

DOI: 10.11779/CJGE201404021

层状横观各向同性地基与刚性条形基础共同作用分析

艾智勇^{1, 2}, 张逸帆^{1, 2}

(1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 运用对偶积分方程来求解刚性条形基础与层状横观各向同性地基的接触问题。从直角坐标系下平面应变问题基本控制方程出发, 通过对坐标 x 的 Fourier 积分变换和 Cayley-Hamilton 定理推导出单层横观各向同性地基的传递矩阵。将单层地基传递矩阵结合层间连续性条件, 推导出层状地基的传递矩阵解。利用刚性条形基础与层状横观各向同性地基接触的混合边值条件, 推导出一组对偶积分方程, 并应用 Jacobi 正交多项式将其转化为线性代数方程组, 求解得到地基反力。编制了相应的计算程序, 其计算结果与已有文献和有限元软件的结果基本吻合, 并分析了地基横观各向同性性质与成层性对计算结果的影响。

关键词: 横观各向同性; 层状地基; 传递矩阵; 对偶积分方程

中图分类号: TU44

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2014)04-0752-05

作者简介: 艾智勇(1966-), 男, 江西余江人, 博士, 教授, 主要从事岩土及地下工程方面的教学和研究工作。E-mail: zhiyongai@tongji.edu.cn。

Interactive analysis of a rigid strip footing on transversely isotropic layered soils

AI Zhi-yong^{1, 2}, ZHANG Yi-fan^{1, 2}

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A pair of dual integral equations are presented to solve the contact problem of a rigid strip footing on transversely isotropic layered soils. Based on the governing equations of plane strain problem in Cartesian coordinates, the transfer matrix can be obtained through the Fourier transform with respect to the coordinate variable x and the Cayley-Hamilton theorem. Then, the transfer matrix solution of layered soils is obtained in combination with the continuity conditions between two adjacent layers. Considering the mixed boundary conditions of the contact problem, a pair of dual integral equations are derived, which are further converted to linear equations by means of the Jacobi orthogonal polynomials. Finally, the subgrade reactions can be obtained by solving the linear equations. The results of numerical calculation carried out by the corresponding computer program agree fairly well with those by the existing references and FEM software. Further numerical examples are also presented to elucidate the influence of transverse isotropy and stratification of the soils.

Key words: transverse isotropy; layered soil; transfer matrix; dual integral equation

0 引言

天然土体是长期自然沉积形成, 往往呈现出横观各向同性和层状的性质。岳中琦等^[1]利用双重 Fourier 变换研究了考虑体力的垂直不均匀横观各向同性弹性体问题; 王林生^[2]采用柔度矩阵计算横观各向同性成层地基; 陈光敬等^[3-4]利用 Hankel 变换推导出柱坐标下轴对称和非轴对称的横观各向同性地基的解答; 顿志林等^[5]通过位移解法得到横观各向同性地基的通解, 并求得几种常见的荷载作用下的解析解; 艾智勇等^[6]运用双重 Fourier 变换求解出了三维直角坐标下横观各向同性地基的传递矩阵解。实际工程中, 有些基础的刚度远大于地基, 故可视为刚性基础。Chow^[7]

以有限单元法为基础, 提出一个分析弹性成层地基上任意形状刚性板的方法; 袁聚云等^[8]将基础底面面积划分为若干小块, 并假定每个小块的基底反力分布均匀, 分析了中心荷载下刚性板的沉降和反力; 艾智勇等^[9]利用刚性圆板底面各点位移相等, 利用 Hankel 变换, 建立对偶积分方程, 求解了多层地基上轴对称受荷刚性圆板问题。

应用 Fourier 积分变换和 Cayley-Hamilton 定理推导出单层横观各向同性平面应变地基的传递矩阵, 并结合层间连续性条件推导出层状地基传递矩阵解。再

