

DOI: 10.11779/CJGE201405010

考虑微观莫尔-库仑准则的拓展虚内键本构模型

王 凯¹, 张振南^{2*}, 秦爱芳¹

(1. 上海大学土木工程系, 上海 200072, 2. 上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240)

摘 要: 拓展虚内键本构模型 (augmented virtual internal bond-AVIB) 蕴含了微观断裂机理, 在模拟材料断裂破坏过程中有着较强的优势, 它还不能很好地模拟岩土材料的压剪破坏的力学行为, 这限制了它在岩土工程中的应用。为了突破这一局限性, 在微观虚内键层面上引入了莫尔-库仑类型的虚内键破坏准则, 来模拟岩土材料宏观压剪破坏行为。数值分析表明: 通过引入这一微观莫尔-库仑准则, 可以很好地再现岩石材料三轴受压情况下的强度特征, 并且在大量数值模拟基础上, 得出了微观内摩擦角和黏聚力与宏观内摩擦角和黏聚力之间的关系。该关系为本模型的参数标定提供了依据。

关键词: 拓展虚内键; 微观结构; 围压; 剪切破坏; 莫尔-库仑准则

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2014)05-0880-06

作者简介: 王 凯(1986-), 男, 硕士研究生, 主要从事岩土材料本构方面的研究。E-mail: wangkai1986520@qq.com。

Augmented virtual internal bond considering micro Mohr-Coulomb criterion

WANG Kai¹, ZHANG Zhen-nan², QIN Ai-fang¹

(1. Department of Civil Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, China; 2. School of Naval of Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The augmented virtual internal bond (AVIB) is a multiscale constitutive model developed from the virtual internal bond (VIB). VIB considers solid materials to consist of randomized 'material particles' in a micro scale. The material particles are connected with VIB. AVIB uses the Xu-Needleman potential function to simultaneously account for the energy contribution of normal and shear deformations of a micro bond. Because the micro fracture mechanism has been implicitly embedded into the constitutive relation of AVIB, AVIB presents many advantages in simulating the fracture propagation of materials. Although the AVIB can successfully simulate the tensile fracture propagation, it cannot simulate the compressive-shear failure behaviors of geomaterials. The underlying reason lies in that the Xu-Needleman potential function cannot describe the micro contact properties of granular materials. To break this limitation of AVIB, a Mohr-Coulomb type of rupture criterion is introduced for compressive bond. Through the micro Mohr-Coulomb criterion, AVIB can capture the key failure mechanism of geo-materials subjected to compression and shear. Through numerical simulation, it is found that the micro cohesive strength governs the macro cohesive strength of geomaterials and the micro friction angle governs the macro friction angle. A linear relationship exists between the micro and macro cohesive strengths, and the micro and macro friction angles. There is no correlation between the micro cohesive strength and macro friction angle, and the micro friction angle and macro cohesive strength. The simulation example suggests that the triaxial strength of rock is linear with the confining pressure, which agrees with the observation in experiment. This demonstrates that the proposed method is valid. It may provide a new micro mechanics constitutive model for geomaterials.

Key words: augmented virtual internal bond; microstructure; confining pressure; shear failure; Mohr-coulomb criterion

0 引 言

岩石材料广泛分布于地质工程及土木工程中, 找到一种合适的方法来对岩石材料进行有效的数值模拟对于工程实践将具有重要的意义。由于岩石内部分布着大量的裂纹、裂隙等不连续面, 而这些不连续面相对于岩石材料本身来说尺寸很小, 因此一些学者将这

些不连续面当作成岩石的内部损伤, 采用连续介质损伤力学的方法来对岩石进行数值模拟^[1]。运用连续介

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11172172, 41372279); 国家重点基础研究发展计划 (973 计划) 项目 (2011CB013505)

收稿日期: 2013-06-16

*通讯作者

质力学模型, 通过场连续假设可以大大减少材料的内部自由度, 极大地缩小计算时间和计算成本, 使问题简单化。然而, 在运用连续介质损伤力学模拟过程中也会存在一些不足, 主要有以下3方面: 首先, 演化方程的建立比较困难; 其次, 传统连续介质力学是建立在场连续假设基础上的, 一旦材料发生破坏, 材料将由之前的连续介质变为非连续介质, 这时原来的本构关系将不再成立; 再次, 采用基于连续介质理论的有限单元法研究岩石裂缝扩展贯通, 存在计算结果不容易收敛, 网格划分困难等问题。因此, 建立在传统连续介质力学基础上的计算方法在岩石材料破坏模拟中存在较大的局限性。

