

DOI: 10.11779/CJGE201404002

基于可行弧内点算法的上限有限单元法优化求解

赵明华, 张 锐, 雷 勇

(湖南大学岩土工程研究所, 湖南 长沙 410082)

摘 要: 上限有限单元法将寻找机动相容速度场的问题转化为一个数学规划问题, 克服了人为构造机动相容速度场的困难, 在复杂工程问题中具有广阔的应用前景。基于非线性规划的上限有限单元法, 可避免对屈服函数的线性化处理, 大大地减少了优化变量数, 同时可节约大量存储空间, 但由此产生的非线性规划模型十分复杂。为此, 在引入一种非线性上限规划模型的基础上, 探讨基于可行弧内点算法对其进行优化求解的步骤。首先, 采用 BFGS 公式对屈服函数的 Hessian 矩阵进行迭代, 避免了计算过程中该矩阵病态的问题; 其次, 通过构造可行弧, 克服了当迭代点到达非线性约束边界时搜索步长过短的问题; 最后, 采用 Wolfe 非精确搜索技术进行线性搜索, 提高了步长搜索效率。通过 MATLAB 编程进行算例分析表明, 基于可行弧内点算法的非线性上限有限单元法, 计算效率高、计算误差小、数值稳定性好, 可以适应大部分土体稳定性分析计算。

关键词: 极限分析上限法; 有限单元法; 非线性规划; 可行弧内点算法

中图分类号: TU43; O24

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2014)04-0604-08

作者简介: 赵明华(1956-), 男, 湖南洞口县人, 教授, 博士生导师, 主要从事桩基及软土地基处理研究。E-mail: mhzhahd@21cn.com。

Optimization of upper bound finite element method based on feasible arc interior point algorithm

ZHAO Ming-hua, ZHANG Rui, LEI Yong

(Geotechnical Engineering Institute of Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: The upper bound finite element method converts the problem of finding a kinematic admissible velocity field into a mathematical programming one, which can overcome the difficulty of artificially constructing a kinematic velocity field, thus, it has a broad prospect in applications to complex problems. The formulation of the upper bound finite element method based on nonlinear programming can avoid linearization of yield functions, as a result, it greatly reduces the optimization variables and saves a great deal of memory space. However, this leads to a nonlinear programming model that is quite complex. By introducing a nonlinear upper bound programming model, the steps for its optimization using feasible arc interior point algorithm are discussed. Firstly, the BFGS formula is taken as the updating rules for Hessian of yield functions to avoid the ill-conditioning problem in computation. Secondly, by constructing a feasible arc, the shortcoming of a too short step when the current iteration point reaches the nonlinear constraint boundary is overcome. Finally, the Wolfe's line search technique is used for step-length search which enhances the line search efficiency. Example analysis by MATLAB programming shows that the proposed method is highly efficient, numerically stable and accurate enough for engineering practice, thus, it is applicable to most soil stability problems.

Key words: upper bound limit analysis; finite element method; nonlinear programming; feasible arc interior point algorithm

0 引 言

极限分析上限法是岩土工程中一种常用的稳定性分析方法, 可用于求解地基承载力、挡土墙土压力和边坡稳定性等问题^[1-2]。上限法的实现通常包括两种途径: 一是传统的上限分析解析法^[2], 即通过人为构造机动相容的速度场, 然后对该速度场的几何参数等进行优化, 从而得到极限荷载的解析表达式; 二是上限

有限单元法^[3-10], 即利用有限单元对连续体进行离散化, 通过建立合适的数学规划模型, 利用计算机自动搜索出连续体破坏时的速度场与极限荷载。

对于简单问题, 上限分析解析法因概念明确、直观明了, 而具有特定的优势^[2]。但对于实际工程中常

基金项目: 国家自然科学基金项目(51278187)

收稿日期: 2013-03-27

见的复杂几何边界、复杂荷载条件或非均质材料等问题,人为构造机动相容的速度场存在较大的困难,使得上限分析解析法的应用受到了限制。为解决这一问题,有学者提出了上限有限单元法,并且越来越多的学者对此进行了深入地研究和改进^[3-10]。该方法的基本原理是借助有限单元法的形式对连续体进行离散,并且将寻找机动相容速度场的问题转化为一个数学规划问题,克服了人为构造机动相容速度场的困难,因而具有广阔地应用前景。

根据所建立数学规划模型的不同,上限有限单元法可分为两大类,其一是基于线性规划的上限有限单元法^[3-8],其二是基于非线性规划的上限有限单元法^[9-10],早期的研究主要集中在前一类方法中。其中,Anderheggen等^[3],Bottero等^[4],Sloan等^[5]在理论方面做了许多开创性的工作:一是建立了利用线性常应变三角形单元将上限定理转化为线性规划模型的途径;二是通过在单元间引入速度间断线,克服了低阶单元间变形“互锁”的现象,使线性单元亦能模拟复杂速度场;三是采用有效集算法改进了大型线性规划问题的求解效率。Sloan等的工作使上限有限元进入工程实用阶段。在应用方面,杨峰等^[6]以MATLAB软件为平台编制上限有限元程序,解决了约束矩阵高度稀疏化带来的存储问题,然后通过算例分析讨论了网格疏密程度和塑性乘子率数目对计算精度的影响;王均星等^[7]在Sloan模型的基础上考虑孔隙水压力和节理裂隙等因素的影响,探讨了上限有限元在土质或岩质边坡工程中的应用;杨小礼等^[8]基于Karmarker内点算法改进线性规划的求解效率,得到了光滑条形基础下的地基承载力。

基于线性规划的上限有限元虽然取得了富有成效的研究成果,但是其仍存在一些不足,即在形成标准的线性规划问题时需要对屈服函数进行线性化处理,而在这一过程中将产生大量多余的变量和不等式约束,从而大大地增加了优化变量数和所需的存储空间,使得在有限的机时和存储空间内难以获得精确的计算结果^[5,8]。为了克服上述困难,最有效的方式是将屈服函数直接作为优化变量的非线性的不等式约束,即建立上限定理的非线性规划模型。为此,Lyamin等^[10]在上限定理的线性规划模型基础上进行改进,提出了一种上限定理的非线性规划模型,因其不再需要对屈服函数进行线性化处理,在相同的网格划分条件下,该法产生的优化变量数和需占用的存储空间大为减少,从而使得大型工程问题的求解成为了可能。