利用刚性条形基础与层状横观各向同性地基接触的混合边界条件, 建立对偶积分方程, 并应用 Jacobi 正交多项式将其转化为线性代数方程组, 求解得出地基反力。最后基于本文解答编制相应的程序, 并设计算例, 以分析地基横观各向同性性质与成层性对计算结果的影响。

1 单层地基传递矩阵

直角坐标下, 不计体力时, 横观各向同性体平面应变问题的控制方程为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \quad (1b)$$

$$\sigma_x = c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (1c)$$

$$\sigma_z = c_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (1d)$$

$$\tau_{xz} = c_{44} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (1e)$$

式中 $c_{11} = \lambda n(1 - n\mu_{vh}^2)$, $c_{13} = \lambda n\mu_{vh}(1 + \mu_h)$, $c_{33} = \lambda(1 - \mu_h^2)$, $c_{44} = G_v$, $n = E_h/E_v$, $\lambda = E_v/[1 + \mu_h(1 - \mu_h - 2n\mu_{vh}^2)]$ 。其中, E_h 为水平向弹性模量, E_v 为竖向弹性模量, G_v 为竖直面上的剪切模量, μ_h 为水平向应力引起的正交水平向应变的泊松比, μ_{vh} 为竖向应力引起的水平向应变的泊松比。

为方便推导, 作如下定义:

$$U = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (2a)$$

$$W = u_z, \quad (2b)$$

$$X = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}, \quad (2c)$$

$$Z = \sigma_z. \quad (2d)$$

式(1)中, 3个应力分量是两个位移分量的函数, 设法消去 σ_x , 并利用式(2), 推导可得

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} U \\ Z \\ X \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_4 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -d_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -d_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ -d_1 & d_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ Z \\ X \\ W \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

式中, $d_1 = c_{13}/c_{33}$, $d_2 = (c_{11}c_{33} - c_{13}^2)/c_{33}$, $d_3 = 1/c_{33}$, $d_4 = 1/c_{44}$ 。

为求解式(3)的偏微分方程组, 对其进行 Fourier 变换, Fourier 变换以及逆变换分别定义为

$$(\bar{U}, \bar{Z}, \bar{X}, \bar{W}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (U, Z, X, W) e^{i\xi x} dx, \quad (4a)$$

$$(U, Z, X, W) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{U}, \bar{Z}, \bar{X}, \bar{W}) e^{-i\xi x} dx. \quad (4b)$$

式中 ξ 为关于 x 的 Fourier 变换参数。

利用式(4a)的 Fourier 变换, 可将式(3)其转化为如下常微分方程组:

$$\frac{d}{dz} [\bar{G}(\xi, z)] = A(\xi) \bar{G}(\xi, z). \quad (5)$$

式中, $\bar{G}(\xi, z) = [\bar{U}(\xi, z), \bar{Z}(\xi, z), \bar{X}(\xi, z), \bar{W}(\xi, z)]^T$, $A(\xi) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & d_4 & \xi^2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ d_2 \xi^2 & d_1 \xi^2 & 0 & 0 \\ -d_1 & d_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

式(5)为常微分方程组, 其解可以表示为

$$\bar{G}(\xi, z) = \Phi(\xi, z) \bar{G}(\xi, 0), \quad (6a)$$

式中, $\Phi(\xi, z) = e^{zA(\xi)}$ 即为单层地基传递矩阵。它可以根据 Cayley-Hamilton 定理求解, 具体求解方法可参考文献[3]。式(6a)的矩阵形式可以表示为

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}(\xi, z) \\ \bar{Z}(\xi, z) \\ \bar{X}(\xi, z) \\ \bar{W}(\xi, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}(\xi, 0) \\ \bar{Z}(\xi, 0) \\ \bar{X}(\xi, 0) \\ \bar{W}(\xi, 0) \end{Bmatrix}, \quad (6b)$$

