般在 1 与 50 之间。对于高塑性土, 不排水抗剪强度参数不但受竖向向有效固结应力和超固结比影响, 同时还与塑性指数有关^[13]。

在无实测塑性指数数据的条件下, 采用式(1)描述土体不排水抗剪强度参数随埋深变化, 其中土体有效重度 $\gamma' = 8 \text{ kN/m}^3$, 土体深度 $H = 6 \text{ m}$, 地表历史最大埋深 $d = 45 \text{ m}$, OCR 最大值取为 50, 不排水抗剪强度参数的上下限可由式(1)得出: 下限为 $0.19OCR^{0.8} \sigma'$, 上限为 $0.27OCR^{0.8} \sigma'$ 。图 2 给出了超固结土体 s_u 上下限随深度变化趋势。由图 2 可知, 当埋深较浅时, s_u 随深度急剧增加; 当埋深较深时, s_u 随深度增长较缓。由于 s_u 只在很浅部位急剧变化, 如埋深为 4.5 m 时急剧变化范围小于 1.0 m, 简便起见, 可将 s_u 随深度变化曲线简化为一条直线, 该直线需要在 s_u 变化范围上下限之间, 如图 2 中三角形符号标识的直线所示。文献[15]指出对于超固结土体, 趋势分量沿深度方向可能由某一固定值随深度线性增加, 这与本文的简化处理相一致。此外, 图中还给出了 s_u 随深度不变的曲线, 如图 2 中空心方框标识的曲线所示。可以看出, 该曲线在深度 1.4 m 以上超出了 s_u 变化范围上限, 可见不考虑土体抗剪强度随深度变化情况将得出不合理的结果。

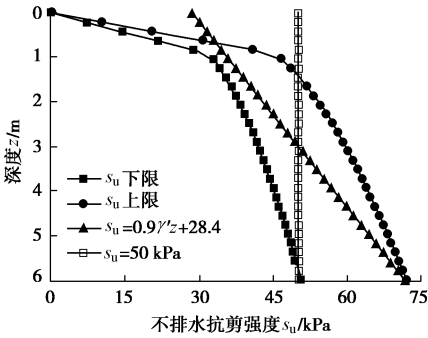


图 2 超固结土体不排水抗剪强度参数随深度变化趋势
Fig. 2 Variation of undrained shear strength of overconsolidated soils with depth

1.2 不排水抗剪强度参数标准差随深度变化

统计数据表明, 不排水抗剪强度参数随机场不只在均值上存在不平稳性, 在标准差方面亦存在不平稳性, 表 1 给出了不同地区土体抗剪强度参数随深度变化规律, 表中香港海相黏土和伦敦黏土不排水抗剪强度的标准差都具有随深度线性增加的趋势。已有的大量研究都是假定不排水抗剪强度为平稳随机场, 或均值随深度变化的不平稳随机场, 忽略了标准差随深度变化的情况, 从而导致了不合理的可靠度结果。需要指出的是, 并非所有的土性参数统计特性都会随深度逐渐增加, 如表 1 中香港粉砂土摩擦系数的均值和标准差就不随深度变化。因此, 在进行随机场模拟时, 需根据实测数据对参数的空间变异类型进行判别。

表 1 土的抗剪强度参数随深度 z 的变化规律 (数据来源: 文献[14])
Table 1 Statistics of strength properties of soils with depth z

| 数据来源 ^[14] | 土体特性参数 | 均值 | 标准差 | 变异系数/% |
|----------------------|------------------|----------------|----------------|--------|
| 香港海相黏土 | s_u/kPa | $1.04z + 1.89$ | $0.19z + 0.35$ | 18.4 |
| 伦敦黏土 | s_u/kPa | $22.1z$ | $3.58z$ | 16.2 |
| 香港粉砂土 | $\tan \varphi$ | 0.692 | 0.0958 | 13.8 |

1.3 不排水抗剪强度参数空间变异性模拟方法

由 1.1 节讨论可知, 超固结土体不排水抗剪强度参数 s_u 可简化为随深度变化的线性函数

$$s_u = a\sigma' + b = a\gamma'z + b \quad (4)$$

式中, a 为不排水抗剪强度随深度的变化速率, a 越大表示不同深度处不排水抗剪强度的差别越大, b 为地表处的不排水抗剪强度值, a, b 的值可通过线性回归方法得到或者由图 2 中 s_u 的变化范围直接估计 (以 s_u 随深度变化曲线不超过 s_u 变化范围上下限为宜)。

一般来说, 土体重度的变异性非常小, 通常其变异系数都小于 0.1^[16], 因此将土体重度视为常数, 式(4)中只考虑参数 a 的空间变异性。Lacasse 等^[18]指出, 参数 a 服从正态分布或对数正态分布, 由于 a 不可能取负值, 故将其视为对数正态分布更为合理。于

是可采用对数正态分布统计均质随机场模拟 a 的空间变异性, 利用 Karhunen-Loeve (KL) 展开进行随机场离散。KL 展开是一种常见的随机场离散方法, 该方法基本思想是利用确定性特征函数和随机系数产生随机场的抽样函数^[19], 该方法具有较高的模拟精度和效率。本文采用 KL 展开来实现土体参数随机场离散, 对数正态二维随机场 $a(x, z; \theta)$ 可以表示为

$$a(x, z; \theta) = \exp(\lambda_{\ln a} + \xi_{\ln a} \cdot \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \eta_i(\theta) f_i(x, z)) \quad (5)$$

式中 x, z 分别为水平坐标和竖直坐标; $\lambda_{\ln a}$ 和 $\xi_{\ln a}$ 分别为参数 a 对数随机场的均值和标准差; M 为截断项数; λ_i 和 $f_i(x, z)$ 为自相关函数 $\rho_{\ln a}(x_1, z_1; x_2, z_2)$ 的特征值和特征函数; $\eta_i(\theta)$ 为相互独立的标准正态随机变量, 本文采用拉丁超立方抽样方法产生。 $\lambda_{\ln a}$ 和 $\xi_{\ln a}$ 分别可由参数的均值和变异系数求得:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\ln a} &= \ln(\mu_a) - 0.5 \ln(1 + \text{COV}_a^2), \\ \xi_{\ln a} &= \sqrt{\ln(1 + \text{COV}_a^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中, μ_a 和 COV_a 分别为参数 a 的均值和变异系数。此外, 特征值 λ_i 、特征函数 $f_i(x, z)$ 和自相关函数 $\rho_{\ln a}(x_1, z_1; x_2, z_2)$ 满足

$$\int_D \rho_{\ln a}(x_1, z_1; x_2, z_2) f_i(x_1, z_1) dx_1 dz_1 = \lambda_i f_i(x_2, z_2) \quad (7)$$