但是,由于非线性规划模型自身的复杂性,其求解难度较大。Lyamin等^[10]曾采用二阶段拟牛顿算法对所提模型进行求解,但还存在如下问题有待解决:其

一,当迭代点到达屈服面的尖点附近时,由于该点曲率很大,原算法所得的搜索步长很小,影响了收敛速度;其二,原算法采用的精确搜索技术搜索效率较低,需消耗大量机时。针对上述不足,本文将引入可行弧内点算法^[11-12]对Lyamin等所提出的非线性上限规划模型进行求解,以期进一步提高基于非线性规划的上限有限元的计算效率和数值稳定性,并通过应用实例验证本文方法的合理性和工程应用价值。

1 上限定理及其标准数学规划形式

上限定理可以表述为:与任一机动相容速度场相适应的外荷载必为真实荷载的上限^[1-2]。所谓机动相容的速度场须满足如下条件:①相容性条件;②流动法则;③速度边界条件。若用标准的数学规划形式可以将上限定理表示如下^[13]:

$$Q = \min_{\dot{\epsilon}, \dot{u}} \int_{\Omega} \hat{D}(\dot{\epsilon}) dx, \quad (1)$$

$$\text{Subject to } \dot{\epsilon} = \nabla_s \dot{u} \text{ in } \Omega, \quad (2)$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\lambda} \nabla f(\sigma), \quad \dot{\lambda} f(\sigma) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \text{ in } \Omega, \quad (3)$$

$$\dot{u} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \quad (4)$$

$$\Pi(\dot{u}) = \int_{\Omega} F^t \dot{u} dx + \int_{\partial\Omega} f^t \dot{u} dx = 1. \quad (5)$$

式中 \dot{u} 为体积 Ω 内的速度场; $\dot{\epsilon}$ 为与 \dot{u} 相对应的应变率场; σ 为体积 Ω 内的应力场; $\hat{D}(\dot{\epsilon})$ 表示单位体积的内能耗散率; Q 为目标函数优化值; ∇_s 为一阶微分算子; f 为塑性屈服函数; $\dot{\lambda}$ 为塑性乘子率; F 与 f 分别为物体所受体积力与面力; $\Pi(\dot{u})$ 表示外力荷载所做功率。式(1)表示寻找一个机动相容的速度场 \dot{u} 使得体积 Ω 中总的内能耗散率最小;式(2)为速度-应变率的相容性方程;式(3)为应变率场 $\dot{\epsilon}$ 须满足的流动法则约束方程;式(4)为速度场 \dot{u} 在边界 $\partial\Omega$ 上须满足的速度边界条件;式(5)表示将外力荷载所做的功率规则化设定为1。

根据上述上限定理的标准数学规划形式,采用有限单元对连续体进行离散化,按照机动相容性的相关要求建立相应的约束方程,并以计算区域内总的内能耗散率为目标函数,即可得到上限定理的数学规划模型。下节将引入Lyamin等^[10]提出的非线性上限规划模型,在此基础上,探讨基于可行弧内点算法对其进行优化求解的步骤。

2 上限定理的非线性数学规划模型

Lyamin等^[10]针对上限定理的线性规划模型中存在的不足,提出了一种上限定理的非线性规划模型,其特点如下:①通过在各单元的共同边上设置速度间断线(面)增加单元间变形自由度,使线性单元亦能

模拟复杂速度场；②将屈服函数直接作为优化变量的不等式约束，避免了对屈服函数的线性化处理；③引入荷载约束的概念，可以模拟复杂的荷载边界条件。上述特点正是引入该模型进行分析计算的原因所在。根据文献[10]，上限定理的非线性规划模型的具体形式如下：

$$\text{Minimize } Q = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{c}_u^T \mathbf{u} + \mathbf{c}_v^T \mathbf{v}, \quad (6)$$

$$\text{Subject to } \mathbf{A}_u \mathbf{u} + \mathbf{A}_v \mathbf{v} = \mathbf{b}, \quad (7)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{u} = \sum_{j=1}^E \dot{\lambda}_j \nabla f_j(\boldsymbol{\sigma}), \quad (8)$$

$$\dot{\lambda}_j \geq 0 \quad (j \in J_\sigma), \quad (9)$$

$$\dot{\lambda}_j f_j(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (j \in J_\sigma), \quad (10)$$

$$f_j(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad (j \in J_\sigma), \quad (11)$$

$$\mathbf{v} \geq 0, \quad (12)$$

$$\mathbf{u} \in R^{n_u}, \mathbf{v} \in R^{n_v}, \boldsymbol{\sigma} \in R^{n_\sigma}, \boldsymbol{\lambda} \in R^E.$$

式中， \mathbf{u} 为 n_u 一维节点速度列向量； \mathbf{v} 为 n_v 一维速度间断值列向量； $\boldsymbol{\sigma}$ 为 n_σ 一维单元应力列向量； \mathbf{B} 为 $n_\sigma \times n_u$ 阶全局相容性矩阵； \mathbf{c}_u 为单元节点速度 \mathbf{u} 对应的 n_u 一维目标函数系数列向量； \mathbf{c}_v 为速度间断值变量 \mathbf{v} 对应的 n_v 一维目标函数系数列向量； \mathbf{A}_u 与 \mathbf{A}_v 分别为与单元节点速度 \mathbf{u} 和速度间断值变量 \mathbf{v} 相对应的线性约束方程系数矩阵； $f_j(\boldsymbol{\sigma})$ 为塑性屈服函数约束； $\dot{\lambda}_j$ 为与 f_j 对应的塑性乘子率； E 为单元总数。