式中, φ_{ij} 为传递矩阵的具体元素, 根据地基参数的不同分为 3 种不同情况, 具体元素与文献[6]相同。

2 层状地基传递矩阵解

层状地基示意图如图 1 所示。假设相邻两层完全接触, 且每一层是均匀的, 其层间连续性条件为

$$u_x(x, h_i^-) = u_x(x, h_i^+), \quad (7a)$$

$$u_z(x, h_i^-) = u_z(x, h_i^+), \quad (7b)$$

$$\sigma_z(x, h_i^-) = \sigma_z(x, h_i^+), \quad (7c)$$

$$\tau_{xz}(x, h_i^-) = \tau_{xz}(x, h_i^+), \quad (7d)$$

式中, $u_x(x, h_i^-)$ 表示第 i 层中深度 $z = h_i$ 处的 x 方向的位移, $u_x(x, h_i^+)$ 表示第 $i+1$ 层中深度 $z = h_i$ 处的 x 方向的位移, 其他同理。

将式(6)应用于层状地基中的每一层, 并结合层

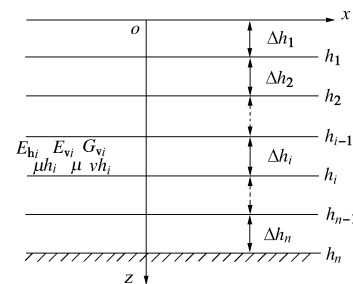


图 1 层状横观各向同性地基

Fig. 1 Transversely isotropic multilayered soils

间连续性条件,即可建立起地基地部与地表面的关系:

$$\bar{G}(\xi, h_n^-) = \prod_{i=1}^n \Phi(\xi, \Delta h_i) \bar{G}(\xi, 0). \quad (8a)$$

式(8a)的矩阵形式可以表示为

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}(\xi, h_n^-) \\ \bar{Z}(\xi, h_n^-) \\ \bar{X}(\xi, h_n^-) \\ \bar{W}(\xi, h_n^-) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}(\xi, 0) \\ \bar{Z}(\xi, 0) \\ \bar{X}(\xi, 0) \\ \bar{W}(\xi, 0) \end{Bmatrix}, \quad (8b)$$

式中, f_{ij} 为各层传递矩阵连乘后矩阵的具体元素。

3 层状地基与刚性条形基础共同作用

层状横观各向同性地基与刚性条形基础接触问题如图2所示。假设层状地基地面为固定,则有

$$u_x(x, h_n^-) = 0, \quad (9a)$$

$$u_z(x, h_n^-) = 0. \quad (9b)$$

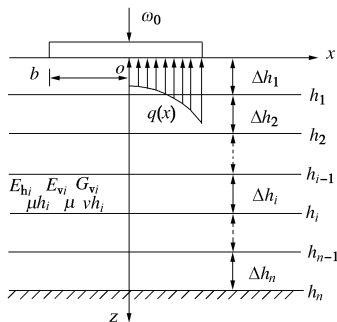


图2 层状横观各向同性地基与刚性条形基础

Fig. 2 A rigid strip footing on transversely isotropic layered soils

给定刚性条形基础施加竖向位移 ω_0 , 并假设地基表面与基础光滑接触, 则有

$$\sigma_z(x, 0) = q(x) \quad (|x| \leq b), \quad (10a)$$

$$\sigma_z(x, 0) = 0 \quad (|x| > b), \quad (10b)$$

$$\tau_{xz}(x, 0) = 0 \quad (0 < |x| < +\infty), \quad (10c)$$

$$u_z(x, 0) = \omega_0 \quad (|x| \leq b), \quad (10d)$$

式中, b 为基础宽度的一半, ω_0 为已知竖向位移。

将式(9)、(10a)、(10b)和(10c)代入式(8), 并利用式(2)、(6a)的 Fourier 变换, 可得

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{Z}(\xi, h_n^-) \\ \bar{X}(\xi, h_n^-) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}(\xi, 0) \\ \bar{q}(\xi) \\ 0 \\ \bar{W}(\xi, 0) \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