式中 x_1, x_2 分别为两点的水平坐标; z_1, z_2 分别为两点的竖直坐标; $\rho_{\ln a}(x_1, z_1; x_2, z_2)$ 为 $\ln[a(x_1, z_1)]$ 和 $\ln[a(x_2, z_2)]$ 的相关系数; D 为随机场离散区域。

鉴于高斯型相关函数形式简单, 且展开需要较少的特征值和特征函数, 本文选取高斯型相关函数表征土体参数自相关性:

$$\rho_{\ln a}(x_1, z_1; x_2, z_2) = \exp \left[-\left(\frac{x_1 - x_2}{l_x} \right)^2 - \left(\frac{z_1 - z_2}{l_z} \right)^2 \right] \quad (8)$$

式中, l_x, l_z 分别为参数的水平向、竖直向相关距离, 它们是表示变量空间变异性大小的参数, 相关距离越大, 参数空间自相关性越强。相关距离无穷大时, 可认为随机场中各点间相关系数皆为 1, 此时随机场中各点参数值相同。

由式 (4) 可知, s_u 的均值和标准差随深度线性增加时, s_u 均值、标准差和变异系数可以由 a 的均值和标准差得到, 根据简单推导可得深度 z 处 s_u 的均值 μ_{s_u} 、标准差 σ_{s_u} 和变异系数 COV_{s_u} 分别为

$$\left. \begin{aligned} \mu_{s_u} &= \mu_a \gamma' z + b, \\ \sigma_{s_u} &= \text{COV}_a \mu_a \gamma' z, \\ \text{COV}_{s_u} &= \frac{\text{COV}_a \mu_a \gamma'}{\mu_a \gamma' + b/z} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

可以看出, 此时 s_u 均值和标准差均是随深度线性增加的。由此可见, 利用参数 a 的平稳随机场表示 s_u 不平稳随机场能得到与实测数据一致的结果。此外,

文献[20]亦采用了与本文相似的处理方法, 可见利用参数 a 模拟 s_u 不平稳随机场是合理的。

为与 s_u 均值随深度保持不变 (图 1 (a)) 的情况进行对比, 本文还模拟了 s_u 为平稳随机场情况, 这里也将 s_u 视为对数正态分布统计均质随机场, 采用和参数 a 同样的模拟方法:

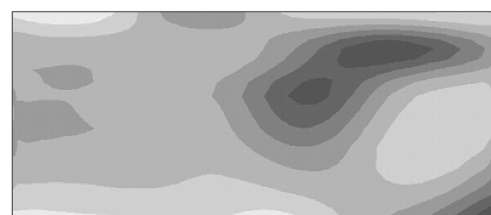
$$s_u(x, z; \theta) = \exp(\lambda_{\ln s_u} + \xi_{\ln s_u} \cdot \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \eta_i(\theta) f_i(x, z)) \quad (10)$$

其中, 对数随机场的均值 $\lambda_{\ln s_u}$ 和标准差 $\xi_{\ln s_u}$ 分别为

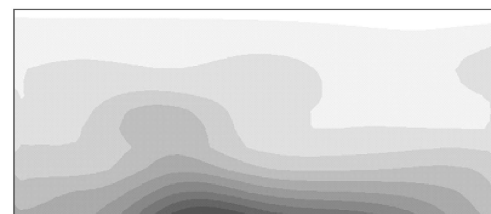
$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\ln s_u} &= \ln(\mu_{s_u}) - 0.5 \cdot \ln(1 + \text{COV}_{s_u}^2), \\ \xi_{\ln s_u} &= \sqrt{\ln(1 + \text{COV}_{s_u}^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

当不排水抗剪强度均值和标准差随深度保持不变时, 式 (11) 中的 μ_{s_u} 和 COV_{s_u} 为定值。

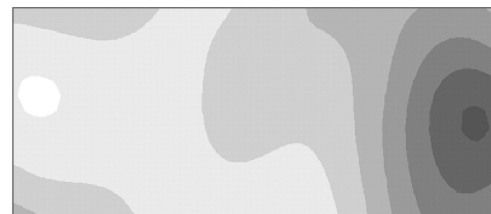
为了比较平稳随机场和不平稳随机场结果, 假设在地基中部平稳随机场模型 s_u 均值和标准差与不平稳随机场模型 s_u 均值和标准差相同。图 3 给出了基于 KL 分解产生的 2 种不同不排水抗剪强度随机场的典型实现, 图中颜色浅的部分表示低强度区域, 颜色深的部分表示高强度区域。由图 3 (a)、3 (b) 可知, 对于 s_u 均值和标准差随深度线性增加的情况, 模拟的 s_u 随机场有明显的随深度增加的趋势。对于 s_u 均值随深度保持不变的情况, s_u 值的大小与深度没有明显的相关关系, 软弱带 (低强度区) 分布无固定规律。同时由图 3 (a)、3 (c) 不同相关距离的平稳随机场模拟结果可知, 相关距离越大, 相邻区域参数的相关性亦越大, 导致低强度区或高强度区越连续。



(a) 均值和标准差随深度保持不变 ($l_x=10 \text{ m}$, $l_z=1 \text{ m}$)



(b) 均值和标准差随深度线性增加 ($l_x=10 \text{ m}$, $l_z=1 \text{ m}$)



(c) 均值和标准差随深度保持不变 ($l_x=10 \text{ m}$, $l_z=10 \text{ m}$)

图 3 不排水抗剪强度参数随机场的典型实现

Fig. 3 Realizations of random field of undrained shear strength

2 地基稳定随机分析方法

有限差分软件 FLAC^{3D} 广泛用于岩土工程分析中, 在 FLAC^{3D} 中, 各单元能被赋以不同的参数, 因此能有效考虑土体参数的空间变异性^[10,12]。本文基于 FLAC^{3D} 研究考虑不排水抗剪强度参数空间变异性的地基稳定问题, 主要步骤如下:

(1) 利用 FLAC^{3D} 建立地基有限差分模型, 提取单元坐标信息, 并模拟随机场。将研究区域划分为若干个单元, 导出单元节点文件(文件后缀名为"flac3d"), 从文件中提取单元节点坐标, 利用单元节点坐标计算单元中心坐标; 利用 KL 展开的 Matlab 程序和单元中心坐标产生 N 组二维随机场, 并将产生的随机场参数保存于文本文件中。关于蒙特卡洛模拟次数 N 的选取, 由文献[21]知, 在 5% 显著性水平条件下, 2000 次蒙特卡洛模拟能够保证地基承载力计算误差不超过 5%, 这里将蒙特卡洛模拟次数 N 取为 2000。