由以上模型可以看出，该模型包含大量优化变量和非线性约束方程，常规优化算法已不适用，要求解该模型，需要求助于高效的非线性规划算法。

3 基于可行弧内点算法的非线性上限规划模型求解

可行弧内点算法是一种新型的非线性规划算法，对大规模约束优化问题尤其适用^[11-12]，其求解思路为：首先寻找一个初始可行点，在可行点处对约束优化问题的 Kuhn-Tucker 条件进行线性化，得到一个线性方程组；其次对该线性方程组的右端项进行扰动，构造出一条在可行域内部且使目标函数值下降的可行弧；再次沿可行弧进行搜索并使目标函数下降一定值；最后重复以上过程直到得到一个满足 Kuhn-Tucker 条件的最优点。为便于描述算法的求解步骤，首先给出优化模型 (6) ~ (12) 的 Kuhn-Tucker 优化条件：

3.1 Kuhn-Tucker 优化条件

在给出 Kuhn-Tucker 优化条件前，先将优化模型 (6) ~ (12) 等价于如下优化问题^[10]：

$$\text{Maximize } Q = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{c}_u^T \mathbf{u} + \mathbf{c}_v^T \mathbf{v} \quad \text{on } \boldsymbol{\sigma}, \quad (13)$$

$$\text{Minimize } Q = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{c}_u^T \mathbf{u} + \mathbf{c}_v^T \mathbf{v} \quad \text{on } (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (14)$$

$$\text{Subject to } \mathbf{A}_u \mathbf{u} + \mathbf{A}_v \mathbf{v} = \mathbf{b}, \quad (15)$$

$$f_j(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad (j \in J_\sigma), \quad (16)$$

$$f_j(\mathbf{v}) \leq 0 \quad (j \in J_v), \quad (17)$$

$$\mathbf{u} \in R^{n_u}, \mathbf{v} \in R^{n_v}, \boldsymbol{\sigma} \in R^{n_\sigma}, \boldsymbol{\lambda} \in R^{n_\lambda}.$$

式中，原条件 $\mathbf{v} \geq 0$ 为了表达方便已经写成 $f_j(\mathbf{v}) \leq 0$ ， $j \in J_v$ 。由于优化问题 (13) ~ (17) 的目标函数 Q 与不等式约束方程 f_j 均为凸函数，而等式约束均为线性方程，因此这是一个标准的凸优化问题，其最终解答 $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \boldsymbol{\sigma}^*)$ 需满足如下的 Kuhn-Tucker 优化条件^[14-15]：

$$\mathbf{B} \mathbf{u}^* - \sum_{j=1}^E \dot{\lambda}_j \nabla f_j(\boldsymbol{\sigma}^*) = 0, \quad (18)$$

$$\mathbf{c}_v + \mathbf{A}_v^T \boldsymbol{\mu} + \sum_{j \in J_\sigma} \lambda_{vj} \nabla f_j(\mathbf{v}^*) = 0, \quad (19)$$

$$\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^* + \mathbf{c}_u + \mathbf{A}_u^T \boldsymbol{\mu} = 0, \quad (20)$$

$$\mathbf{A}_u \mathbf{u}^* + \mathbf{A}_v \mathbf{v}^* = \mathbf{b}, \quad (21)$$

$$\dot{\lambda}_{\sigma j} f_j(\boldsymbol{\sigma}^*) = 0 \quad (j \in J_\sigma), \quad (22)$$

$$\dot{\lambda}_{vj} f_j(\mathbf{v}^*) = 0 \quad (j \in J_v), \quad (23)$$

$$f_j(\boldsymbol{\sigma}^*) \leq 0 \quad (j \in J_\sigma), \quad (24)$$

$$f_j(\mathbf{v}^*) \leq 0 \quad (j \in J_v), \quad (25)$$

$$\dot{\lambda}_{\sigma j} \geq 0 \quad (j \in J_\sigma), \quad (26)$$

$$\dot{\lambda}_{vj} \geq 0 \quad (j \in J_v), \quad (27)$$

$$\mathbf{u}^* \in R^{n_u}, \mathbf{v}^* \in R^{n_v}, \boldsymbol{\sigma}^* \in R^{n_\sigma},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_\sigma \in R^E, \boldsymbol{\lambda}_v \in R^{n_v}, \boldsymbol{\mu} \in R^r.$$

3.2 可行弧内点算法的优化求解步骤

采用非线性规划算法求解上限规划模型 (6) ~ (12)，其本质上就是寻找一个满足优化条件 (18) ~ (27) 的优化点 $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\lambda}_\sigma^*, \boldsymbol{\lambda}_v^*)$ 的过程，相应于可行弧内点算法其求解步骤如下：

步骤 1：给定优化参数与初始可行点

$k=1$ 时，给定优化参数 $\alpha > 0$ ， $\beta \in (0, 1)$ ，同时寻找一个初始可行点 $\mathbf{x}^k = (\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k, \boldsymbol{\sigma}^k, \boldsymbol{\lambda}_\sigma^k, \boldsymbol{\lambda}_v^k)$ （初始可行点的获取可参考文献[10]的方法）使其满足优化模型 (6) ~ (12) 中的约束条件，即 $\mathbf{A}_u \mathbf{u}^k + \mathbf{A}_v \mathbf{v}^k = \mathbf{b}$ ， $f_j(\boldsymbol{\sigma}^k) \leq 0$ ， $j \in J_\sigma$ ， $f_j(\mathbf{v}^k) \leq 0$ ， $j \in J_v$ ， $(\boldsymbol{\lambda}_\sigma^k, \boldsymbol{\lambda}_v^k) > 0$ 。

步骤 2：计算一个可行下降方向 \mathbf{d}

采用 Newton 法将一阶优化条件 (18) ~ (27) 中的等式方程线性化，即将式 (18) ~ (23) 采用 Taylor 级数展开并取一阶项，可得如下方程组：

$$\sum_{j \in J_\sigma} \lambda_{\sigma j}^k \nabla^2 f_j(\boldsymbol{\sigma}^k) (\boldsymbol{\sigma}^{k+1} - \boldsymbol{\sigma}^k) - \mathbf{B} (\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k) + \sum_{j \in J_\sigma} \lambda_{\sigma j}^{k+1} \nabla f_j(\boldsymbol{\sigma}^k) = \mathbf{B} \mathbf{u}^k, \quad (28)$$

$$\sum_{j \in J_v} \lambda_{vj}^k \nabla^2 f_j(\mathbf{v}^k) (\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k) - \mathbf{A}_v \boldsymbol{\mu}^{k+1} + \sum_{j \in J_v} \lambda_{vj}^{k+1} \nabla f_j(\mathbf{v}^k) = -\mathbf{c}_v, \quad (29)$$