展开式(11), 并化简可得

$$\bar{W}(\xi, 0) = M(\xi) \bar{q}(\xi), \quad (12)$$

$$\text{式中, } M(\xi) = \frac{f_{41}f_{12} - f_{11}f_{42}}{f_{11}f_{44} - f_{41}f_{14}}.$$

利用式(10b)和式(10d), 并结合式(12), 可

以推导出一组关于地基反力的对偶积分方程组:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} M(\xi) \bar{q}(\xi) \cos(\xi x) d\xi = \omega_0 \quad (0 < x < b), \quad (13a)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \bar{q}(\xi) \cos(\xi x) d\xi = 0 \quad (b < x < +\infty). \quad (13b)$$

4 对偶积分方程求解

令 $x = b\tilde{x}$, $\xi = \tilde{\xi}/b$, $\omega_0 = b\tilde{\omega}_0$, 式(13)可以转化为如下的对偶积分方程组:

$$\int_0^{+\infty} \tilde{M}(\tilde{\xi}) \tilde{q}(\tilde{\xi}) \cos(\tilde{\xi} \tilde{x}) d\tilde{\xi} = \pi \tilde{\omega}_0 b^2 \quad (0 < \tilde{x} < 1), \quad (14a)$$

$$\int_0^{+\infty} \tilde{q}(\tilde{\xi}) \cos(\tilde{\xi} \tilde{x}) d\tilde{\xi} = 0 \quad (1 < \tilde{x} < +\infty). \quad (14b)$$

参照文献[10]的方法, 把 $\tilde{q}(\tilde{x})$ 表示为 Jacobi 正交多项式组成的级数, 即

$$\tilde{q}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{\omega}_0 b}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n^{(0,1/2)}(\tilde{x}^2), \quad (15)$$

式中, A_n 为待定系数, $P_n^{(\alpha, \gamma)}(x) = {}_2F_1(-n, \alpha+n; \gamma; x)$, 即 Jacobi 正交多项式, ${}_2F_1(-n, \alpha+n; \gamma; x)$ 是高斯超几何函数, 其一般形式为

$${}_2F_1(-n, \alpha+n; \gamma; x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)^{(k)} (\alpha+n)^{(k)}}{(\gamma)^{(k)}} \cdot \frac{x^k}{k!}, \quad (16)$$

式中, $x^{(k)}$ 为 Pochhammer 符号, 即上升阶乘幂符号。

利用式(4a)的 Fourier 变换, 将式(15)转化为

$$\tilde{q}(\tilde{\xi}) = \pi \tilde{\omega}_0 b^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_{2n}(\tilde{\xi}), \quad (17)$$

式中, $J_{2n}(x)$ 为第一类 Bessel 函数。

上式的推导利用了如下关系式:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} P_n^{(0,1/2)}(\tilde{x}^2) \cos(\tilde{\xi} \tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{\pi}{2} J_{2n}(\tilde{\xi}), \quad (18)$$

再利用如下关系式:

$$\int_0^{+\infty} J_{2n}(\tilde{\xi}) \cos(\tilde{\xi} \tilde{x}) d\tilde{\xi} = \begin{cases} (-1)^n (1-\tilde{x}^2)^{-1/2} T_{2n}(\tilde{x}) & (0 < \tilde{x} < 1) \\ 0 & (1 < \tilde{x} < +\infty) \end{cases}, \quad (19)$$

式中, $T_{2n}(\tilde{x}) = \cos(2n \arccos \tilde{x})$ 。这样, 式(14b)可以自动满足。

从式(14a)中可以得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^{+\infty} \tilde{M}(\tilde{\xi}) J_{2n}(\tilde{\xi}) \cos(\tilde{\xi} \tilde{x}) d\tilde{\xi} = 1. \quad (20)$$