为了解决这些问题, 一些学者开始运用非连续介质理论从细观角度来研究岩石的宏观力学特征。Morikawa 等^[2]提出了一种弹簧模型, 将材料离散成圆形微粒, 粒子间用线性的法向和切向弹簧连接, 并将该模型应用于裂缝的动力分析。杨庆等^[3]应用基于离散单元法发展起来的颗粒流 (PFC) 程序, 从细观角度模拟了岩石类材料裂纹的扩展、贯通过程。Gao 等^[4]Klein 等^[5]提出了 VIB (virtual internal bond) 模型, 该模型认为: 固体材料在微观上是由离散的随机分布的质点 (带有质量的微粒) 组成, 质点与质点之间由一组虚拟法向键所连接。该模型继承了分子动力学和连续介质力学的特点, 它在模拟岩石裂纹生成及扩展过程中有着很大的优越性。后来, 张振南等^[6-7]在 VIB 模型的基础上提出了多维虚内键 VMIB 模型 (virtual multidimensional internal bond), 它在 VIB 模型中单一法向连接键的基础上增加了切向键, 并推导出了法向键与切向键刚度系数和宏观材料常数 (杨氏模量、泊松比) 之间的对应关系。VMIB 模型建立了微观尺度上的离散结构特征与宏观尺度下的材料力学属性之间的桥梁^[8]。为了使微观力学机理更为清晰, Zhang 等^[9]应用 Xu-Needleman 势函数来描述虚内键, 建立了拓展虚内键 (AVIB) 本构模型。由于 AVIB 建立于材料微观结构, 其本构模型已蕴含了材料微观断裂机理, 因此它在模拟材料破坏方面具有较强的优势。但 AVIB 还不能很好地模拟岩土材料受压剪切破坏行为, 这一点限制了它在岩土工程方面的应用。为了突破这一局限性, 本文在 AVIB 模型中, 引入了 Mohr-Coulomb 虚内键断裂准则, 来描述虚内键受压时的破坏行为, 并进一步找出宏观材料参数和微观模型参数之间的对应关系, 为模拟岩土材料压剪作用下的破坏行为提供一种新的方法。

1 AVIB 模型简介

VIB 材料微观组构如图 1 所示, 材料代表单元体

由随机分布的微粒组成, 微粒之间通过一虚内键连接。通过 Cauchy-Born 规则, 将虚内键的变形与变形梯度建立了联系。后来, Zhang 等^[9]应用 Xu-Needleman 势函数来同时考虑虚内键切向和法向变形的能量贡献, 并推导了如下四阶弹性张量:

$$c_{ijkl} = \left\langle A\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l + B(\delta_{ik}\xi_j\xi_l - \xi_i\xi_j\xi_k\xi_l) - B\frac{\ell_0^2}{\delta_n^2}(\varepsilon_{ip}\xi_p\xi_j - \xi^T\varepsilon\xi\cdot\xi_i\xi_j) \cdot (\varepsilon_{kp}\xi_p\xi_l - \xi^T\varepsilon\xi\cdot\xi_k\xi_l) \right\rangle \quad (1)$$

式中 $\langle \dots \rangle = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\dots) D(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi$ (三维情况);

$\langle \dots \rangle = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} (\dots) D(\theta) d\theta$ (二维情况); $A = \frac{\phi_n \ell_0^2}{\delta_n^2} \exp$

$\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left(1 - \frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left[1 - q + q \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right)\right]$; $B = \frac{2q\phi_n \ell_0^2}{\delta_t^2} \exp$

$\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left(1 + \frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right)$; ε 为应变张量; $D(\theta, \phi)$ 为

虚内键的空间分布密度; ξ 为虚内键的方向向量;