(2) 计算地基承载力。对模型施加边界条件, 输入材料本构模型, 利用 FLAC^{3D} 内置 fish 语言读取随机场数据文件, 将随机场参数赋予每个有限差分单元中; 给基础节点施加一坚直向下速率, 迭代求解, 得到基础节点平均竖向不平衡力与基础中心节点竖向位移曲线, 平均竖向不平衡力达到稳定时(此时发生塑性流动)的值即为地基极限承载力。需要说明的是, 这里的基础节点平均竖向不平衡力为基础节点的竖向不平衡力之和与承载面积 A 之比, 承载面积与地基基础面积不同, 其计算为

$$A = dy |0.5(x_r + x_{r+1}) - 0.5(x_l + x_{l+1})| \quad (12)$$

式中 dy 为 FLAC^{3D} 模型 y 方向(图 4 中垂直纸面方向)长度; x_l , x_r 分别为基础最左, 最右边节点的 x 坐标; x_{l+1} (x_{r+1})为基础最左边(右边)节点在 x 方向上相邻左边(右边)地基节点的 x 坐标。

(3) 利用 FLAC^{3D} 内置的 fish 语言进行蒙特卡洛模拟, 重复步骤(2) N 次, 提取每次模拟对应的极限承载力, 计算地基极限承载力均值和标准差, 并进行统计分析。

3 算例

本节首先将 FLAC^{3D} 计算的平面应变条件下条形地基极限承载力(q_u)和解析解进行对比, 证明利用 FLAC^{3D} 进行地基稳定分析的有效性, 其次利用 FLAC^{3D} 对不同的随机场模型计算的地基极限承载力进行对比。

3.1 确定性分析

考虑位于黏土上的刚性条形粗糙基础, 基础宽 $B=2\text{ m}$, 用二维的平面应变模型计算土体变形和沉降。模型宽 14 m , 深 6 m , 网格划分如图 4 所示, 共有 1050 个单元。模型边界条件为两端固定 x 方向位移, 底部固定所有方向位移。下覆黏土处于不排水状态, 其抗剪强度参数用不排水抗剪强度参数 s_u 表示, 取值为 50 kPa , 黏土弹性模量 $E=60\text{ MPa}$, 泊松比 $\nu=0.5$, 服从莫尔-库仑屈服准则。通过固定基础底部节点(图 4 中和阴影部分接触节点) x , z 方向位移来模拟刚性粗糙基础, 并在基底节点上施加一 $5 \times 10^{-6}\text{ m}$ /时间步的坚直向下速率, 直至塑性流动发生(需要 20000 个时间步), 此时地基上单位承载面积的竖向不平衡力即为地基极限承载力。此处的黏土重度取为 0, 以便与无重度土体的条形基础极限承载力解析解进行对比, 同时节省了计算时间。

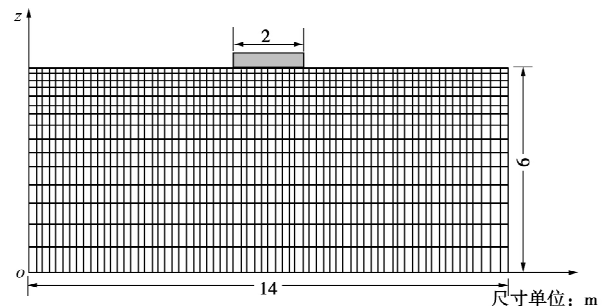


图 4 FLAC^{3D} 地基极限承载力计算模型

Fig. 4 FLAC^{3D} model used in bearing capacity analysis

确定性分析结果如图 5 所示, 图 5 (a)、(b) 分别给出了地基发生塑性流动时的速率矢量图和剪应变速率云图, 可以看出, 地基破坏为典型的整体剪切破坏, 地基破坏时基础底部正下方仍有一部分楔形区域处于弹性状态。确定性分析得出的地基极限承载力为 264 kPa , Prandtl 给出的底部光滑基础的地基极限承载力解析解结果为 257 kPa 。由于本算例地基为粗糙基底, 粗糙地基极限承载力较光滑地基的承载力稍大, 这进一步证明了数值模拟结果的正确性。图 5 (c)、(d) 给出了不排水抗剪强度由地表处的 28.4 kPa 线性增加到 71.6 kPa (地基中部深 3 m 处 s_u 为 50 kPa) 时地基发生塑性流动时的速率矢量图和剪应变速率云图。由图 5 可知, 不排水抗剪强度由地表处线性增加时, 地基破坏仍为整体破坏, 但地基破坏时破坏区域小于 s_u 保持不变时结果, 且地基极限承载力亦较小(由图 8 (a) 中的确定性分析得出 s_u 随深度线性增加时地基极限承载力为 178 kPa)。需要说明的是, 当 s_u 随深度线性增加时, 由于地基极限承载力较小, 只需要 10000 次时间步即能达到塑性流动。

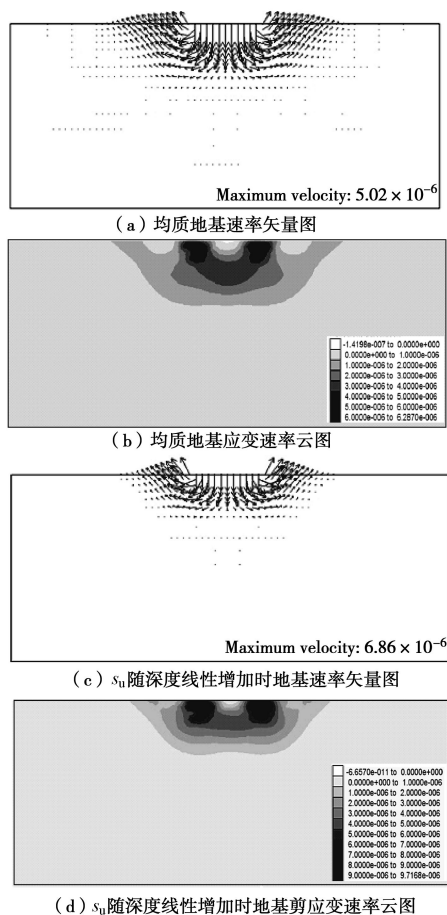


图5 确定性分析结果

Fig. 5 Results of deterministic analysis

3.2 不确定性分析

由第1节讨论可知,均值和标准差均随深度线性增加的不平稳随机场模型与现场实测数据统计规律更为一致,而均值和标准差随深度不变的平稳随机场模型目前应用较多,因此有必要同时研究2种不同随机场模型对地基极限承载力的影响。