$$\mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}^{k+1} - \boldsymbol{\sigma}^k) + \mathbf{A}_u^T \boldsymbol{\mu}^{k+1} = -\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^k - \mathbf{c}_u, \quad (30)$$

$$\mathbf{A}_u^T (\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k) + \mathbf{A}_v^T (\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k) = 0, \quad (31)$$

$$\lambda_{\sigma j}^k \nabla f_j(\boldsymbol{\sigma}^k) (\boldsymbol{\sigma}^{k+1} - \boldsymbol{\sigma}^k) + \lambda_{\sigma j}^{k+1} f_j(\boldsymbol{\sigma}^k) = 0, \quad j \in J_\sigma, \quad (32)$$

$$\lambda_{vj}^k \nabla f_j(\mathbf{v}^k)(\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k) + \lambda_{vj}^{k+1} f_j(\mathbf{v}^k) = 0 \quad (j \in J_v), \quad (33)$$

式中, 上标 k 和 $k+1$ 分别表示当前迭点与下一迭代点的迭代次数。为了便于编程, 可将式 (28) ~ (33) 采用矩阵和向量表示成如下的紧凑形式:

$$\mathbf{H}_\sigma \mathbf{d}_\sigma^0 - \mathbf{B} \mathbf{d}_u^0 + \mathbf{G}_\sigma^T \boldsymbol{\lambda}_\sigma^0 = \mathbf{r}, \quad (34)$$

$$\mathbf{H}_v \mathbf{d}_v^0 - \mathbf{A}_v^T \boldsymbol{\mu}^0 + \mathbf{G}_v^T \boldsymbol{\lambda}_v^0 = -\mathbf{c}_v, \quad (35)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{d}_\sigma^0 + \mathbf{A}_u^T \boldsymbol{\mu}^0 = \mathbf{a}, \quad (36)$$

$$\mathbf{A}_v \mathbf{d}_v^0 + \mathbf{A}_u \mathbf{d}_u^0 = \mathbf{0}, \quad (37)$$

$$\mathbf{G}_\sigma \mathbf{d}_\sigma^0 + \mathbf{F}_\sigma \boldsymbol{\lambda}_\sigma^0 = \mathbf{0}, \quad (38)$$

$$\mathbf{G}_v \mathbf{d}_v^0 + \mathbf{F}_v \boldsymbol{\lambda}_v^0 = \mathbf{0}. \quad (39)$$

式中, $\mathbf{H}_\sigma = \sum_{j \in J_\sigma} \lambda_{\sigma j}^k \nabla^2 f_j(\boldsymbol{\sigma}^k)$, $\mathbf{H}_v = \sum_{j \in J_v} \lambda_{vj}^k \nabla^2 f_j(\mathbf{v}^k)$,

$$\mathbf{G}_\sigma^T = [\nabla f_1(\boldsymbol{\sigma}^k) \dots \nabla f_E(\boldsymbol{\sigma}^k)], \quad \mathbf{G}_v^T = [\nabla f_1(\mathbf{v}^k) \dots \nabla f_{n_v}(\mathbf{v}^k)],$$

$$\mathbf{F}_\sigma = \text{diag}(f_j(\boldsymbol{\sigma}^k)/\lambda_{\sigma j}^k), \quad \mathbf{F}_v = \text{diag}(f_j(\mathbf{v}^k)/\lambda_{vj}^k),$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{B} \mathbf{u}^k, \quad \mathbf{a} = -\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^k - \mathbf{c}_u, \quad \mathbf{d}_\sigma^0 = \boldsymbol{\sigma}^{k+1} - \boldsymbol{\sigma}^k, \quad \mathbf{d}_v^0 = \mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k,$$

$$\mathbf{d}_u^0 = \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k, \quad \boldsymbol{\mu}^0 = \boldsymbol{\mu}^{k+1}, \quad \boldsymbol{\lambda}_\sigma^0 = \boldsymbol{\lambda}_\sigma^{k+1}, \quad \boldsymbol{\lambda}_v^0 = \boldsymbol{\lambda}_v^{k+1}.$$

在 \mathbf{H}_σ 中, $\nabla^2 f_j(\boldsymbol{\sigma}^k)$ 为屈服函数的 Hessian 矩阵, 对于双曲型近似 Mohr-Coulomb 屈服准则^[16], 该矩阵不具有对称正定的特性, 不能满足算法的收敛性要求, 且当材料的黏聚力参数 c 值很小时, 该矩阵容易出现病态的问题。为此, 可以采用无约束优化问题的 BFGS 公式代替屈服函数的 Hessian 矩阵进行迭代^[14-15], 即采用式 (40) 代替 $\nabla^2 f_j(\boldsymbol{\sigma}^k)$ 进行更新:

$$\mathbf{C}_j^{k+1} := \mathbf{C}_j^k + \frac{\gamma \gamma^T}{\delta^T \gamma} - \frac{\mathbf{C}_j^k \delta \delta^T \mathbf{C}_j^k}{\delta^T \mathbf{C}_j^k \delta}, \quad (40)$$

式中 $\delta = \boldsymbol{\sigma}_j^{k+1} - \boldsymbol{\sigma}_j^k$, $\gamma = \nabla f_j(\boldsymbol{\sigma}_j^{k+1}) - \nabla f_j(\boldsymbol{\sigma}_j^k)$; 当 $k=1$ 时, \mathbf{C}_j^k 取单位矩阵。求解方程组 (34) ~ (39) 可得到迭代增量 $\mathbf{d}^0 = (\mathbf{d}_\sigma^0, \mathbf{d}_u^0, \mathbf{d}_v^0)$, 可以证明 \mathbf{d}^0 为目标函数的一个下降搜索方向^[11-12]。

将式 (38) 改写成展开的形式可以表示如下:

$$\nabla f_{\sigma j}^T \mathbf{d}_{\sigma j}^0 + (f_{\sigma j} / \lambda_{\sigma j}^k) \lambda_{\sigma j}^{k+1} = 0 \quad (j \in J_\sigma), \quad (41)$$

