

DOI: 10.11779/CJGE201404008

桩筏结构复合地基中筏板受力分析的理论计算模型与试验研究

陈洪运¹, 马建林^{1*}, 陈红梅², 许再良³, 胡伟明¹

(1. 西南交通大学土木工程学院, 四川 成都 610031; 2. 华侨大学数学科学学院, 福建 泉州 362021;
3. 铁道第三勘察设计院集团有限公司, 天津 300142)

摘 要: 由于缺乏刚性桩复合地基之上筏板受力的合理计算公式, 目前中国高速铁路桩筏结构复合地基中筏板的设计计算仍采用简化算法, 其计算结果的准确合理性尚不满足要求, 为此拟对桩筏基础之上的筏板进行理论求解。选取桩筏结构中单桩作用的筏板区域作为求解单元, 将该单元结构视为位于单桩和 Winkler 弹性地基共同支撑的四边滑支 Reissner 矩形中厚板, 将 Reissner 矩形中厚板的基本方程导入 Hamilton 体系, 利用辛几何中的分离变量及本征函数展开等方法, 求出矩形中厚板弯曲问题的解析解, 进而可求得复合地基上筏板的内力、挠度、桩顶反力和桩间土压力等设计值。最后将现场试验实测值与理论模型解析解的计算结果进行对比, 结果采用文中理论模型计算得到的筏板弯矩、桩顶轴力及桩间土压应力等与现场实测结果吻合较好, 表明在桩筏结构复合地基的筏板设计中, 提出的理论模型是一种准确可靠的计算方法。

关键词: 桩筏结构复合地基; 筏板设计计算; Winkler 弹性地基; Reissner 矩形中厚板

中图分类号: TU47 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2014)04-0646-08

作者简介: 陈洪运(1984-), 男, 湖北鄂州人, 博士研究生, 主要从事高速铁路地基加固等方面的研究工作。E-mail: 278709407@qq.com。

Theoretical and experimental studies on forces acting on raft of pile-raft composite foundation

CHEN Hong-yun¹, MA Jian-lin¹, CHEN Hong-mei², XU Zai-liang³, HU Wei-ming¹

(1. School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 2. School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China; 3. 3rd Railway Survey and Design Group Co., Ltd., Tianjin 300142, China)

Abstract: At present, some simplified algorithms are still used in the design of pile-raft composite foundation of high-speed railway in China because of the lack of a reasonable formula. But their results can not meet the accuracy requirements. The theoretical solution to the raft is essentially studied. In order to get the analytical solution to the raft of the pile-raft foundation, the acting area of a single pile on the raft is selected as an element for solution. The element is regarded as a Reissner rectangular moderately thick plate with four edges shear free-clamped on the Winkler elastic foundation on piles. During calculation, the basic elasticity equation for Reissner rectangular moderately thick plates is transferred into the Hamiltonian system. By separation of variables in Symplectic geometry and characteristic function, the analytic solutions to the bending problems of the rectangular plates with medium and thick thickness can be obtained, and then the internal force, displacement, counter-force at pile top and pressure between the soils and the piles can be calculated. By comparing the measured values with the present analytical solutions, it is shown that the calculated moment of the raft, axial force and pressure between the soils and the piles agree with the measured values. The proposed method is proved to be reliable and can be adopted for the design of the pile-raft composite foundation.

Key words: pile-raft composite foundation; raft design; Winkler elastic foundation; Reissner rectangular moderately thick plate

0 引 言

为了满足高速铁路对沉降, 尤其是不均匀沉降控制的严苛要求, 高速铁路软土地基处理中常采用桩筏

基金项目: 铁道部京沪高速铁路科技重大专项项目(2008G032-A);
中央高校基金科研业务费专项资金专题研究项目(SWJT11ZT04)

收稿日期: 2013-08-31

*通讯作者

结构复合地基技术。

桩筏结构中的筏板受力分析是空间问题, 它涉及筏板上作用荷载、筏板抗弯、筏板下面复合地基中桩和桩间土的共同支撑问题。由于缺乏桩土复合地基之上筏板受力计算的合理公式, 现阶段在高速铁路桩筏结构中筏板的设计计算仍然采用简单方法, 其计算结果与实际情况存在很大偏差, 这样势必会影响计算结果的可靠性和合理性。

板的受力分析常借助于弹性理论, 而传统的弹性力学解法^[1-2]基于单类变量的拉格朗日体系, 通过消除未知量来方便求解, 结果导致偏微分方程阶次升高, 方程解析解的求解较为困难, 甚至无法求得解析解。求解时, 常选择三角级数及多项式作为试函数进行求解, 求解过程繁琐且无规律可循, 难度较大。