Δ_n, Δ_t 分别为法向和切向变形; V 为单元体体积; ℓ_0 为虚内键长度。

其中虚内键能量参数为

(1) 三维情况下

$$\left. \begin{aligned} \phi_n &= \frac{V\delta_n^2}{\ell_0^2} \cdot \frac{3E}{4\pi(1-2\nu)}, \\ q &= \frac{\delta_t^2}{\delta_n^2} \cdot \frac{(1-4\nu)}{2(1+\nu)}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2) 二维平面应力情况,

$$\left. \begin{aligned} \phi_n &= \frac{V\delta_n^2}{\ell_0^2} \cdot \frac{E}{\pi(1-\nu)}, \\ q &= \frac{\delta_t^2}{\delta_n^2} \cdot \frac{(1-3\nu)}{2(1+\nu)}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3) 二维平面应变情况下,

$$\left. \begin{aligned} \phi_n &= \frac{V\delta_n^2}{\ell_0^2} \cdot \frac{E}{\pi(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ q &= \frac{\delta_t^2}{\delta_n^2} \cdot \frac{(1-4\nu)}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

所得的增量型本构关系为

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (5)$$

由式 (1) 中的系数 A, B 表达式可看出, 当虚内键受压时, 即 $\Delta_n/\delta_n < 0$ 时, 系数 A, B 将呈指数增加, 导致其模量也呈指数增加, 因此, Xu-Needleman 势函数不适合于描述岩土材料的压剪破坏。因而, AVIB 本构不适合于岩土材料压剪破坏的数值模拟。

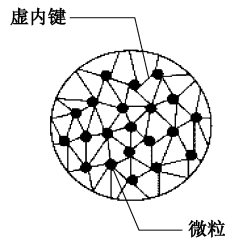


图 1 VIB 模型的微观结构

Fig. 1 Microstructure of VIB

2 Mohr-Coulomb 类型的虚内键破坏准则

原 AVIB 模型采用以变形控制的 Xu-Needleman 势函数来描述微粒之间的相互作用,这在模拟材料受拉破坏过程中表现出了较大的优越性。但是 Xu-Needleman 势函数却不能很好地反映压剪作用下岩土材料的破坏过程,其原因在于岩土细观颗粒在受压剪时,它们之间的黏结破坏更遵守 Mohr-Coulomb 准则。

如图 2 所示,代表单元体 REV 中 2 个相互接触的颗粒,其相互接触力以接触面为参考,可分解为法向力 f_n 和切向力 f_t 。令 S 为 2 个颗粒之间的接触面积,则在 2 颗粒接触面上的微观法向应力和切向应力为

$$\begin{cases} \sigma_n = f_n / S \\ \sigma_s = f_t / S \end{cases} \quad (6)$$

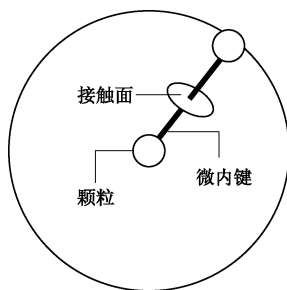


图 2 代表单元体 (RVE) 中 2 个颗粒之间的接触

Fig. 2 Contact between two particles in a representative volume element (RVE)

根据 Chang 等^[10]、Liao 等^[11],在总体坐标系下 2 个颗粒的接触力为

$$\begin{cases} f_i^\alpha = \sigma_{ij} l_n^\alpha A_{jn} \\ A_{jn} = \left[\frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^N l_j^\alpha l_n^\alpha \right]^{-1} \end{cases} \quad (7)$$

式中, A_{jn} 为 RVE 内虚内键的组构张量; l^α 为第 α 个虚内键向量, $l^\alpha = \ell_0^\alpha \xi$, ℓ_0^α , ξ 分别为第 α 个虚内键长度和方向向量; σ_{ij} 为 REV 的应力; V 为 RVE 的体积; N 为 REV 中虚内键的总数。

为简便起见,假设在一个 RVE 中所有虚内键的初始长度均为 ℓ_0 , 两颗粒之间的接触面积均为 S , 它们

与 REV 体积的关系为

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \pi \ell_0^3 = V, & 4\pi \ell_0^2 = NS, \quad (\text{三维}) \\ \pi \ell_0^2 = V, & 2\pi \ell_0 = NS, \quad (\text{二维}) \end{cases} \quad (8)$$

由式 (7) 可得两颗粒之间接触法向力 f_n 和切向力 f_t 为

$$\begin{cases} f_n = \xi^T f^\alpha \\ f_t = \sqrt{f^{\alpha T} f^\alpha - f_n^2} \end{cases} \quad (9)$$