其中, $\mathbf{d}_{\sigma j}^0$ 为向量 \mathbf{d}_σ^0 中相应于屈服函数 $f_{\sigma j}$ 的一组变量。可以看出, 当迭代点靠近屈服函数 $f_{\sigma j}$ 的边界时 (即 $f_{\sigma j}(\boldsymbol{\sigma}^k) = 0$ 时), 有 $\nabla f_{\sigma j}^T \mathbf{d}_{\sigma j}^0 = 0$, 即搜索方向 \mathbf{d}^0 与屈服函数 $f_{\sigma j}$ 相切。若沿此方向搜索, 迭代点将走出可行域的边界, 使不等式约束失效 (如图 1 所示)。为了保持搜索方向的可行性, 可以在式 (38) 的右边添加某些负常数, 即使原方程组 (34) ~ (39) 变为

$$\mathbf{H}_\sigma \mathbf{d}_\sigma - \mathbf{B} \mathbf{d}_u + \mathbf{G}_\sigma^T \boldsymbol{\lambda}_\sigma = \mathbf{r}, \quad (42)$$

$$\mathbf{H}_v \mathbf{d}_v - \mathbf{A}_v^T \boldsymbol{\mu} + \mathbf{G}_v^T \boldsymbol{\lambda}_v = -\mathbf{c}_v, \quad (43)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{d}_\sigma + \mathbf{A}_u^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{a}, \quad (44)$$

$$\mathbf{A}_v \mathbf{d}_v + \mathbf{A}_u \mathbf{d}_u = \mathbf{0}, \quad (45)$$

$$\mathbf{G}_\sigma \mathbf{d}_\sigma + \mathbf{F}_\sigma \boldsymbol{\lambda}_\sigma = -\rho \mathbf{e}, \quad (46)$$

$$\mathbf{G}_v \mathbf{d}_v + \mathbf{F}_v \boldsymbol{\lambda}_v = \mathbf{0}, \quad (47)$$

其中, $\mathbf{H}_\sigma = \sum_{j \in J_\sigma} \lambda_{\sigma j}^k \nabla^2 f_j(\boldsymbol{\sigma}^k)$, $\mathbf{H}_v = \sum_{j \in J_v} \lambda_{vj}^k \nabla^2 f_j(\mathbf{v}^k)$,

$$\mathbf{G}_\sigma^T = [\nabla f_1(\boldsymbol{\sigma}^k) \dots \nabla f_E(\boldsymbol{\sigma}^k)], \quad \mathbf{G}_v^T = [\nabla f_1(\mathbf{v}^k) \dots \nabla f_{n_v}(\mathbf{v}^k)],$$

$$\mathbf{F}_\sigma = \text{diag}(f_j(\boldsymbol{\sigma}^k)/\lambda_{\sigma j}^k), \quad \mathbf{F}_v = \text{diag}(f_j(\mathbf{v}^k)/\lambda_{vj}^k),$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{B} \mathbf{u}^k, \quad \mathbf{a} = -\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^k - \mathbf{c}_u, \quad \mathbf{d}_\sigma = \boldsymbol{\sigma}^{k+1} - \boldsymbol{\sigma}^k,$$

$$\mathbf{d}_v = \mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k, \quad \mathbf{d}_u = \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k, \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^{k+1}, \quad \boldsymbol{\lambda}_\sigma = \boldsymbol{\lambda}_\sigma^{k+1},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_v = \boldsymbol{\lambda}_v^{k+1}.$$

式 (46) 中参数 $\rho > 0$, $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T$ 为单位列向量。此时有 $f_{\sigma j}(\boldsymbol{\sigma}_j^k) = 0$ 时, $\nabla f_{\sigma j}^T \mathbf{d}_{\sigma j} = -\rho < 0$, 即搜索方向 $\mathbf{d}_{\sigma j}$ 与 $\nabla f_{\sigma j}$ 夹角为钝角 (如图 1 所示), 从而保证了搜索方向 \mathbf{d} 为可行下降方向。 ρ 值决定了可行下降方向 \mathbf{d} 偏离初始下降方向 \mathbf{d}^0 的程度, 可以按下式计算:

$$\rho = \min[\alpha \|\mathbf{d}_\sigma^0\|_2^2; (1 - \beta) \mathbf{d}_\sigma^{0T} \mathbf{B}(\mathbf{u}^k + \mathbf{d}_u^0) / \lambda_\sigma^{0T} \mathbf{e}]. \quad (48)$$

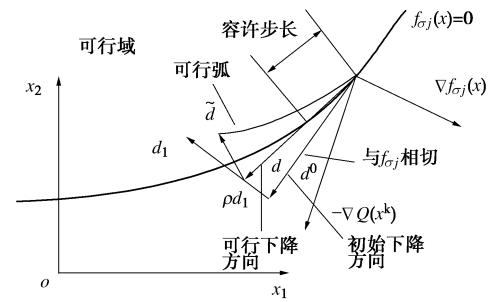


图1 可行弧计算示意图

Fig. 1 Calculation of a feasible arc

步骤 3: 计算一个“修正方向” $\tilde{\mathbf{d}}$, 构造一条可行弧

如图 1 所示, 虽然 \mathbf{d} 为可行下降方向, 线性搜索可沿此方向进行, 但是当屈服函数 $f_{\sigma j}$ 在迭代点 \mathbf{x}^k 附近曲率很大时 (如屈服面的尖点附近), 容许的搜索步长较小 (即 $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|$ 较小), 这将使优化求解的收敛速度很慢。为此, 可构造一条与可行下降方向 \mathbf{d} 相切, 且曲率“接近”于屈服函数在 \mathbf{x}^k 点附近曲率的二次弧线, 如图 1 所示, 其表达式如下:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^k + t\mathbf{d} + t^2\tilde{\mathbf{d}}, \quad (49)$$