姚伟岸等^[3]、钟万勰^[4]将辛算法引入弹性力学问题的求解, 直接从板理论的基本方程出发, 将板弯曲问题导入到 Hamilton 体系中, 然后利用辛几何方法推导出板弯曲问题的解析解。由于求解过程直接从板弯曲的基本方程出发, 采用增元降阶的数学方法求出问题的解析解, 无须人为选定挠度试函数和微分方程特解, 使问题的求解更加理性化。基于该方法, 李锐^[5]对矩形薄、厚板在不同边界条件及振动情况下的 Hamilton 求解方法进行了较为系统的介绍, 同时提出“辛-叠加方法”对邻边自由矩形薄板、矩形悬臂薄板及弹性地基上的四边自由矩形薄板进行了解析解的求解。文献[6]构造了弹性地基上弹性矩形厚板的 Hamilton 正则方程, 但该文仅初步给出了正则方程, 并未进行后续解析解的求解。文献[7]针对双参数弹性地基上弹性矩形薄板问题, 对相关参数进行转换, 成功构造了相应的 Hamilton 正则方程, 进行了求解。

基于上述已有研究成果, 结合工程实际, 采用辛算法, 对高速铁路路基加固中常用的桩筏结构复合地基中筏板的受力及变形特性进行分析、求解, 并将理论解与现场实测数据进行了对比分析, 为高速铁路桩筏结构复合地基中筏板的设计提供合理可靠的计算方法。

1 筏板解析解的求解

1.1 分析方法

高速铁路中桩筏结构复合地基的加固宽度一般较宽, 可达 30 m 左右, 且沿纵向延伸。针对这一结构特点, 认为加固区域中心线附近的桩筏结构受外界边界的影响较小, 可以忽略。故可将位于中心线附近的桩筏单格结构的受力特点视为无穷大板中单格结构的受

力, 建立如图 1 所示计算模型。

为使问题便于求解, 对基于工程实际问题所建立的这一理论模型进行如下假设:

- (1) 筏板单元模型取为 Reissner 矩形中厚板, 为小挠度弹性变形。
- (2) 地基模型选用 Winkler 弹性地基模型。
- (3) 桩顶反力简化为集中荷载。
- (4) 根据无穷大板中单格结构的受力特性, 将所取的位于路基中心附近的单元板格的四边边界条件定义为滑支支撑。
- (5) 作用在单元板格上的荷载为均布荷载。

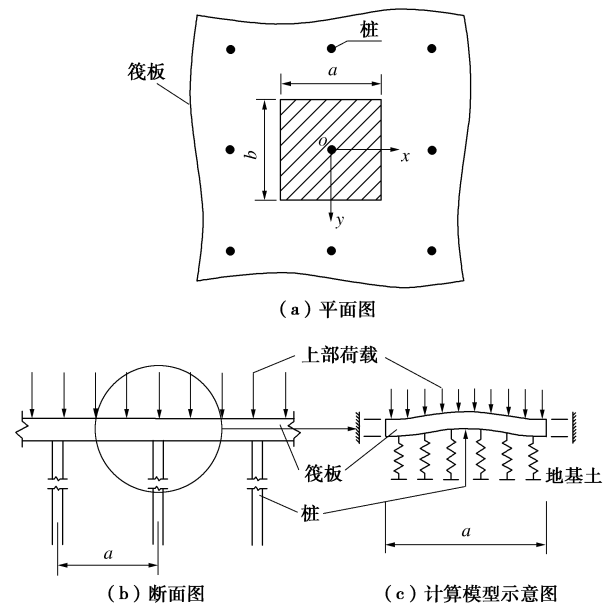


图 1 筏板受力变形示意图

Fig. 1 Sketch of a typical element

理论求解的技术路线如下:

分别对均布荷载及桩顶集中荷载作用下弹性地基筏板的解析解进行求解, 得到均布荷载与集中荷载作用下筏板的挠度方程。

根据筏板变形的控制条件可知, 在上部荷载和桩、桩间土共同作用下, 对筏板进行受力分析与变形计算时, 不考虑整个桩筏结构的沉降问题, 桩顶处的筏板受力变形挠度值应该为零, 故令桩顶集中荷载与均布荷载在桩顶的挠度叠加值为零。

通过已知的均布荷载值, 反求出桩顶的集中反力, 之后叠加集中荷载与均布荷载的解析解, 即得桩筏基础中筏板的解析解。

1.2 集中荷载作用下 Hamilton 体系的辛本征解

针对 Reissner 厚板弯曲的基本方程, 胡海昌^[8]通过引入满足方程 (1) 的两个位移函数 F 和 Ψ 进行了改进, 将该问题的求解归结为求解函数 F 和 Ψ , 使计

算求解得到了简化。

$$\begin{cases} D\nabla^2\nabla^2 F = q \\ \nabla^2\Psi - \frac{2C}{D(1-\nu)}\Psi = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

式中, q 为作用于筏板上的外力。 $C = 5Eh/12(1+\nu)$ 为筏板的抗剪切刚度, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 为筏板的抗弯刚度; h 为筏板厚, E 为筏板的弹性模量, ν 为筏板的泊松比。

采用这种方法, 板挠度 w 、变形前垂直于中平面的直线段于变形后在 xz 面内的转角 φ_x 及 yz 面内的转角 φ_y 这 3 个广义位移可用函数 F 、 Ψ 表示如下:

$$\begin{cases} w = F - \frac{D}{C}\nabla^2 F, \\ \varphi_x = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \varphi_y = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{cases} \quad (2)$$