首先考虑不排水抗剪强度 s_u 均值和标准差均随深度线性增加的情况,取土体有效重度为 $\gamma=8 \text{ kN/m}^3$,地表处不排水抗剪强度参数 $b=28.4 \text{ kPa}$, s_u 随深度变化速率 a 的均值和变异系数分别为 $\mu_a=0.9$, $\text{COV}_a=0.6$ 。由式(9)可知,模型中部 ($z=3 \text{ m}$) 和底部 ($z=6 \text{ m}$) 的不排水抗剪强度均值和变异系数分别为 (50 kPa, 0.26) 和 (71.6 kPa, 0.36)。由于 s_u 变异系数随深度增加而逐渐增加(式9),不排水抗剪强度的最大变异系数为 0.36,而不排水抗剪强度变异系数的变化范围为 $0.06 \sim 0.8^{[16]}$,因此本文将参数 a 变异系数假设为 0.6 是合理的。为了反映相关距离与地基几何参数间关系,将相关距离标准化为量纲一的量 $\Delta_x=l_x/B$,其中 B 为地基宽度。由于参数 a 的相关距离与不排水抗剪强度 s_u 的相关距离基本相同^[20],且土体抗剪强度参数的水平向相关距离一般为 $10 \sim 40 \text{ m}$,竖直向相关距离一般为 $1 \sim 3 \text{ m}^{[22]}$ 。因此取参数 a 水平向标准化相关距离 $\Delta_x=l_x/B=2.5, 5.0, 10.0, 15.0$, 竖直向标准化相关距离

为 $\Delta_z=l_z/B=0.5, 1.0, 2.5, 5.0$ 。其他参数皆视为定值,取值和确定性分析相同。当 $\Delta_x=5.0, \Delta_z=0.5$ 时进行 5000 次蒙特卡洛模拟,地基极限承载力均值和标准差随模拟次数变化情况如图6所示。由图6可知,当模拟次数达到 2000 次时,地基极限承载力的均值和标准差变化趋于稳定,这也说明蒙特卡洛模拟次数取为 2000 次是合理的。

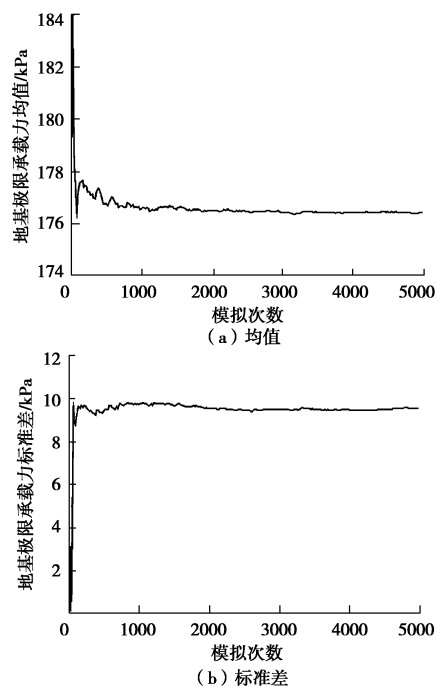
图6 $\Delta_x=5.0, \Delta_z=0.5$ 时地基极限承载力统计量随模拟次数变化情况Fig. 6 Convergence of estimated mean and standard deviation as $\Delta_x=5.0, \Delta_z=0.5$

图7所示为考虑不排水抗剪强度参数 s_u 均值和标准差随深度线性增加时随机场的一次实现及其对应的剪应变速率云图和速率矢量图,其中图7(a)中颜色浅的部分表示低强度区域,颜色深的部分表示高强度区域。由图7可知,地基的剪应变速率云图和速率矢量图有明显的不对称特性,这在传统的确定性分析中是无法得到的,且失效区域与软弱带(低强度带)分布相一致,说明了考虑参数空间变异性时地基极限承载力计算结果的正确性。

图8所示为考虑 s_u 均值和标准差随深度线性增加时前 200 次蒙特卡洛模拟的荷载位移曲线 ($P-S$ 曲线) 及 2000 次模拟的地基极限承载力频率直方图(取 $\Delta_x=5, \Delta_z=0.5$),此处频率的含义为地基极限承载力属于某一承载力值区间的次数与总模拟次数的比值,图8(b)同时也给出了用对数正态分布拟合的地基极限承载力概率密度函数(PDF)曲线。可知看出,考虑空间变异性时,地基的 $P-S$ 曲线是一簇离散的曲线,确定性分析结果仅为考虑空间变异性时一种情况而已。同时地基承载力的频率直方图和对数正态分布 PDF 曲线吻合良好,说明对数正态分布能很好地表征

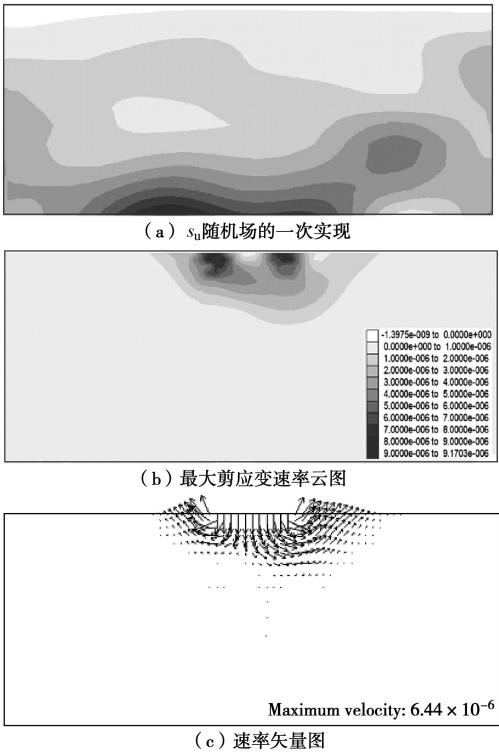


图 7 s_u 均值和标准差随深度线性增加时随机场的一次实现及其分析结果

Fig. 7 Typical realization of random field as linear increase of mean and standard deviation of s_u with depth and its corresponding analysis results