最后利用如下关系式:

$$\cos(\tilde{\xi} \tilde{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k}(\tilde{\xi}) P_k^{(0,1/2)}(\tilde{x}^2). \quad (21)$$

即将式(21)式代入式(20)中, 则可以得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n C_{2n,2k} \right) P_k^{(0,1/2)}(\tilde{x}^2) = 1, \quad (22)$$

$$\text{式中, } C_{2n,2k} = \int_0^{+\infty} \tilde{M}(\tilde{\xi}) J_{2n}(\tilde{\xi}) J_{2k}(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi}.$$

式(22)中, 同阶 Jacobi 多项式的系数为零。注意到当 $k=0$ 时, 有 $P_0^{(0,1/2)}(\tilde{x}^2)=1$ 。取式(17)的前 $n+1$ 项计算, 则式(22)可以转化为如下线性代数方程组:

$$\left. \begin{aligned} A_0 C_{0,0} + A_1 C_{2,0} + \cdots + A_n C_{2n,0} &= 1, \\ A_0 C_{0,2} + A_1 C_{2,2} + \cdots + A_n C_{2n,2} &= 0, \\ &\vdots \\ A_0 C_{0,2n} + A_1 C_{2,2n} + \cdots + A_n C_{2n,2n} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

由式(23)求出 A_0, A_1, \dots, A_n 后, 代入式(17), 就可以求出 $\tilde{q}(\tilde{\xi})$, 最后利用式(4b)的 Fourier 逆变换, 即可以求解出地基反力。

5 数值计算与分析

5.1 验证计算结果的正确性

由于目前文献中缺乏刚性条形基础与层状横观各向同性地基共同作用的解答, 故将地基退化为单层各向同性地基并与文献[11]进行比较, 具体见图3。由图3可见, 计算结果与文献[11]所得的结果是吻合的。

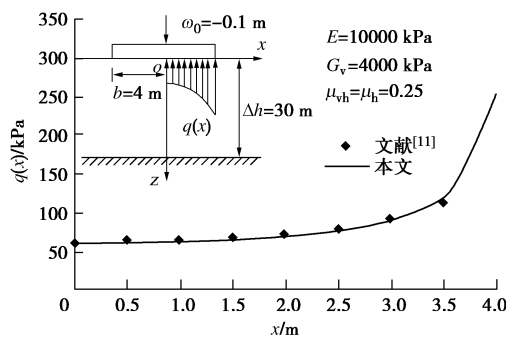


图3 与文献[11]的地基反力结果对比

Fig. 3 Comparison between calculated subgrade reactions and those by Reference [11]

为进一步验证本文理论的正确性, 取单层横观各向同性地基, 并与 ABAQUS 软件计算结果进行比较。算例条件为: 土层厚度 $\Delta h=30$ m, $E_v=10000$ kPa, $E_h=20000$ kPa, $G_v=4000$ kPa, $\mu_{vh}=\mu_h=0.25$; 刚性条形基础宽度 $2b=8$ m, 基础竖向位移 $\omega_0=-1.0$ m。具体比较见图4和图5。由图4和图5可见, 计算结果与 ABAQUS 所得的结果也很吻合。

本节计算结果一方面证明了理论的正确性, 同时也说明数值计算方法也能满足精度要求。

5.2 地基横观各向同性性质对地基反力的影响

此算例分析地基的水平弹性模量 E_h 与竖向弹性模量 E_v 的比值 n 对地基反力的影响。考虑到大多情况下, 土体的水平弹性模量要大于竖向弹性模量, 故分别令 $n=1, 2, 4$ 进行建模计算。该算例的其它条件均同5.1章节中的第二个算例, 地基反力结果见图6。