在此改进方法的基础上, 曲庆璋等^[9]得到了用函数 F 和 Ψ 表示的 Winkler 弹性地基上矩形中厚板的静力平衡方程为

$$\begin{cases} \nabla^2\nabla^2 F - \frac{k}{C}\nabla^2 F + \frac{k}{D}F = \frac{q}{D} \\ \nabla^2\Psi - \frac{2C}{D(1-\nu)}\Psi = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

式中, k 为地基反力系数。

板的各内力可表示为

$$\begin{cases} M_x = -D\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (1-\nu)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\partial y}\right] \\ M_y = -D\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - (1-\nu)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\partial y}\right] \\ M_{xy} = -D(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)\right] \\ Q_x = -D\left[\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 F) + \frac{C}{D}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right] \\ Q_y = -D\left[\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 F) - \frac{C}{D}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right] \end{cases} \quad (4)$$

四边滑支板的边界条件为

$$\begin{cases} x\text{方向: } \varphi_x|_{x=\pm\frac{a}{2}} = 0, M_{xy}|_{x=\pm\frac{a}{2}} = 0, Q_x|_{x=\pm\frac{a}{2}} = 0 \\ y\text{方向: } \varphi_y|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0, M_{xy}|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0, Q_y|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

根据该边界条件, 将各位移及内力函数代入式 (5), 求解易得 $\Psi = 0$ 。从而可对相关参数进行简化, 广义位移为

$$\begin{cases} w = F - \frac{D}{C}\nabla^2 F, \\ \varphi_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \\ \varphi_y = \frac{\partial F}{\partial y}. \end{cases} \quad (6)$$

板的弯矩为

$$\begin{cases} M_x = -D\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \\ M_y = -D\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) \end{cases} \quad (7)$$

由式 (7) 可得

$$\begin{aligned} M_x + M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) \\ &= -D(1+\nu)\nabla^2 F, \end{aligned} \quad (8)$$

令 $M = -\frac{M_x + M_y}{D(1+\nu)}$, 式 (8) 可表示为

$$\nabla^2 F = M, \quad (9)$$

将式 (9) 代入式 (3) 有

$$\nabla^2 M - \frac{k}{C}M + \frac{k}{D}F = \frac{q}{D}, \quad (10)$$

令 $\frac{\partial F}{\partial y} = \alpha$, $N = \frac{D}{k}M$, $\frac{\partial N}{\partial y} = -\frac{D}{k}\beta$ 。则可得到

Hamilton 对偶方程为

$$\partial Z / \partial y = HZ + f, \quad (11)$$

式中, $Z = [F \ N \ \alpha \ \beta]^T$, $f = [0 \ 0 \ 0 \ -q/D]^T$ 。

Hamilton 算子矩阵 $H = \begin{bmatrix} Q & A \\ B & -Q^T \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{k} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{k}{D} \\ \frac{k}{D} & \frac{k}{D}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{k}{C}\right) \end{bmatrix}。$$

要求解方程 (11), 必须先求解其齐次方程

$$\partial Z / \partial y = HZ \quad (12)$$

在辛空间内分离变量得到

$$HX(x) = \mu X(x), \quad (13)$$

式中, $X(x) = [F(x), N(x), \alpha(x), \beta(x)]^T$ 为本征向量; μ 为待求本征值。

式 (13) 的特征方程的根为 $\lambda = \pm\xi, \pm\eta$, 其中

$$\begin{cases} \xi = \sqrt{\frac{\left(\frac{k}{C} - 2\mu^2\right) + \sqrt{\left(\frac{k}{C}\right)^2 - 4\frac{k}{D}}}{2}} \\ \eta = \sqrt{\frac{\left(\frac{k}{C} - 2\mu^2\right) - \sqrt{\left(\frac{k}{C}\right)^2 - 4\frac{k}{D}}}{2}} \end{cases} \quad (14)$$

结合所需要解决的实际问题的结构对称特征, 取关于 y 轴对称变形的本征向量 $X(x)$ 的解为

$$\begin{cases} F(x) = B_F \operatorname{ch}(\xi x) + L_F \operatorname{ch}(\eta x) \\ N(x) = B_N \operatorname{ch}(\xi x) + L_N \operatorname{ch}(\eta x) \\ \alpha(x) = B_\alpha \operatorname{ch}(\xi x) + L_\alpha \operatorname{ch}(\eta x) \\ \beta(x) = B_\beta \operatorname{ch}(\xi x) + L_\beta \operatorname{ch}(\eta x) \end{cases} \quad (15)$$

将式 (15) 代入式 (13), 得到各常数之间的关系

$$\begin{cases} B_N = \frac{\frac{k}{C} + \sqrt{\left(\frac{k}{C}\right)^2 - 4\frac{k}{D}}}{2\frac{k}{D}} B_F, L_N = \frac{\frac{k}{C} - \sqrt{\left(\frac{k}{C}\right)^2 - 4\frac{k}{D}}}{2\frac{k}{D}} L_F, \\ \mu B_F = B_\alpha, \mu L_F = L_\alpha, \mu B_N = -\frac{D}{k} B_\beta, \mu L_N = -\frac{D}{k} L_\beta. \end{cases} \quad (16)$$