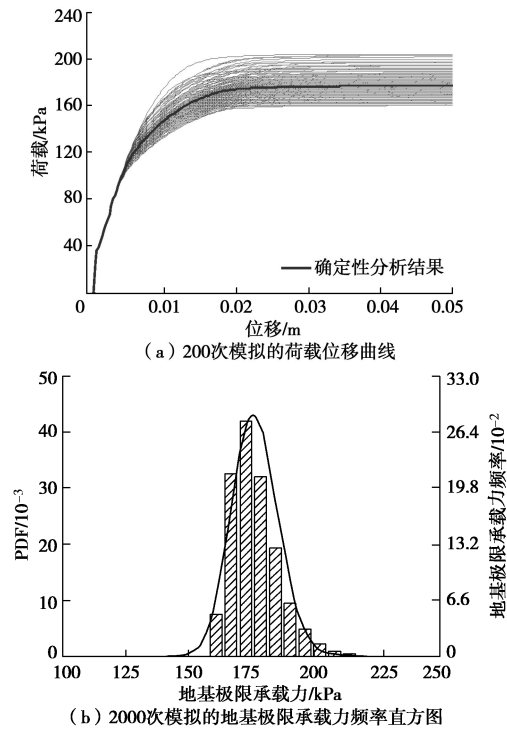


图 8 考虑 s_u 均值和标准差随深度线性增加的空间变异性时蒙特卡洛模拟结果 ($\Delta_x=5.0$, $\Delta_z=0.5$)

Fig. 8 Results of Monte Carlo simulation as linear increase of mean and standard deviation of s_u with depth ($\Delta_x=5.0$, $\Delta_z=0.5$) 地基极限承载力特性, 这与文献[9]的结论是一致的,

下文分析均将地基极限承载力视为对数正态分布。

图 9 (a) 所示为考虑 s_u 均值和标准差随深度线性增加时地基极限承载力的均值和标准差随水平向相关距离变化情况。由图 9 (a) 可知, 地基极限承载力的均值小于确定性分析结果, 均值和标准差均随水平向相关距离的增加而增加, 且均值的增加幅度小于标准差的增加幅度。这是因为相关距离较小时, 空间各点的不排水抗剪强度参数相关性较小, 导致 s_u 有较大的波动性, 地基土体很难有连续贯通的软弱带存在, 且潜在失稳面上各点处 s_u 的波动性会互相抵消, 从而使地基极限承载力的变异性较小。当相关距离较大时, 空间各点的不排水抗剪强度相关性较大 (如果某点的 s_u 值较小, 其临近各点的 s_u 值亦较小; 反之亦然), 很容易找到一条连续贯通的软弱带, 使地基的极限承载力显著降低; 当出现连续的高强度时, 地基极限承载力显著提高, 这都将导致地基极限承载力的变异性较大。

图 9 (b) 所示为考虑 s_u 均值和标准差随深度线性增加时地基极限承载力的均值和标准差随竖直向相关距离变化情况。由图 9 (b) 可知, 与水平向相关距离改变时地基极限承载力的变化规律类似, 地基极限承载力的均值和标准差均随竖直向相关距离的增大而增大, 且均值的增加幅度小于标准差的增加幅度。与图 9 (a) 相比, 地基的极限承载力的变化更为明显, 说明竖直向相关距离对地基极限承载力有更大的影响。

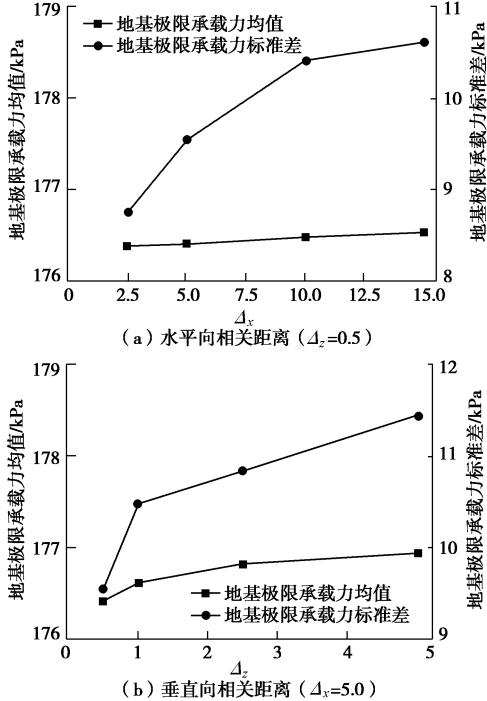


图 9 s_u 均值和标准差随深度线性增加时相关距离对地基极限承载力的影响

Fig. 9 Influence of autocorrelation distance on estimated statistics of ultimate bearing capacity as mean and standard deviation of s_u linearly increase with depth

图 10 给出了 s_u 均值和标准差随深度变化时,

COV_a 对地基极限承载力统计量的影响 (Δ_x 固定为 5.0)。这里参数 a 的变异系数分别取 0.3, 0.6, 0.9 和 1.2, 其对应的地基中部 (深 3 m 处) 的 s_u 变异系数分别为 0.13, 0.26, 0.39 和 0.52, 地基地部 (深 6 m 处) 的变异系数分别为 0.18, 0.36, 0.54 和 0.72, 而不排水抗剪强度变异系数的变化范围一般为 0.06~0.8^[16], 说明此处参数 a 变异系数的取值是合理的。由于地基极限承载力统计量对竖直向相关距离更为敏感, 这里仅考虑了竖直向相关距离变化的情况。由图可知, 参

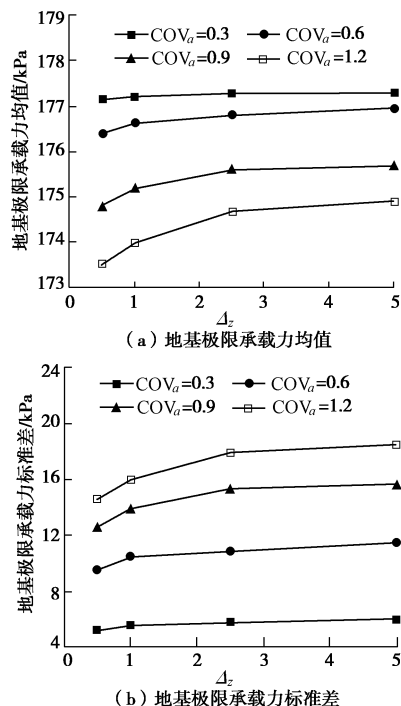


图 10 s_u 均值和标准差随深度线性增加时变异系数对地基极限承载力的影响 ($\Delta_x=5.0$)

Fig. 10 Influence of COV_a on estimated statistics of ultimate bearing capacity as linear increase of mean and standard deviation of s_u with depth ($\Delta_x=5.0$)

数 a 取不同的变异系数时, 地基极限承载力均值和标准差均随竖直相关距离的增加而增加; 标准化相关长度达到 2.5 时, 地基极限承载力的统计量基本达到稳定; 变异系数越大, 均值和标准差随相关距离的增加程度越明显, 均值随变异系数的增加而减小, 标准差随变异系数的增加而增加。

图 11 给出了 s_u 均值和标准差随深度线性增加时, 地基极限承载力累计概率分布函数 (CDF) 曲线 (Δ_x 固定为 5.0), 图中 $p(q_u < 178/F)$ 为地基极限承载力小于 $178/F$ 的概率, 该式中 178 kPa 为确定性分析的地基极限承载力, F 为确定性分析时安全系数, $p(q_u < 178/F)$ 计算公式为