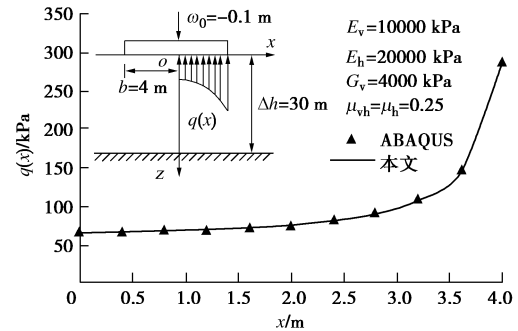


图4 与 ABAQUS 的地基反力结果对比

Fig. 4 Comparison between subgrade reactions and those by ABAQUS

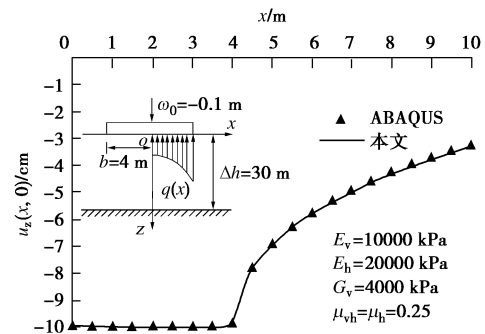


图5 与 ABAQUS 的地表位移结果对比

Fig. 5 Comparison between surface displacements and those by ABAQUS

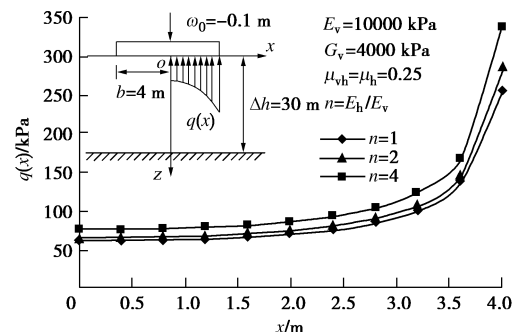


图6 n 对地基反力的影响

Fig. 6 Variation of subgrade reactions due to different values of n

由图6可以发现, 横观各向同性地基的地基反力在竖向弹性模量 E_v 保持不变的情况下, 随着水平弹性模量 E_h 的增加而增加。可见, 均匀各向同性地基模型不能全面有效地反映土体特性, 在地基基础方案设计时有必要考虑土体的横观各向同性性质。

5.3 地基成层性对地基反力的影响

此算例分析地基成层性对地基反力的影响。取三层横观各向同性地基, 其层与层之间剪切模量、泊松比和厚度均相同, 仅有弹性模量变化, 具体参数见表1。每层地基深度 $\Delta h=10$ m, 其它条件均同前。地基反力结果见图7。从图7可见, 上层土体的弹性模量对地基反力影响显著; 而且随着上层土体的弹性模量

增大,地基反力明显增大。由此说明,计算时考虑土的分层特性是很有必要的。

表 1 计算工况一览表

Table 1 List of different calculation cases (MPa)

工 况	土层一		土层二		土层三	
	E_{v1}	E_{h1}	E_{v2}	E_{h2}	E_{v3}	E_{h3}
1	15	30	10	20	5	10
2	5	10	10	20	15	30
3	5	10	10	20	5	10

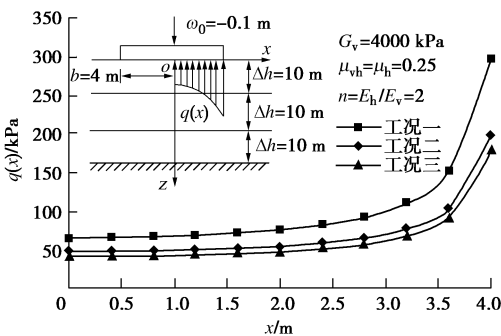


图 7 地基成层性对地基反力的影响

Fig. 7 Variation of subgrade reactions due to soil stratification

6 结 语

运用 Fourier 积分变换和 Cayley-Hamilton 定理推导出层状横观各向同性地基传递矩阵解;再利用基础与地基接触条件建立对偶积分方程,应用 Jacobi 正交多项式求解出地基反力。通过与文献和 ABAQUS 软件计算结果的比较,验证了本文理论的正确性。算例分析表明:土的横观各向同性性质和成层特性对地基反力有着明显的影响,在工程实践中对其加以考虑可以优化设计方案。