式中, t 为迭代步长, $\tilde{\mathbf{d}}$ 为一修正方向, 由下面的线性方程组得到

$$\mathbf{H}_\sigma \tilde{\mathbf{d}}_\sigma - \mathbf{B} \tilde{\mathbf{d}}_u + \mathbf{G}_\sigma^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_\sigma = \mathbf{r}, \quad (50)$$

$$\mathbf{H}_v \tilde{\mathbf{d}}_v - \mathbf{A}_v^T \tilde{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{G}_v^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\mathbf{c}_v, \quad (51)$$

$$\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{d}}_\sigma + \mathbf{A}_u^T \tilde{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{a}, \quad (52)$$

$$\mathbf{A}_v \tilde{\mathbf{d}}_v + \mathbf{A}_u \tilde{\mathbf{d}}_u = \mathbf{0}, \quad (53)$$

$$\mathbf{G}_\sigma \tilde{\mathbf{d}}_\sigma + \mathbf{F}_\sigma \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_\sigma = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^1, \quad (54)$$

$$\mathbf{G}_v \tilde{\mathbf{d}}_v + \mathbf{F}_v \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^2, \quad (55)$$

式中, $\mathbf{H}_\sigma = \sum_{j \in J_\sigma} \lambda_{\sigma j}^k \nabla^2 f_j(\boldsymbol{\sigma}^k)$, $\mathbf{H}_v = \sum_{j \in J_v} \lambda_{vj}^k \nabla^2 f_j(\mathbf{v}^k)$,

$$\mathbf{G}_\sigma^T = [\nabla f_1(\boldsymbol{\sigma}^k) \dots \nabla f_E(\boldsymbol{\sigma}^k)], \quad \mathbf{G}_v^T = [\nabla f_1(\mathbf{v}^k) \dots \nabla f_{n_v}(\mathbf{v}^k)],$$

$$\begin{aligned} F_{\sigma} &= \text{diag}(f_j(\sigma^k)/\lambda_{\sigma j}^k), \quad F_v = \text{diag}(f_j(v^k)/\lambda_{vj}^k), \\ r &= Bu^k, \quad a = -B^T \sigma^k - c_u, \quad \tilde{d}_{\sigma} = \sigma^{k+1} - \sigma^k, \\ \tilde{d}_v &= v^{k+1} - v^k, \quad \tilde{d}_u = u^{k+1} - u^k, \quad \tilde{\mu} = \mu^{k+1}, \quad \tilde{\lambda}_{\sigma} = \lambda_{\sigma}^{k+1}, \\ \tilde{\lambda}_v &= \lambda_v^{k+1}. \end{aligned}$$

$\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ 分别为 $f_{\sigma j}$, f_{vj} 的近似曲率, 可以按下式计算:

$$\tilde{\omega}_j^1 = f_{\sigma j}(\sigma_j^k + d_{\sigma j}) - f_{\sigma j}(\sigma_j^k) - \nabla f_{\sigma j}^T(\sigma_j^k) d_{\sigma j} \quad (j \in J_{\sigma}); \quad (56)$$

$$\tilde{\omega}_j^2 = f_{vj}(v_j^k + d_{vj}) - f_{vj}(v_j^k) - \nabla f_{vj}^T(v_j^k) d_{vj} \quad (j \in J_v). \quad (57)$$

由于 f_{vj} 为线性函数, $\tilde{\omega}_j^2 = 0$ ($j \in J_v$), 实际计算时可取 $\tilde{\omega}_j^2 = \varepsilon \in (10^{-3}, 10^{-5})$ (其中 ε 为一较小的正数)。

步骤 4: 沿可行弧搜索计算迭代步长

沿可行弧搜索即可得到新的迭代点。为了获得一个使目标函数下降一定值且保证迭代点不走出可行域的合理步长 t , 可采用 Wolfe 非精确搜索技术进行搜索, 其搜索过程可以用图 2 所示的流程图表示^[12, 14]。

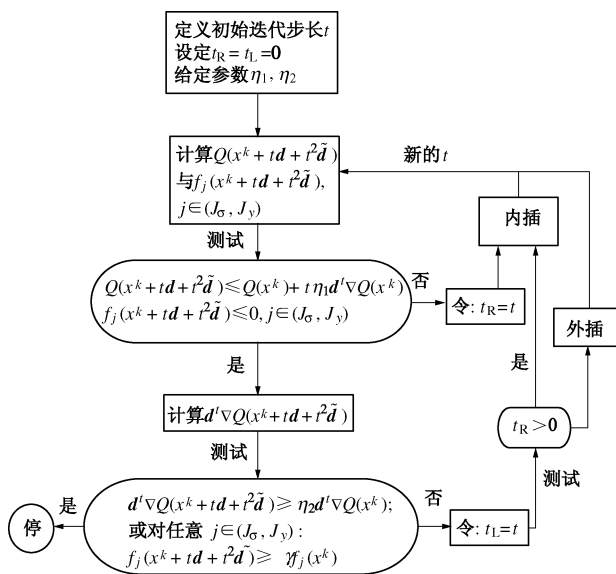


图 2 Wolfe 非精确线性搜索流程图

Fig. 2 Flow chart of Wolfe's inexact line search

与文献[10]采用的精确搜索技术相比, Wolfe 非精确搜索技术具有如下优势:

(1) 每步迭代不需要获得精确的最优迭代步长, 而是得到一个使目标函数下降一定程度的合理步长, 因此通常只需几次循环即可结束搜索。

(2) 精确搜索技术需要对所有不等式约束单独进行搜索, 并将所有搜索步长的最小值作为最终的迭代步长^[10], 而 Wolfe 非精确搜索技术则对所有不等式约束同时进行处理, 直接得到最终迭代步长, 因而可大大节约机时。

步骤 5: 更新迭代点与 Lagrange 乘子

得到合理步长 t 后, 新的迭代点可以表示为 $x^{k+1} := x^k + td + t^2 \tilde{d}$, 即

$$u^{k+1} := u^k + td_u + t^2 \tilde{d}_u, \quad (58)$$

$$v^{k+1} := v^k + td_v + t^2 \tilde{d}_v, \quad (59)$$

$$\sigma^{k+1} := \sigma^k + td_{\sigma} + t^2 \tilde{d}_{\sigma}. \quad (60)$$

新的 Lagrange 乘子可以更新为

$$\lambda_{\sigma j}^{k+1} := \max[\lambda_{\sigma j}^k; \delta \|d_{\sigma 0}\|_2^2] \quad (j \in J_{\sigma}), \quad (61)$$

$$\lambda_{vj}^{k+1} := \max[\lambda_{vj}^k; \delta \|d_{v0}\|_2^2] \quad (j \in J_v). \quad (62)$$