将式 (15)、(16) 代入式 (5) 中 x 方向的边界条件, 并令方程系数行列式为零, 即得到滑支边矩形中厚板对称变形的本征值超越方程

$$\xi \eta \operatorname{sh}(\xi a/2) \operatorname{sh}(\eta a/2) = 0 \quad (17)$$

求解式 (17), 得到各本征值 μ_i 和 μ_{ni} ($i=1, 2, 3, 4, n=2, 4, 6, \dots$)

$$\begin{cases} \mu_1 = \sqrt{\frac{\frac{k}{C} + \sqrt{\left(\frac{k}{C}\right)^2 - 4\frac{k}{D}}}{2}}, \mu_2 = -\sqrt{\frac{\frac{k}{C} + \sqrt{\left(\frac{k}{C}\right)^2 - 4\frac{k}{D}}}{2}} \\ \mu_3 = \sqrt{\frac{\frac{k}{C} - \sqrt{\left(\frac{k}{C}\right)^2 - 4\frac{k}{D}}}{2}}, \mu_4 = -\sqrt{\frac{\frac{k}{C} - \sqrt{\left(\frac{k}{C}\right)^2 - 4\frac{k}{D}}}{2}} \\ \mu_{n1} = \sqrt{\frac{\left(\frac{k}{C} + 2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right) + \sqrt{\left(\frac{k}{C}\right)^2 - 4\frac{k}{D}}}{2}} \\ \mu_{n2} = -\sqrt{\frac{\left(\frac{k}{C} + 2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right) + \sqrt{\left(\frac{k}{C}\right)^2 - 4\frac{k}{D}}}{2}} \\ \mu_{n3} = \sqrt{\frac{\left(\frac{k}{C} + 2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right) - \sqrt{\left(\frac{k}{C}\right)^2 - 4\frac{k}{D}}}{2}} \\ \mu_{n4} = -\sqrt{\frac{\left(\frac{k}{C} + 2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right) - \sqrt{\left(\frac{k}{C}\right)^2 - 4\frac{k}{D}}}{2}} \end{cases} \quad (18)$$

其对应的基本本征向量为

$$\begin{cases} X_i(x) = [1, D\mu_i^2/k, \mu_i, -\mu_i^3]^T \\ X_{ni}(x) = [1, D\mu_i^2/k, \mu_{ni}, -\mu_{ni}\mu_i^2]^T \cos(n\pi x/a) \end{cases} \quad (19)$$

设非齐次方程 (11) 的解为

$$Z = X(x)Y(y) \quad (20)$$

式中, $X(x) = [X_i(x), \dots, X_{ni}(x)]$, $Y(y) = [Y_i(y), \dots, Y_{ni}(y)]^T$ 。

将式 (20) 代入式 (11) 得

$$X(x) \frac{dY(y)}{dy} = HX(x)Y(y) + \begin{bmatrix} 0, 0, 0, -\frac{q}{D} \end{bmatrix}^T \quad (21)$$

由式 (11) 可知

$$HX(x) = X(x)M \quad (22)$$

式中, $M = \operatorname{diag}(P_n, \dots, Q_n, \dots)$, $P_n = \operatorname{diag}(\mu_i)$, $Q_n = \operatorname{diag}(\mu_{ni})$ 。

将式 (21) 的非齐次项按辛本征向量展开, 令

$$\begin{bmatrix} 0, 0, 0, -q/D \end{bmatrix}^T = X(x)G \quad (23)$$

式中, $G = [g_i, \dots, g_{ni}]^T$ 为展开系数阵列。

将式 (22)、(23) 代入式 (21), 得

$$dY(y)/dy = MY(y) + G \quad (24)$$

由此得到一组常微分方程

$$\begin{cases} dY_i(y)/dy - \mu_i Y_i = g_i \\ dY_{ni}(y)/dy - \mu_{ni} Y_{ni} = g_{ni} \end{cases} \quad (25)$$

对式 (23) 两边同乘以 $X^T J$ 并积分, 可得到

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} X(x)^T J X(x) G dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} X(x)^T \begin{bmatrix} 0, -q/D, 0, 0 \end{bmatrix}^T dx \quad (26)$$

利用共轭辛正交关系展开式 (26) 解 G 中各元素。在集中荷载 P 作用下, 本文研究问题关于 y 轴对称, 得

$$\begin{cases} g_i = \frac{\mu_i^2}{2a\mu_i(D\mu_i^4 - k)} P\delta(y - y_0) \\ g_{ni} = \frac{\mu_i^2}{a\mu_{ni}(D\mu_i^4 - k)} P\delta(y - y_0) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x_0\right) \end{cases} \quad (27)$$

考虑集中荷载 P 作用在坐标原点, 将式 (27) 化简, 代入式 (25), 求解得

$$\begin{cases} Y_i = c_i e^{\mu_i y} + \frac{\mu_i}{2a(D\mu_i^4 - k)} P e^{\mu_i y} H(y) \\ Y_{ni} = c_{ni} e^{\mu_{ni} y} + \frac{\mu_i^2}{2a\mu_{ni}(D\mu_i^4 - k)} P e^{\mu_{ni} y} H(y) \end{cases} \quad (28)$$