参考文献:

[1] 岳中琦, 王 仁. 多层横观各向同性弹性体静力学问题的解[J]. 北京大学学报(自然科学版), 1988, 24(2): 202 - 211. (YUE Zhong-qi, WANG Ren. Static solution for transversely isotropic elastic N-layered systems[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis (Nature Science), 1988, 24(2): 202 - 211. (in Chinese))

[2] 王林生. 用柔度矩阵递推法计算横观各向同性成层地基[J]. 河海大学学报, 1989, 17(2): 104 - 110. (WANG lin-sheng. Flexibility matrix recursion method to solve transversely isotropic multilayered soil[J]. Journal of Hohai University, 1989, 17(2): 104 - 110. (in Chinese))

[3] 陈光敬, 赵锡宏, 于 立. 传递矩阵法求解层状横观各向同性弹性体轴对称问题[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(5):105 - 108. (CHEN Guang-jing, ZHAO Xi-hong, YU Li.

Transferring matrix method to solve axisymmetric problems of layered cross-anisotropic elastic body[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, 20(5): 105 - 108. (in Chinese))

[4] 陈光敬, 赵锡宏, 于 立. 成层横观各向同性体非轴对称问题的解析解[J]. 同济大学学报, 1998, 26(5): 522 - 527. (CHEN Guang-jing, ZHAO Xi-hong, YU Li. Transferring matrix method for solutions of non-axisymmetric load applied to layered cross-anisotropic elastic body[J]. Journal of Tongji University, 1998, 26(5): 522 - 527. (in Chinese))

[5] 顿志林, 刘干斌, 茆向阳. 层状横观各向同性地基轴对称问题的位移解法[J]. 焦作工学院学报(自然科学版), 2002, 21(6): 420 - 426. (DUN Zhi-lin, LIU Gan-bin, CHANG Xiang-yang. Displacement function method of axisymmetrical problem with transversely isotropic layers[J]. Journal of Jiaozuo Institute of Technology(Natural Science), 2002, 21(6): 420 - 426. (in Chinese))

[6] 艾智勇, 成怡冲. 三维横观各向同性成层地基的传递矩阵解[J]. 岩土力学, 2010, 31(2): 26 - 30. (AI Zhi-yong, CHENG Yi-chong. Transfer matrix solutions of three-dimensional transversely isotropic multilayered soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(2): 26 - 30. (in Chinese))

[7] CHOW Y K. Vertical deformation of rigid foundations of arbitrary shape on layered soil media[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1987, 11(1): 1 - 15.

[8] 袁聚云, 孙祥波. 传递矩阵法分析中心荷载下对称刚性板地基沉降和反力[J]. 力学季刊, 2005, 26(2): 316 - 321. (YUAN Ju-yun, SUN Xiang-bo. Analysis of settlement and contact pressure of symmetric rigid plate on subgrade under central concentrated load with method of transferring matrix[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2005, 26(2): 316 - 321. (in Chinese))

[9] 艾智勇, 梅阿敏. 多层地基上轴对称受荷刚性圆板问题[J]. 力学季刊, 2008, 29(3): 425 - 429. (AI Zhi-yong, MEI A-min. Axisymmetric loaded rigid circular plate on multi-layered soil[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2008, 29(3): 425 - 429. (in Chinese))

[10] 李庆金. 饱和地基上条形基础的竖向振动特性分析[D]. 杭州: 浙江大学, 2005. (LI Qing-jin. Vertical vibration analysis of strip foundation on saturated soils[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2005. (in Chinese))

[11] MILOVIC D. Stresses and displacements for shallow foundations[M]. Amsterdam: Elsevier, 1992.