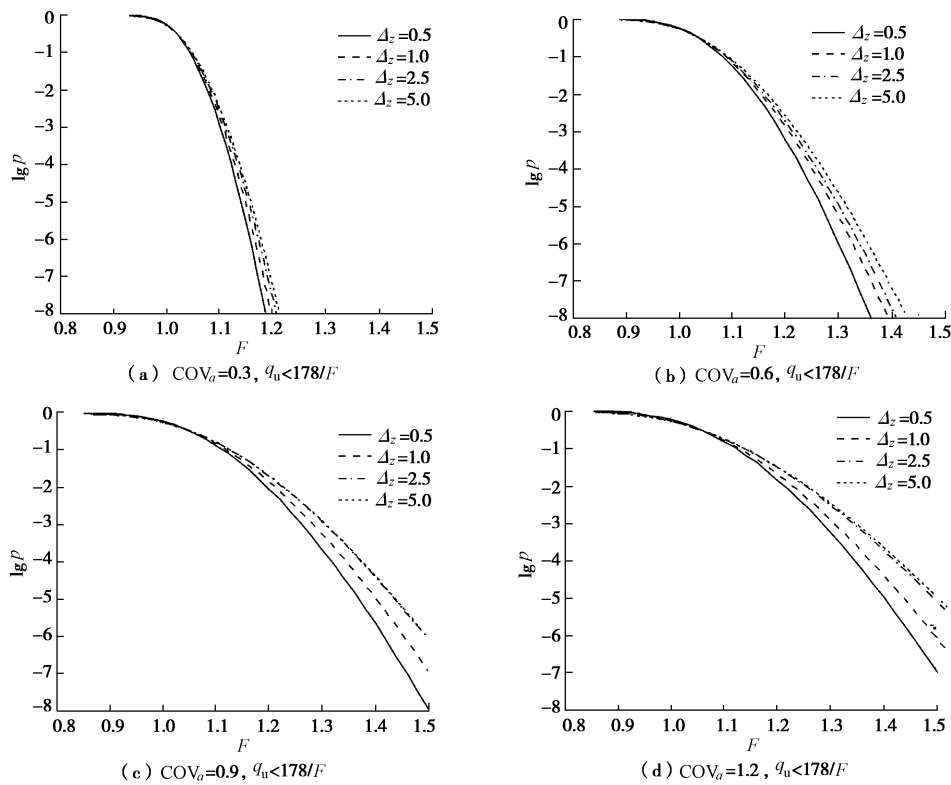
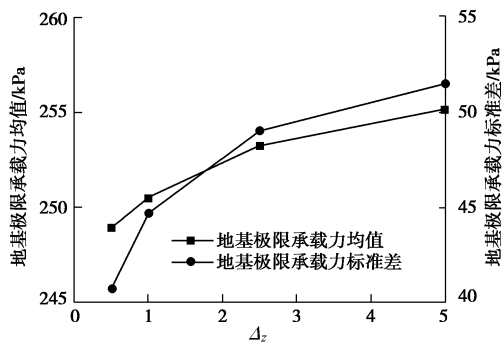
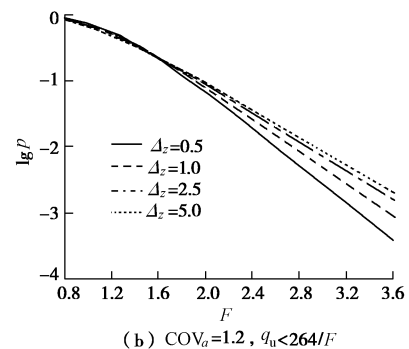
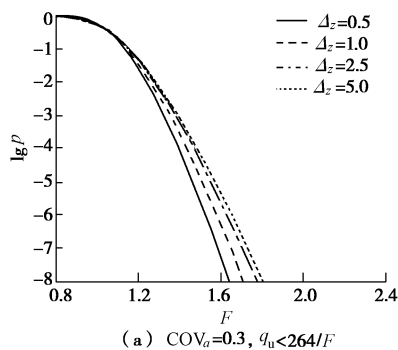
$$p(q_u < 178/F) = \Phi\left(\frac{\ln(178/F) - \lambda_{q_u}}{\xi_{q_u}}\right), \quad (13)$$

式中, λ_{q_u} 和 ξ_{q_u} 分别为地基极限承载力取对数后的均

值和标准差, $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布累计分布函数。式 (13) 可以将安全系数与失效概率有机联系起来, 如 $COV_a=0.9$, $\Delta_z=0.5$ 时, 安全系数为 1.1 时对应的失效概率为 13.8%; 安全系数增加至 1.2 时, 对应失效概率降低至 0.9% (图 11 (c))。由图 11 可知, 考虑 s_u 均值和标准差随深度线性增加时, 变异系数越大, 不同相关距离对应的累计概率分布函数越分散, 说明 s_u 的变异性对失效概率有明显的影响。安全系数较大时, 不排水抗剪强度相关距离越小, 地基失效概率越小, 这可能是因为相关距离越小, 地基极限承载力变异性越小, 其 PDF 曲线越陡的缘故。值得注意的是, 考虑不排水抗剪强度标准差随深度变化时, 不需要较高的安全系数即可达到可靠度的设计要求, 当安全系数大于 1.5 时, 即使当 s_u 变异系数高达 0.72 时 (见图 11(d)), 地基失效概率仍然小于 10^{-4} 。如当 $COV_a=1.2$, $\Delta_x=5$, $\Delta_z=1$ 时, 安全系数 $F=1.5$ 时对应的失效概率为 4.85×10^{-6} , 失效概率几乎可以忽略不计。传统的地基稳定设计中都要求安全系数大于 3, 当考虑不排水抗剪强度参数随深度变化时, 这种设计方案可能是不经济的。

为与传统的抗剪强度参数随机场模型进行对比, 此处考虑 s_u 均值随深度不变的平稳随机场。取两种情况下地基中部土体的 s_u 均值和标准差相同, 即都为 $\mu_{s_u}=50$ kPa, $\sigma_{s_u}=12.96$ kPa。蒙特卡洛模拟次数仍取 2000 次, 计算地基极限承载力时时间步取为 10000, 其它参数取值与 s_u 均值和标准差随深度线性增加时的分析相同。图 12 给出了地基极限承载力的均值和标准差随竖直向相关距离变化情况。由于竖直向相关距离对地基极限承载力的影响大于水平向相关距离, 这里也只考虑了竖直向相关距离改变时的情况 (Δ_x 固定为 5)。由图 12 可知, 地基极限承载力的均值和标准差均随竖直向相关距离的增加而增加, 且均值的增加幅度小于标准差的增加幅度, 增加幅度较 s_u 均值和标准差随深度线性增加的不平稳随机场大。同理可得 s_u 均值和标准差随深度不变时, COV_a 对地基极限承载力统计量的影响规律, 结果与 s_u 均值和标准差随深度线性增加时相同, 这里不再赘述。