式中, c_i 和 c_{ni} 为待定常数, 由板在 y 方向的边界条件确定; $\varepsilon(y)$ 为单位阶跃函数, 表达式如下

$$\varepsilon(y) = \begin{cases} 1 & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \quad (29)$$

将式 (19)、(28) 代入式 (20), 利用式 (5) 中

四边滑支板在 y 方向的边界条件可以求出待定常数 c_i 和 c_{ni} 为

$$\left\{ \begin{aligned} c_1 &= -\frac{e^{\frac{b}{2}\mu_1}}{4\operatorname{sh}\left(\mu_1\frac{b}{2}\right)}\frac{\mu_1}{a(D\mu_1^4-k)}P \\ c_2 &= -\frac{1}{e^{\frac{b}{2}\mu_1}4\operatorname{sh}\left(\mu_1\frac{b}{2}\right)}\frac{\mu_1}{a(D\mu_1^4-k)}P \\ c_3 &= -\frac{e^{\frac{b}{2}\mu_3}}{4\operatorname{sh}\left(\mu_3\frac{b}{2}\right)}\frac{\mu_3}{a(D\mu_3^4-k)}P \\ c_4 &= -\frac{1}{e^{\frac{b}{2}\mu_3}4\operatorname{sh}\left(\mu_3\frac{b}{2}\right)}\frac{\mu_3}{a(D\mu_3^4-k)}P \\ c_{n1} &= -\frac{e^{\frac{b}{2}\mu_{n1}}}{4\operatorname{sh}\left(\mu_{n1}\frac{b}{2}\right)}\frac{\mu_1^2}{a\mu_{n1}(D\mu_1^4-k)}P \\ c_{n2} &= -\frac{1}{e^{\frac{b}{2}\mu_{n1}}4\operatorname{sh}\left(\mu_{n1}\frac{b}{2}\right)}\frac{\mu_1^2}{a\mu_{n1}(D\mu_1^4-k)}P \\ c_{n3} &= -\frac{e^{\frac{b}{2}\mu_{n3}}}{4\operatorname{sh}\left(\mu_{n3}\frac{b}{2}\right)}\frac{\mu_3^2}{a\mu_{n3}(D\mu_3^4-k)}P \\ c_{n4} &= -\frac{1}{e^{\frac{b}{2}\mu_{n3}}4\operatorname{sh}\left(\mu_{n3}\frac{b}{2}\right)}\frac{\mu_3^2}{a\mu_{n3}(D\mu_3^4-k)}P \end{aligned} \right. \quad (30)$$

将 c_i 和 c_{ni} 表达式 (28) 代回式得到 $Y(y)$, 再由式 (20) 即得到状态向量 Z 中各分量的解析表达式。

其中 F 的表达式见式 (31); 基于 F 的表达式, 集中荷载作用下位于 Winkler 地基上的 Reissner 板的挠度 w_p 可通过式 (6) 得到, 见式 (32); 弯矩 M_y 可结合式 (7) 得到, 见式 (33); 同理可得到其他待求参数的表达式。

$$F = -\frac{P\mu_1}{2\operatorname{sh}\left(\mu_1\frac{b}{2}\right)a(D\mu_1^4-k)}\operatorname{ch}\left[\mu_1\left(\frac{b}{2}+y\right)\right] + \frac{\mu_1}{a(D\mu_1^4-k)}P\varepsilon(y)\operatorname{sh}(\mu_1y) - \frac{P\mu_3}{2\operatorname{sh}\left(\mu_3\frac{b}{2}\right)a(D\mu_3^4-k)}\operatorname{ch}\left[\mu_3\left(\frac{b}{2}+y\right)\right] + \frac{\mu_3}{a(D\mu_3^4-k)}P\varepsilon(y)\operatorname{sh}(\mu_3y) + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left\{\begin{aligned} &-\frac{P\mu_1^2}{2\operatorname{sh}\left(\mu_{n1}\frac{b}{2}\right)a\mu_{n1}(D\mu_1^4-k)}\operatorname{ch}\left[\mu_{n1}\left(\frac{b}{2}+y\right)\right] + \\ &\frac{\mu_1^2}{a\mu_{n1}(D\mu_1^4-k)}P\varepsilon(y)\operatorname{sh}(\mu_{n1}y) \\ &-\frac{P\mu_3^2}{2\operatorname{sh}\left(\mu_{n3}\frac{b}{2}\right)a\mu_{n3}(D\mu_3^4-k)}\operatorname{ch}\left[\mu_{n3}\left(\frac{b}{2}+y\right)\right] + \\ &\frac{\mu_3^2}{a\mu_{n3}(D\mu_3^4-k)}P\varepsilon(y)\operatorname{sh}(\mu_{n3}y) \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