式中, δ 为一足够小的正常数。

步骤 6: 检验当前迭代点是否满足收敛条件

最后, 检验 $(u^k, v^k, \sigma^k, \lambda_{\sigma}^k, \lambda_v^k)$ 是否满足文献[10]中给出的收敛条件。若是则迭代停止; 若否则令 $k := k+1$, 并返回步骤 2 进行下一次迭代, 直到迭代点满足收敛条件。

至此, 基于可行弧内点算法对非线性上限规划模型进行优化求解的步骤已经全部完成。由于上述计算过程中涉及大型稀疏矩阵的运算, 为解决其存储和计算等问题, 可以 MATLAB 软件为平台编制上限有限元程序, 包括网格划分、数值离散、优化求解和数据可视化等子程序。其中, 网格划分程序由文献[17]提供的方法进行编写; 优化求解程序分别按本文方法和文献[10]介绍的方法进行编写; 优化求解阶段所涉及的大型线性方程组通过调用 Harwell 实验室开发的高效矩阵分解程序包——MA57^[18]进行求解。下文将以光滑刚性条形基础下地基承载力计算为课题, 进行应用实例分析。

4 应用实例

地基承载力计算是土力学中的经典课题。当不考虑土重和负载时, 光滑刚性条形基础下的地基承载力可以用 Prandtl 解表示为^[19]

$$q/c' = [\exp(\pi \tan \varphi') \tan^2(45 + \varphi'/2) - 1] \cot \varphi', \quad (63)$$

式中, c' 和 φ' 分别土体的有效黏聚力和有效内摩擦角, q 为地基极限承载力。

首先, 为分析网格疏密程度对上限有限元计算效率与精度的影响, 采用 4 种不同密度的网格进行计算, 如图 3 所示。由于计算模型沿基础中线对称, 因此网格划分时只取右侧一半进行计算。网格 1 中给出了计算所用速度边界条件与网格尺寸。表 1 中列举了网格信息和土性参数 $c' = 1$, $\varphi' = 35^\circ$ 时各网格所得计算结果。从表 1 中数据可以看出, 与文献[10]所采用的二阶段拟牛顿算法相比, 本文方法在迭代次数、计算耗时和计算误差等方面明显优于前者, 计算效率和计算精度有较大提升。从表 1 还可看出, 随着网格划分密度的提高, 计算精度也相应提高, 当采用网格 4 时计算误差仅为 +0.682%, 足可满足工程计算的要求。图 4 中给出了网格 4 所对应的速度矢量图和变形网格图。

由该图可以看出土体破坏模式为侧向挤出破坏, 与 Prandtl 模型所揭示的破坏机制一致。

其次, 为验证本文方法的数值稳定性, 对不同的内摩擦角 φ' 采用相同的高密度网格进行计算, 计算结果及网格信息如表 2 所示。从表 2 数据可以看出, 内摩擦角对迭代次数有一定影响, 随着内摩擦角增大迭代次数也相应增加, 但取较大的内摩擦角 ($\varphi'=35^\circ$) 时迭代次数也不超过 30 次。从表 2 还可看出, 即使采

表 1 网格划分大小与数值计算结果

网格信息		迭代次数		单次迭代时间/s		总迭代时间/s		目标函数值 ($c=1, \varphi'=35^\circ$, 精确解 46.124)		计算误差/%	
		文献方法	新方法	文献方法	新方法	文献方法	新方法	文献方法	新方法	文献方法	新方法
网格 1	单元: 189 速度间断线: 274 节点: 567	28	18	0.398	0.136	11.130	2.437	50.381	48.646	+9.230	+5.469
网格 2	单元: 417 速度间断线: 609 节点: 1251	29	19	1.100	0.249	31.906	4.726	48.923	47.307	+6.068	+2.565
网格 3	单元: 810 速度间断线: 1192 节点: 2430	31	20	2.621	0.479	81.226	9.583	48.036	46.834	+4.145	+1.539
网格 4	单元: 1592 速度间断线: 2356 节点: 4476	30	19	5.518	0.944	165.530	17.943	47.638	46.439	+3.282	+0.682

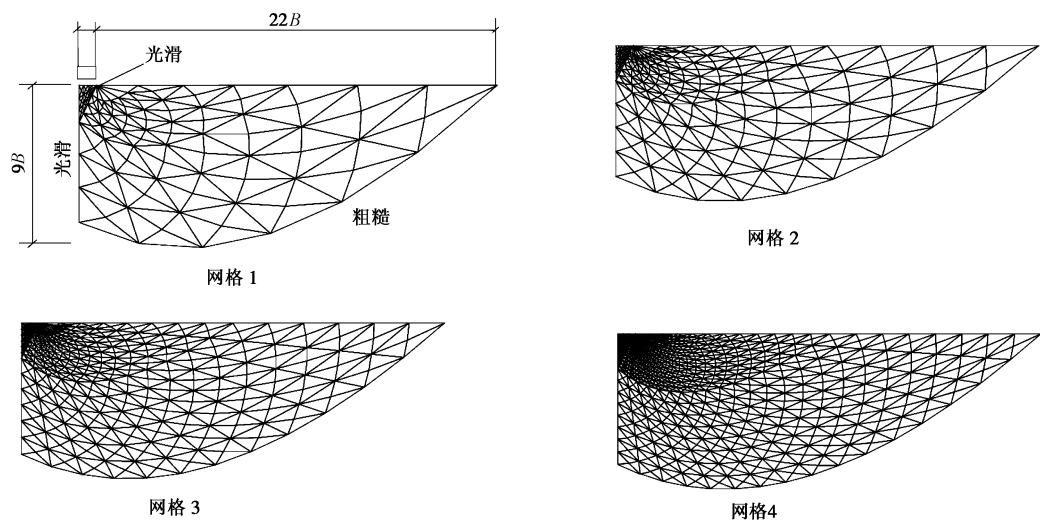


图 3 计算网格大小与疏密程度

Fig. 3 Mesh sizes and density

表 2 不同 φ' 值下的数值计算结果与精确解

网格信息	土体参数	迭代次数	总迭代时间/s	目标函数值	精确解 (Prandtl)	计算误差/%
单元: 8644 速度间断线: 12890 节点: 25932	$\varphi'=0^\circ$	12	62.545	5.165	5.1416	+0.449
	$\varphi'=10^\circ$	14	72.298	8.367	8.3449	+0.260
	$\varphi'=20^\circ$	17	87.681	14.859	14.8347	+0.162
	$\varphi'=30^\circ$	23	119.731	30.180	30.1396	+0.134
	$\varphi'=35^\circ$	27	141.565	46.207	46.1236	+0.182