图 13 给出了 s_u 均值和标准差随深度不变时, 地基极限承载力的累计概率分布函数曲线 (Δ_x 固定为 5.0), 这里失效概率为 $p(q_u < 264/F)$, 其中 264 kPa 为 s_u (取值 50 kPa) 随深度不变时的确定性分析结果。由图 13 可知, 此时地基承载力变化规律与 s_u 均值和标准差随深度线性增加时类似, 但需要注意的是地基失效概率明显大于 s_u 均值和标准差随深度线性增加时的结果, 为了达到相同的安全水平, 需要采用更大的安全系数进行地基稳定设计。如当 $COV_a=1.2$, $\Delta_x=5.0$, $\Delta_z=1$ 时, 为了保证地基失效概率低于 10^{-3} , s_u 均值和

图 11 s_u 均值和标准差随深度线性增加时地基极限承载力累计概率分布函数曲线 ($\Delta_x=5.0$)Fig. 11 Cumulative distribution function (CDF) curves of ultimate bearing capacity during linear increase of mean and standard deviation of s_u with depth ($\Delta_x=5.0$)图 12 s_u 均值和标准差随深度不变时竖直向相关距离对地基极限承载力的影响 ($\Delta_x=5.0$)Fig. 12 Influence of vertical autocorrelation distance on estimated statistics of ultimate bearing capacity as mean and standard deviation of s_u remain constant with depth ($\Delta_x=5.0$)图 13 s_u 均值和标准差随深度不变时地基极限承载力累计概率分布函数曲线 ($\Delta_x=5.0$)Fig. 13 CDF curves of ultimate bearing capacity as mean and standard deviation of s_u remain constant with depth ($\Delta_x=5.0$)

标准差随深度线性增加时要求设计安全系数大于 1.33 即可 (见图 11 (d)), 而 s_u 均值和标准差随深度不变时要求设计安全系数大于 3.56 (见图 13 (b)), 后者安全系数明显大于前者。

为比较 2 种不同随机场对地基极限承载力的区别, 图 14 (a) 给出了 $COV_a=0.6, \Delta_x=5.0, \Delta_z=0.5$ 时, 2 种不同随机场模型对应的地基极限承载力概率密度曲线。为与安全系数建立联系, 图中的概率密度写成 $f(q_u=q_{u,det}/F)$ 的形式, 表示地基极限承载力等于 $q_{u,det}/F$ 的概率密度, 其中 $q_{u,det}$ 为确定性分析时地基极限承载力, s_u 随深度线性增加时其值为 178 kPa, s_u 随深度不变时其值为 264 kPa。由图 14 (a) 可知, s_u 不平稳随

机场模型得出的地基极限承载力的变异性远小于 s_u 为平稳随机场的情况,这可能有以下两方面原因:①由图 5(b),5(d)知,地基失稳面位于地基浅层区域,地基的极限承载力由浅层区域的不排水抗剪强度变异性决定,而 s_u 均值和标准差随深度线性增加的随机场模型在浅层区域的 s_u 变异性小于平稳随机场模型,导致地基极限承载力的变异性较小;②对比图 5(b),5(d)知, s_u 均值随深度线性增加时的地基失稳区域较 s_u 不变时的失稳区域更浅,即地基极限承载力的变异性由更浅区域的 s_u 变异性控制,这进一步导致了 s_u 均值和标准差随深度线性增加时,地基极限承载力的变异性较小。

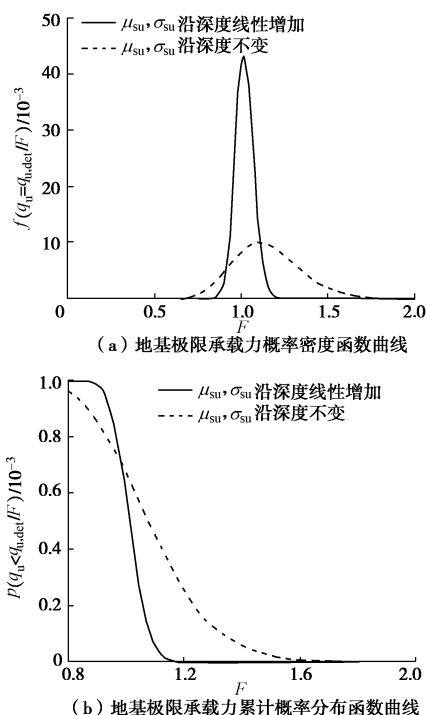


图 14 随机场模型对地基极限承载力分布的影响 ($COV_a=0.6$, $\Delta_x=5.0$, $\Delta_z=0.5$)

Fig. 14 Influence of random field model on distribution of ultimate bearing capacity ($COV_a=0.6$, $\Delta_x=5.0$, $\Delta_z=0.5$)

图 14(b)给出了 $COV_a=0.6$, $\Delta_x=5.0$, $\Delta_z=0.5$ 时,不同的随机场模型对应的极限承载力累计概率分布函数曲线。由图可知,在相同的安全系数水平下,安全系数小于 0.98 时,与 s_u 均值和标准差随深度线性增加的不平稳随机场模型相比,平稳随机场模型会低估地基失效概率;相反,当安全系数大于 0.98 时,平稳随机场模型会高估地基失效概率。尤其是安全系数大于 1.2 时,失效概率会被高估几个数量级,这会导致不经济的地基稳定设计方案。

4 结 论

基于随机场理论提出了考虑不排水抗剪强度随深度变化的地基稳定性分析方法,探讨了不排水抗剪强度空间变异性对地基承载力的影响,比较了不排水抗

剪强度平稳随机场模型与不平稳随机场模型对地基承载力的影响,得到以下 4 点结论。

(1)土体不排水抗剪强度参数空间变异性对地基稳定性有明显的影响,考虑空间变异性时,地基极限承载力均值小于确定性分析结果,地基极限承载力的均值和标准差都随相关距离的增大而增大,地基极限承载力统计量对竖向向相关距离更为敏感。地基极限承载力均值随不排水抗剪强度参数变异系数的增加而减小,标准差随变异系数的增加而增加。