由式 (6) ~ (9) 可得出方向为 ξ 的虚内键上的 2 个微粒接触的法向应力和切向应力分别为

$$\begin{cases} \sigma_n = \lambda \cdot \xi^T \sigma \tilde{A} \xi \\ \sigma_s = \lambda \cdot \left[(\sigma \tilde{A} \xi)^T (\sigma \tilde{A} \xi) - (\xi^T \sigma \tilde{A} \xi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (10)$$

式中, 三维情况下, $\lambda = N/3$, 二维情况下 $\lambda = N/2$;

$\tilde{A}_{ij} = \left[\sum_{\alpha=1}^N \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha \right]^{-1}$ 。虚内键受压时其破坏准则为

$$\sigma_s \geq c' + \sigma_n \tan \varphi' \quad (11)$$

式中, φ' 为微观内摩擦角, c' 为微黏结强度。

当虚内键受压时,但未满足式 (11) 时,虚内键为线弹性,当满足式 (11) 时,虚内键的能量贡献为零;当虚内键受拉时,虚内键的能量由 Xu-Needleman 势函数决定。所以,考虑微观 Mohr-Coulomb 准则 (式 (11)) 的材料本构关系为

$$\begin{cases} d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\epsilon_{kl} \\ C_{ijkl} = \langle \tilde{C}_{ijkl} \rangle \end{cases} \quad (12)$$

其中, ①当虚内键受压,但不满足式 (11) 时,有

$$\tilde{C}_{ijkl}^\alpha = \frac{\phi_n \ell_0^2}{\delta_n^2} \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l + \frac{2q\phi_n \ell_0^2}{\delta_t^2} (\delta_{ik} \xi_j \xi_l - \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l); \quad (13a)$$

②当虚内键受压,且满足式 (11) 时,有

$$\tilde{C}_{ijkl}^\alpha = 0; \quad (13b)$$

③当虚内键受拉时, C_{ijkl} 按式 (1) 计算。

3 微宏观破坏准则参数的关系

在式 (11) 中含有微观黏聚力和微观内摩擦角参数,这 2 个参数不能直接测量,因此,如何通过所能测定的宏观内摩擦角和黏聚力去标定这 2 个微观参数是一个关键问题。为了探索微宏观这 2 组参数之间的关系,进行如下模拟。

该模型尺寸为 $0.1 \text{ m} \times 0.05 \text{ m}$,取材料杨氏模量 $E=22 \text{ GPa}$,泊松比 $\nu=0.2$,采用常应变三角形单元,考虑平面应力情况。分别取不同微观内摩擦角和黏聚力,对其施加不同围压作用,计算出受压情况下的应力、应变值,可以分析得到材料极限抗压强度与所受

围压之间的关系。根据最大主应力 σ_1 和最小主应力 σ_3 的关系,画出一系列莫尔圆及相对应的莫尔包络线,可以得到对应的宏观内摩擦角和黏聚力。所得的微宏观内摩擦角和黏聚力关系曲线如图3~5所示。