$$w_p = \frac{P}{aD\sqrt{\left(\frac{k}{C}\right)^2 - 4\frac{k}{D}}}\left\{\begin{aligned} &\left[\frac{1-\frac{D}{C}\mu_1^2}{\mu_1}\left\{-\frac{\operatorname{ch}\left[\mu_1\left(\frac{b}{2}+y\right)\right]}{2\operatorname{sh}\left(\mu_1\frac{b}{2}\right)} + \varepsilon(y)\operatorname{sh}(\mu_1y)\right\} - \frac{1-\frac{D}{C}\mu_3^2}{\mu_3}\left\{-\frac{\operatorname{ch}\left[\mu_3\left(\frac{b}{2}+y\right)\right]}{2\operatorname{sh}\left(\mu_3\frac{b}{2}\right)} + \varepsilon(y)\operatorname{sh}(\mu_3y)\right\}\right] \\ &+ \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\left\{\begin{aligned} &\left[\frac{1-\frac{D}{C}\mu_1^2}{\mu_{n1}}\left\{-\frac{\operatorname{ch}\left[\mu_{n1}\left(\frac{b}{2}+y\right)\right]}{2\operatorname{sh}\left(\mu_{n1}\frac{b}{2}\right)} + \varepsilon(y)\operatorname{sh}(\mu_{n1}y)\right\}\right] \\ &-\frac{1-\frac{D}{C}\mu_3^2}{\mu_{n3}}\left\{-\frac{\operatorname{ch}\left[\mu_{n3}\left(\frac{b}{2}+y\right)\right]}{2\operatorname{sh}\left(\mu_{n3}\frac{b}{2}\right)} + \varepsilon(y)\operatorname{sh}(\mu_{n3}y)\right\} \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

$$M_y = -D \left[\begin{aligned} &c_1 \mu_1^2 e^{\mu_1 y} + c_2 \mu_1^2 e^{-\mu_1 y} + c_3 \mu_3^2 e^{\mu_3 y} + c_4 \mu_3^2 e^{-\mu_3 y} + \frac{\mu_1^2 \mu_1}{a(D\mu_1^4 - k)} P \varepsilon(y) \operatorname{sh}(\mu_1 y) + \frac{\mu_3^2 \mu_3}{a(D\mu_3^4 - k)} P \varepsilon(y) \operatorname{sh}(\mu_3 y) + \\ &\sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \left[c_{n1} \mu_{n1}^2 e^{\mu_{n1} y} + c_{n2} \mu_{n1}^2 e^{-\mu_{n1} y} + c_{n3} \mu_{n3}^2 e^{\mu_{n3} y} + c_{n4} \mu_{n3}^2 e^{-\mu_{n3} y} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\mu_{n1}^2 \mu_{n1}^2}{a \mu_{n1} (D\mu_{n1}^4 - k)} P \varepsilon(y) \operatorname{sh}(\mu_{n1} y) + \frac{\mu_{n3}^2 \mu_{n3}^2}{a \mu_{n3} (D\mu_{n3}^4 - k)} P \varepsilon(y) \operatorname{sh}(\mu_{n3} y) \right] + \\ &\left. v \left\{ -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \left[\frac{\mu_1^2}{a \mu_{n1} (D\mu_1^4 - k)} P \varepsilon(y) \operatorname{sh}(\mu_{n1} y) + \frac{\mu_3^2}{a \mu_{n3} (D\mu_3^4 - k)} P \varepsilon(y) \operatorname{sh}(\mu_{n3} y) \right] \right\} \right] \end{aligned} \right] \quad (33)$$

1.3 桩筏基础中筏板解析解的求解

在均布荷载 q_0 作用下, 位于 Winkler 弹性地基上的四边滑支矩形板在弹性小变形范围内的挠度为 $w_q = q_0 / k$ 。

基于位移叠加原理, 易知桩筏基础筏板的挠度 $w = w_p + w_q$ 。根据工程实际情况可知, 桩顶挠度 $w_{(0,0)} = 0$, 即可反求出桩顶集中荷载 P , 将该值代入筏板的挠度方程, 即得到筏板挠度的最终解。获得了集中荷载的值, 筏板的弯矩、剪力等值也就容易得出了。

2 现场试验对比验证分析

根据上面均布荷载作用下桩筏结构基础受力模型的理论分析方法, 结合工程实例^[10-12], 对解析解进行验证。

2.1 工程概况

京沪高速铁路 CFG 桩复合地基李窑试验段位于河北青县, 属冀鲁平原区近海冲击平原, 地层主要为第四系全新统冲积层(Q_4^{al})、第四系全新统海积层(Q_4^{m})、第四系上更新统冲积层(Q_3^{al}), 土层为松软—中等压缩性的深厚松软土层。主要土层情况见表 1。

表 1 试验场地土层情况

Table 1 Parameters of in-situ soils

名称	厚度/m	描述	平均压缩模量/MPa
黏土	0~1.5	黄褐色, 可塑	4.6
粉质黏土	7.0~12.0	黄褐色—灰褐色, 软塑—可塑, 饱和	4.9
粉土	8.0~12.5	黄褐色、黑灰色, 中密—密实	7.6
粉砂	0.7~8.0	灰黑色, 稍密—中密, 饱和	13.9
细砂	0.6~11.7	黄褐色—浅黄色, 中密—密实	19.7
粉质黏土	1.3~14.7	黄褐色, 可塑—硬塑, 饱和	6.4
粉土	—	黄褐色、黑灰色, 中密—密实	7.6