(2)不排水抗剪强度变异性对地基失效概率有明显的影响,变异系数越大,不同相关距离对应的累计概率分布函数越分散。安全系数较大时,不排水抗剪强度相关距离越小,地基失效概率越小。

(3)与不排水抗剪强度参数的均值和标准差随深度线性增加的随机场相比,不排水抗剪强度的平稳随机场模型会高估地基极限承载力的变异性,在相同的安全度水平下,当地基的安全系数较低时,平稳随机场模型会导致对地基失效概率的低估;当地基安全系数较高时,平稳随机场模型会导致对地基失效概率的高估。

(4)考虑均值和标准差随深度线性增加的不排水抗剪强度参数空间变异性时,安全系数达到 1.3 时地基稳定失效概率即能达到较低水平 (10^{-3} 水平),而考虑均值和标准差随深度不变的不排水抗剪强度参数空间变异性时,安全系数达到 3 时地基稳定失效概率才能达到较低水平 (10^{-3} 水平),当有足够的试验数据表明不排水抗剪强度均值和标准差随深度线性增加时,可以考虑使用较低的安全系数进行地基设计。

参考文献:

- [1] 刘 润, 闫焱旺. 渤海湾地基土随机场特性及可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(4): 464 - 467. (LIU Run, YAN Shu-wang. Random field model and reliability analysis of foundation soil in Bohai gulf[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, 26(4): 464 - 467. (in Chinese))
- [2] 朱红霞, 闫焱旺. 天津港地基土随机场特性及可靠度分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(增刊 2): 3959 - 3965. (ZHU Hong-xia, YAN Shu-wang. Random field model and reliability analysis of foundation soil in Tianjin port[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(S2): 3959 - 3965. (in Chinese))
- [3] 潘 健, 周 森. 非均质地基上条形基础沉降的随机有限元分析[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(增刊 2): 196 - 199. (PAN Jian, ZHOU Sen. Probabilistic analysis for settlement of strip footing on non-homogeneous soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(S2): 196 - 199. (in Chinese))
- [4] 吴振君, 王水林, 汤 华, 等. 一种新的边坡稳定性因素敏感性分析方法——可靠度分析方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(10): 2050 - 2055. (WU Zhen-jun, WANG Shui-lin,

- TANG Hua, et al. A new sensitivity analysis approach for slope stability—reliability analysis method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, **29**(10): 2050 - 2055. (in Chinese))
- [5] 张继周, 缪林昌. 基于随机场理论的地基概率沉降分析[J]. 岩土工程学报, 2010, **32**(7): 1059 - 1064. (ZHANG Ji-zhou, MIAO Lin-chang. Probabilistic foundation settlement based on random field theory[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **32**(7): 1059 - 1064. (in Chinese))
- [6] 李典庆, 蒋水华, 周创兵. 基于非侵入式随机有限元法的地下洞室可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(1): 123 - 129. (LI Dian-qing, JIANG Shui-hua, ZHOU Chuang-bing. Reliability analysis of underground rock caverns using non-intrusive stochastic finite element method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(1): 123 - 129. (in Chinese))
- [7] 李典庆, 蒋水华, 周创兵, 等. 考虑参数空间变异性的边坡可靠度分析非侵入式随机有限元法[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(8): 1413 - 1422. (LI Dian-qing, JIANG Shui-hua, ZHOU Chuang-bing, et al. Reliability analysis of slopes considering spatial variability of soil parameters using non-intrusive stochastic finite element method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(8): 1413 - 1422. (in Chinese))
- [8] 祁小辉, 李典庆, 周创兵, 等. 考虑土体空间变异性的边坡最危险滑动面随机分析方法[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(4): 745 - 753. (QI Xiao-hui, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Stochastic analysis method of critical slip surfaces in soil slopes considering spatial variability[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(4): 745 - 753. (in Chinese))
- [9] GRIFFITHS D V, FENTON G A, MANOHARAN N. Undrained bearing capacity of two-strip footings on spatially random soil[J]. International Journal of Geomechanics, 2006, **6**(6): 421 - 427.
- [10] CHO S E, PARK H C. Effect of spatial variability of cross-correlated soil properties on bearing capacity of strip footing[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2010, **34**(1): 1 - 26.
- [11] KASAMA K, WHITTLE A J. Bearing capacity of spatially random cohesive soil using numerical limit analyses[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2011, **137**(11): 989 - 996.
- [12] ZHALEHJOO N, CHENARI RJ, POUYA KR. Evaluation of bearing capacity of shallow foundations using random field theory in comparison to classic methods[C]// Proceeding of Geo-Congress ASCE. Oakland: ASCE, 2012.
- [13] KULHAWY FH, MAYNE PW. Manual on estimating soil properties for foundation design [R]. Report No.: EL-6800. Palo Alto (CA): Electric Power Research Institute, 1990.
- [14] LUMB P. The variability of natural soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1966, **3**(2): 74 - 97.
- [15] ASAOKA A, A-GRIVAS D. Spatial variability of the undrained strength of clays[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1982, **108**(5): 743 - 756.
- [16] PHOON K K, KULHAWY F H. Characterization of geotechnical variability[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999, **36**(4): 612 - 624.
- [17] HICKS M A, SAMY K. Influence of heterogeneity on undrained clay slope stability[J]. Quarterly Journal of Engineering Geology and Hydrogeology, 2002, **35**(1): 41 - 49.
- [18] LACASSE S, NADIM F. Uncertainties in characterizing soil properties[C]// Proceeding of Uncertainty 1996. Madison, Wisconsin: ASCE, 1996.
- [19] SUDRET B, KIUREGHIAN AD. Stochastic finite element methods and reliability: a state-of-the-art report[R]. Report No.: UCB/SEMM-2000/08. Berkeley: Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, 2000.
- [20] WU S H, OU C Y, CHING J, et al. Reliability-based design for basal heave stability of deep excavations in spatially varying soils[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2012, **138**(5): 594 - 603.
- [21] BAECHER G B, CHRISTIAN J T. Reliability and statistics in geotechnical engineering[M]. London: John Wiley & Sons Ltd, 2003.
- [22] EL-RAMLY H, MORGENSTERN N R, CRUDEN D M. Probabilistic stability analysis of a tailings dyke on presheared clay shale[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, **40**(1): 192 - 208.
- [23] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 基于 Copula 函数的抗剪强度参数间相关性模拟及边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(12): 2284 - 2291. (TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Modeling dependence between shear strength parameters using Copulas and its effect on slope reliability[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(12): 2284 - 2291. (in Chinese))
- [24] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 不完备概率信息条件下边坡可靠度分析方法[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(6): 1027 - 1034. (TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Reliability analysis of slopes with incomplete probability information[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(6): 1027 - 1034. (in Chinese))