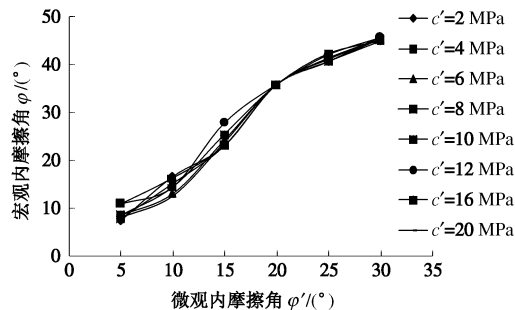


图3 宏观与微观内摩擦角之间的关系

Fig. 3 Relationship between macro and micro friction angles

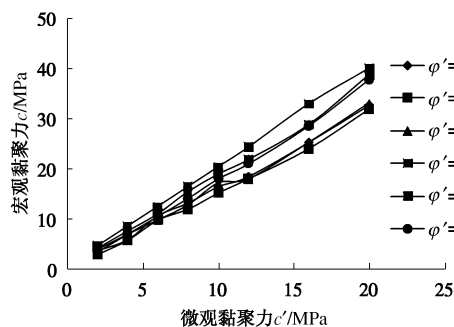


图4 宏观与微观黏聚力之间的关系

Fig. 4 Relationship between macro and micro cohesive strength

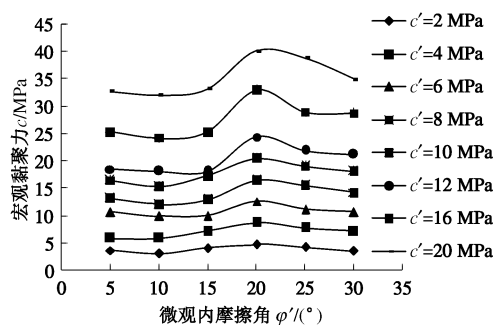


图5 宏观黏聚力与微观内摩擦角之间的关系

Fig. 5 Relationship between macro and micro friction angles

图3是在不同微观黏聚力下宏观内摩擦角与微观内摩擦角的关系曲线。可以看出,当微观黏聚力取不同值时,各条宏观内摩擦角与微观内摩擦角的关系曲线基本重合,说明宏观内摩擦角与微观黏聚力的大小无关,只随着微观内摩擦角的增加而增加,存在一一对应关系。

图4,5可以看出宏观黏聚力随着微观黏聚力的增加而增加,且大致符合线性关系。图4中在不同微观内摩擦角的情况下,各相应的关系曲线大致重合,

图5中不同微观黏聚力下,宏观黏聚力随着微观内摩擦角的增加基本上保持不变,以上均说明宏观黏聚力只与微观黏聚力相关而与微观内摩擦角不相关。

综上所述,宏观内摩擦角与微观内摩擦角、宏观黏聚力与微观黏聚力之间基本存在线性关系。

4 岩石三轴强度数值模拟

大量试验表明,岩石三轴抗压强度与围压呈线性关系。为了验证本方法能否再现这种关系,采用本方法对围压条件下的岩石强度进行模拟,所得结果如图6,7所示。

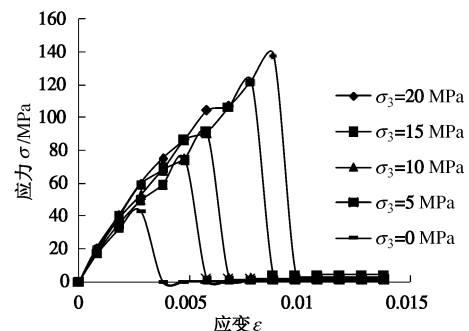


图6 不同围压下应力-应变关系

Fig. 6 Simulated stress-strain curves under different confining pressures

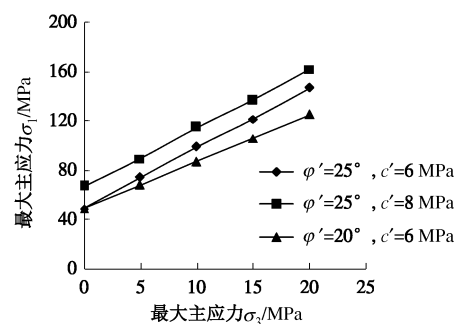


图7 极限抗压强度 σ_1 与围压 σ_3 之间关系

Fig. 7 Relationship between triaxial compressive strength and confining pressure

不同围压下的应力-应变曲线如图6所示。从图6中可以看出,应力极值随着围压的增加而增加,材料达到应力极值后不出现塑性流动现象,而是直接发生应力跌落下降段。出现这种现象的主要原因是本构模型中没有考虑塑性流动问题。

由图7可以看出具有不同微观内摩擦角和黏聚力的材料极限应力 σ_1 与围压 σ_3 均基本满足线性关系,即 $\sigma_1 = \sigma_0 + k\sigma_3$,其中 σ_0 , k 是与材料本身性质有关的常数。由图8可以看出比例系数 k 随着微观内摩擦角的增加而增加,且在不同微观黏聚力时比例系数 k 和微

观内摩擦角的关系曲线基本重合, 进一步说明比例系数 k 与微观内摩擦角之间存在着一一对应关系, 而与微观黏聚力无关。

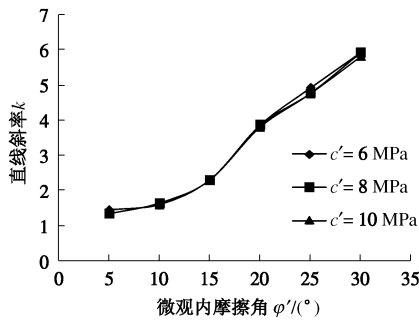


图 8 斜率 K 与微观内摩擦角 ϕ' 之间关系 ($\sigma_1 = \sigma_0 + k\sigma_3$)