试验段是京沪高速铁路正线工程, 处于天津特大桥与青沧特大桥之间, 地形平坦, 地势开阔, 线路以填方通过, 路堤填高 7 m, 预压土高 3.5 m。在预压土

静置期间, 路基中心线处的上部最大荷载 $q_0 = 217.8 \text{ kPa}$ 。

软土地基采用 CFG 桩桩筏结构复合地基进行加固处理, 加固宽度 32.4 m, 加固试验段长 200 m。桩径 $d = 0.5 \text{ m}$, 正方形布桩, 桩间距 $a = b = 1.8 \text{ m}$, 桩顶设 0.15 m 厚碎石垫层, 其上为钢筋混凝土筏板。钢筋混凝土筏板的厚度 $h = 0.5 \text{ m}$, 采用 C30 混凝土现浇, @20 cm \varnothing 2 cm 上下两层配筋, 混凝土保护层厚度为 8 cm。

2.2 现场试验

在该试验段埋设了多种类型的元器件, 针对筏板弯矩、桩身轴力、桩土应力等内容, 完成了预压土堆载、静置及卸载全过程的长期监测。

在筏板的四桩中心位置, 沿主筋走向在筏板的上下两层钢筋中安装了钢筋计, 对相应位置处的钢筋受力进行了监测 (图 2)。

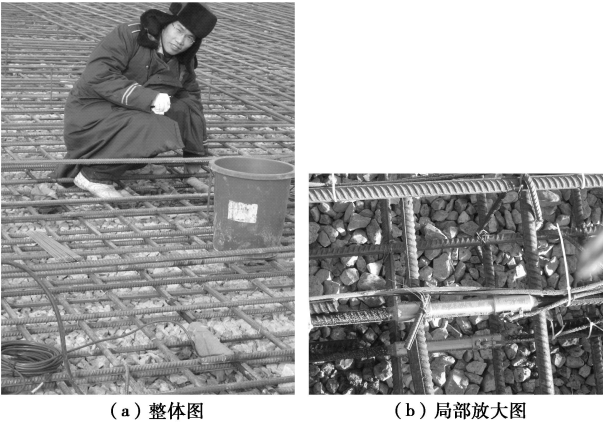


图 2 钢筋计安装

Fig. 2 Installation of extensometer

通过钢筋计测得钢筋应力, 进行换算即得到相应的弯矩。

筏板四桩中心处的弯矩随荷载及时间的变化情况如图 3 所示, 取静置期间相对稳定实测平均值, 为 25.41 kN·m/m。

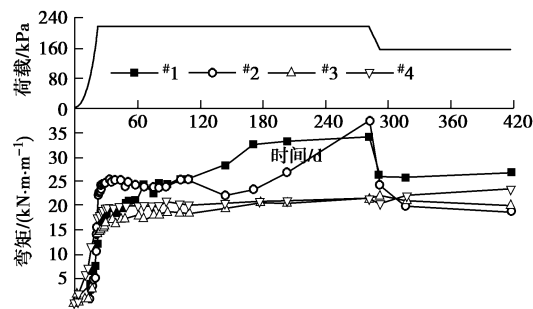


图 3 弯矩 - 荷载 - 时程图

Fig. 3 Curves for bending moment - load - time

试验中沿 CFG 桩桩身不同深度处安装智能混凝土应变计, 监测 CFG 桩桩身应变(轴力)的变化情况, 混凝土应变计安装如图 4 所示。



(a) 放入混凝土应变计 (b) 孔内注浆

图 4 混凝土应变计安装

Fig. 4 Strain gauges installed

通过现场试验段混凝土应变计监测到的 CFG 桩桩身应变数据, 换算得到桩身轴力, 不同深度处的桩身轴力随荷载及时间的变化情况如图 5 所示。

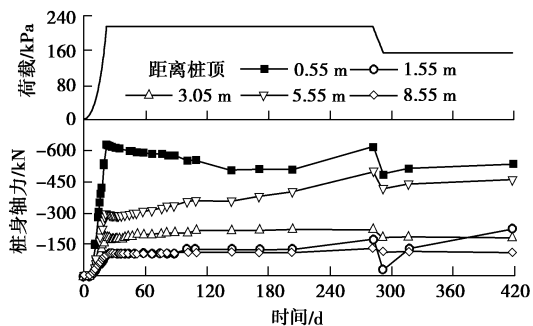


图 5 桩身轴力 - 荷载 - 时程曲线

Fig. 5 Curves of axial force of pile - load - time

分析监测结果得知, 桩身轴力最大值在桩顶处, 桩顶轴力为 510.45 kN。

2.3 对比验证

根据试验段现场实际情况, 取钢筋混凝土板的弹性模量 $E=3\times10^7$ kN/m², 泊松比 $\nu=0.2$ 。褥垫层的主要作用是在筏板与桩、桩间土之间传递、分配和协