Fig. 8 Relationship between slope and micro friction angle

为了进一步验证此模型的适用性及优越性, 现将本模型模拟结果与原 AVIB 模型模拟结果和试验结果进行对比分析。根据大理石的试验数据, 取杨氏模量 $E=22$ GPa, 泊松比 $\nu=0.2$, 微观内摩擦角 $\phi'=30^\circ$, 微观黏聚力 $c'=9.7$ MPa。试件的尺寸和边界条件如图 9 所示, 采用平面 3 节点常应变单元, 节点总数为 3321, 单元总数为 6400。试件尺寸及边界条件如图 9 所示。数值模拟假设为平面应力状态, 所得模拟结果如图 10 所示。

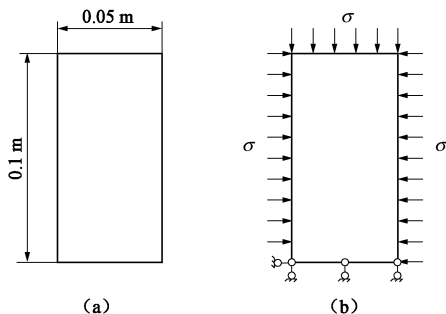
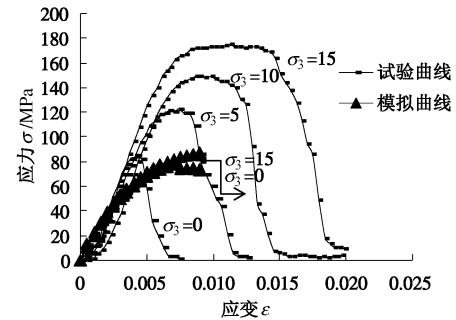


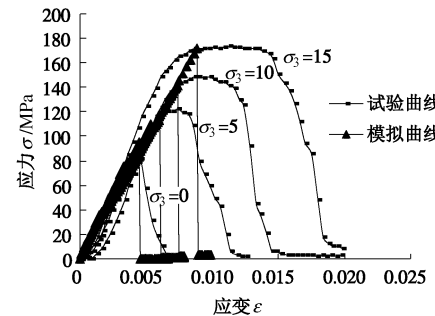
图 9 试件尺寸及边界条件

Fig. 9 Dimensions of specimen and boundary conditions

图 10 (a) 为采用原 AVIB 模型模拟岩石材料在不同围压下的应力 - 应变关系图, 图 10 (b) 为本文模型模拟岩石材料在不同围压下的应力 - 应变关系图 (试验数据来自文[12])。从图 10 中可以看出, 原 AVIB 模型不能反映该岩石的峰值应力随围压的增大而增大的这一显著特性, 而本文的模型克服了原 AVIB 模型的缺点, 能够再现岩石的峰值应力随围压增加而增大这一显著特性。从图 10 (b) 中可以看出, 本文通过引入原 AVIB 模型中引入莫尔-库仑准则能够很好地再现常规三轴压缩下岩石强度特征; 但却不能再现岩石峰值后软化力学行为, 这是因为本模型暂时只考虑了线弹性情况, 没有考虑塑性情况。



(a) 原 AVIB 模型计算结果



(b) 本文模型计算结果

图 10 采用原 AVIB 与本文模型所模拟的岩石三轴抗压应力应变曲线

Fig. 10 Simulated compressive triaxial stress-strain relationships by (a) original AVIB, and (b) present method

为了进一步展示本模型在岩石压剪破坏模拟过程中行为, 图 11 为单轴受压试件压剪裂纹扩展图。从图 11 中可看出, 岩石单轴受压试件为压剪破坏, 所模拟的压剪裂纹与试验中观察到的现象基本一致, 这又再次说明了本方法能够再现岩石的压剪破坏。

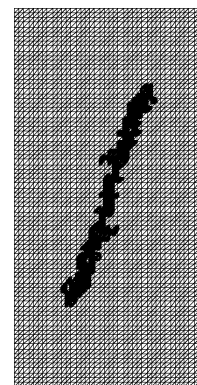


图 11 模拟的单轴受压试件剪切裂纹

Fig. 11 Simulated shear fracture in uniaxial compressive tests

5 结 语

本文在 AVIB 模型中引入了微观 Mohr-Coulomb 类型的虚内键破坏准则。当虚内键受压时, 采用这种破坏准则, 而当虚内键受拉时依然采用 Xu-Needleman 势函数描述。材料宏观压剪破坏决定于微观

Morh-Coulomb 参数, 即微观黏聚力和微观内摩擦角。通过数值模拟得出了微观黏聚力、微观内摩擦角与宏观黏聚力、宏观内摩擦角具有如下的关系: 宏观内摩擦角与微观内摩擦角、宏观黏聚力与微观黏聚力之间基本存在线性关系, 而微观内摩擦角与宏观黏聚力及微观黏聚力与宏观内摩擦角之间基本没有相关性。应用本文的模型对围压条件下的岩石强度进行模拟, 得出了岩石抗压强度与围压基本呈线性关系, 这与大量试验观测的结果相吻合, 这说明嵌入微观 Morh-Coulomb 准则后的 AVIB 基本上能够反映岩土材料的破坏机理。从而说明 AVIB 可以用于岩土材料的压剪破坏分析。

本研究只考虑了弹性变形, 还没有考虑材料的塑性变形, 因此, 还不能完整的再现应力-应变全过程响应过程, 还研究将有待于进一步的加以完善。本文为研究岩土工程材料提供了一种新的微观本构模型。

参考文献:

- [1] KAWAMOTO T, ICHIKAWA Y, KYOYA T. Deformation and fracturing behavior of discontinuous rock mass and damage mechanics theory[J]. International Journal Numerical Analytical Methods in Geomechanics, 1988, **12**(1): 1 - 30.
- [2] MORIKAWA H, SAWAMOTO Y. Local fracture analysis of reinforced concrete slab by the discrete element method[C]// Proceedings of the 2nd International Conference on the Discrete Element Method. MIT, 1993.
- [3] 杨 庆, 刘元俊. 岩石类材料裂纹扩展贯通的颗粒流模拟[J]. 岩土力学与工程学报, 2012, **31**(增刊 1): 3123 - 3129. (YANG Qing, LIU Yuan-jun. Simulations of crack propagation in rock-like materials using particle flow code[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2012, **31**(S1): 3123 - 3129. (in Chinese))
- [4] GAO H J, KLEIN P. Numerical simulation of crack growth in an isotropic solid with randomized internal cohesive bond[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1998, **46**(2): 187 - 218.
- [5] KLEIN P, GAO H. Crack nucleation and growth as strain localization in a virtual-bond continuum[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1998, **61**: 21 - 48.
- [6] ZHANG Z N, GE X R. A new quasi-continuum constitutive model for crack growth in an isotropic solid[J]. European Journal of Mechanics Solids (A), 2005, **24**: 243 - 252.
- [7] 张振南, 葛修润. 多维虚内键模型 (VMIB) 及其在岩体数值模拟中的应用[J]. 中国科学, 2007, **37**(5): 605 - 612. (ZHANG Zhen-nan, GE Xiu-run. Virtual multidimensional internal bonds model and its application in simulation of rock mass[J]. Science in China Series E: Technological Sciences, 2007, **37**(5): 605 - 621. (in Chinese))
- [8] 张振南, 葛修润, 张孟喜. 基于 VMIB 的岩石围压破坏二维多尺度数值模拟[J]. 岩土力学, 2008, **29**(1): 219 - 224. (ZHANG Zhen-nan, GE Xiu-run, ZHANG Meng-xi. 2-D multiscale numerical simulation of rock failure subjected to confining pressure based on virtual multi-dimensional internal bonds[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, **29**(1): 219 - 224. (in Chinese))
- [9] ZHANG Z N, GAO H J. Simulating fracture propagation in rock and concrete by an augmented virtual internal bond method[J]. International Journal Numerical Analytical Methods in Geomechanics, 2012, **36**: 459 - 482.
- [10] CHANG C S, YIN Z Y, HICHER P Y. Micromechanical analysis for interparticle and assembly instability of sand[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2011, **137**(3): 155 - 168.
- [11] LIAO Ching-lung, CHANG Ta-peng, YOUNG Dong-hwa, et al. Stress-strain relationship for granular materials based on the hypothesis of best fit[J]. International Journal of Solids Structures, 1997, **34**(31/32): 4087 - 4100.
- [12] 蒋 宇. 周期荷载作用下岩石疲劳破坏及变形发展规律[D]. 上海: 上海交通大学, 2003. (JIANG Yu. Studies on the fatigue failure and deformation evolution of rock under cycle loading[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2003. (in Chinese))