调上部荷载及其作用效应的。在文中, 褥垫层效应是依据现场试验的结果, 通过地基反力系数 k 值加以考虑的。在综合考虑褥垫层效应的实际情况后, 取地基反力系数 $k=300$ MN/m³。

基于试验段现场实际参数及解析解计算式 (32) 及计算式 (33) 得, 四桩中心 ($a/2, b/2$) 处弯矩的理论数值解为 23.02 kN·m/m, 桩顶轴力的理论数值解为 624.67 kN。

将预压土静置期间的相关稳定测值与解析解所得结果进行对比见表 2。

表 2 实测值与计算值的对比

Table 2 Comparison between calculated and measured values

四桩中心处弯矩/(kN·m·m ⁻¹)			桩顶轴力/kN		
实测值	计算值	相对误差	实测值	计算值	相对误差
25.41	23.02	-9.41%	510.45	624.67	22.38%

由表 2 可以看出, 实测值与理论计算值较为接近, 计算结果可供相关工程参考应用。

3 结 论

针对高速铁路等工程领域中已大量采用的桩筏结构地基加固形式和桩 - 筏结构中筏板受力变形计算缺乏可靠方法的实际情况, 推求了桩筏结构中筏板受力变形计算的理论解析解答, 得到如下结论:

(1) 根据桩筏结构中筏板受上部荷载、下部受桩和桩间土共同支撑的结构特点, 采用 Reissner 矩形中厚板理论及 Winker 弹性地基模型构建理论计算模型, 基于 Hamilton 体系, 应用位移叠加原理, 进行了解析解的求解。

(2) 利用上述理论的解析解, 可计算桩筏结构中筏板的内力、绕曲变形以及桩顶轴力和桩间土压力, 为桩 - 筏结构的设计提供了新的计算方法。

(3) 通过现场试验对解析解开展了对比分析。结果表明, 理论解理论值与现场实测值吻合良好, 满足工程设计的要求, 从而解析解的合理可靠性得到了验证。

参考文献:

[1] TIMOSHENKO S, WOINOWSKY-KRIEGER S. Theory of plates and shells[M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1959.

[2] 石小平, 姚祖康. 弹性地基上四边自由矩形厚板的解[J]. 河北工学院学报, 1985(1): 54 - 72. (SHI Xiao-ping, YAO Zu-kang. The solution of a rectangular thick plate with free edges on an elastic foundation[J]. Journal of Hebei Institute of Technology, 1985(1): 54 - 72. (in Chinese))

[3] 姚伟岸, 钟万勰. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社,

2002. (YAO Wei-an, ZHONG Wan-xie. Symplectic elasticity [M]. Beijing: Higher Education Press, 2002. (in Chinese))
- [4] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995. (ZHONG Wan-xie. A new systematic methodology for theory of elasticity[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995. (in Chinese))
- [5] 李锐. 矩形板问题的 Hamilton 求解方法[D]. 大连: 大连理工大学, 2012. (LI Rui. Hamiltonian solution approach for the problems of rectangular plates[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2012. (in Chinese))
- [6] 钟阳, 赵晓雷. 弹性矩形板问题的 Hamilton 正则方程[J]. 力学与实践, 2004, **26**(6): 49 - 51. (ZHONG Yang, ZHAO Xiao-lei. The canonical Hamiltonian representation for elastic rectangular plate[J]. Mechanics in Engineering, 2004, **26**(6): 49 - 51. (in Chinese))
- [7] 钟阳, 张永山. 弹性地基上矩形薄板问题的 Hamilton 正则方程及解析解[J]. 固体力学学报, 2005, **26**(3): 325 - 328. (ZHONG Yang, ZHANG Yong-shan. Hamilton canonical equations and the analytical solution for rectangular thin plate on elastic foundation[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2005, **26**(3): 325 - 328. (in Chinese))
- [8] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981. (HU Hai-chang. Variational principle in elasticity and applications[M]. Beijing: Science Press, 1981. (in Chinese))
- [9] 曲庆璋, 章权, 季求知, 等. 弹性板理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000. (QU Qing-zhang, ZHANG Quan, JI Qiu-zhi, et al. Elastic plate theory[M]. Beijing: China Communications Press, 2000. (in Chinese))
- [10] 肖启航. 高速铁路 CFG 桩复合地基的沉降特性研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2010. (XIAO Qi-hang. Analysis of CFG pile composite foundation settlement character of high-speed railway[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2010. (in Chinese))
- [11] 李峰. 高速铁路 CFG 桩筏结构中桩土相互作用的研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2010. (LI Feng. Study of pile-soil interaction about CFG pile-raft structure in high-speed railway[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2010. (in Chinese))
- [12] 赵国堂, 马建林, 彭声应, 等. 高速铁路 CFG 桩不同结构形式下地基沉降-时间发展规律的试验研究与预测[J]. 铁道建筑, 2009(7): 62 - 65. (ZHAO Guo-tang, MA Jian-lin, PENG Sheng-ying, et al. Experimental study and prediction on evolution law of foundation settlement with time under different structural forms of CFG pile for high speed railway[J]. Railway Engineering, 2009(7): 62 - 65. (in Chinese))