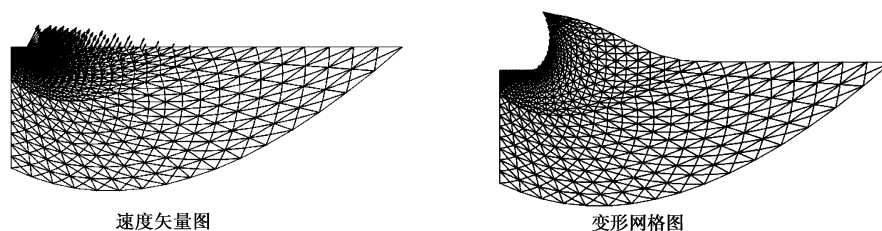


图 4 速度矢量图与变形网格图 (网格 4)

Fig. 4 Velocity vectors and deformed mesh

用较高密度的网格本文方法也能获得稳定的计算结果,且对不同的 φ' 值计算误差均控制在 0.5%以内。因此,本文方法有良好的数值稳定性,可适应较大规模工程问题的计算。土体能量耗散率的分布可以反映其塑性变形区的分布情况。当优化搜索结束后,将各单元节点速度列向量 \mathbf{u}^e 以及单元内应力列向量 $\boldsymbol{\sigma}^e$ 从总体速度列向量 \mathbf{u} 与总体应力列向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 中按节点编码和单元编码提取出来,则各单元内的能量耗散值可以按式 $D^e = \boldsymbol{\sigma}^e \mathbf{B} \mathbf{u}^e$ 计算。对所有单元重复前述计算过程,即可得到整个速度场的能量耗散分布。图 5 给出了不同 φ' 值所对应的土体能量耗散图,从中可以看出,随着土体内摩擦角的增大,基础下塑性流动区范围也不断增大,即土体内摩擦角对塑性流动区的范围有较大影响。

由以上分析可知,基于可行弧内点算法求解非线性上限规划模型,不但提高了其计算效率和计算精度,还保证了其数值稳定性,具有较高的工程应用价值。

(a) $\varphi' = 10^\circ$ (b) $\varphi' = 20^\circ$ (c) $\varphi' = 30^\circ$ (d) $\varphi' = 35^\circ$ 图 5 不同内摩擦角 φ' 下的能量耗散图

Fig. 5 Power dissipation under different internal friction angles

5 结 语

在介绍上限定理及其标准数学规划形式的基础上,通过引入一种非线性上限规划模型,避免了对屈服函数的线性化处理,不但减少了所求解的优化变量数,还节约了存储空间。针对该模型的特点,探讨了基于可行弧内点算法对其进行优化求解的步骤,并通过算例分析验证了本文方法的合理性和工程应用价值。从实际计算的效果来看,基于可行弧内点算法的上限有限单元法,克服了现有方法存在的不足,较大程度的提升了计算效率和计算精度,获得了较好的数值稳定性,因而能够适应大部分土体稳定性分析计算的要求。

参考文献:

- [1] 陈祖煜. 土力学经典问题的极限分析上、下限解[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(1): 1 - 11. (CHEN Zu-yu. Limit analysis for the classic problems of soil mechanics[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(1): 1 - 11. (in Chinese))
- [2] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1975.
- [3] ANDERHEGGEN E, KNOPFEL H. Finite element limit analysis using linear programming[J]. International Journal of Solids and Structures, 1972, 8(12): 1413 - 1431.
- [4] BOTTERO A, NEGRE R, PASTOR J, et al. Finite element method and limit analysis theory for soil mechanics problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and

- Engineering, 1980, **22**(1): 131 - 149.
- [5] SLOAN S W, KLEEMAN P W. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, **127**: 293 - 314.
- [6] 杨 峰, 阳军生, 张学民. 基于线性规划模型的极限分析上限有限元的实现[J]. 岩土力学, 2011, **32**(3): 914 - 921. (YANG Feng, YANG Jun-sheng, ZHANG Xue-min. Implementation of finite element upper bound solution of limit analysis based on linear programming model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(3): 914 - 921. (in Chinese))
- [7] 王均星, 王汉辉, 吴雅峰. 土坡稳定的有限元塑性极限分析上限法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, **23**(11): 1867 - 1873. (WANG Jun-xing, WANG Han-hui, WU Ya-feng. Stability analysis of soil slope by finite element method with plastic limit upper bound[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, **23**(11): 1867 - 1873. (in Chinese))
- [8] 杨小礼, 李 亮, 刘宝琛. 大规模优化及其在上限定理有限元中的应用[J]. 岩土工程学报, 2001, **23**(5): 602 - 605. (YANG Xiao-li, LI Liang, LIU Bao-chen. Large-scale optimization and its application to upper bound theorem using kinematical element method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, **23**(5): 602 - 605. (in Chinese))
- [9] 姜功良. 浅埋软土隧道稳定性极限分析[J]. 土木工程学报, 1998, **31**(5): 65 - 72. (JIANG Gong-liang. Limit analysis of the stability of shallow tunnels in soft ground[J]. China Civil Engineering Journal, 1998, **31**(5): 65 - 72. (in Chinese))
- [10] LYAMIN A V, SLOAN S W. Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2002, **26**: 573 - 611.
- [11] HERSKOVITS J, SANTOS G. Feasible arc interior point algorithm for nonlinear optimization[C]// Computational Mechanics, New Trends and Applications. CIMNE, Barcelona, 1998.
- [12] HERSKOVITS J, MAPPA P, GOULART E, et al. Mathematical programming model and algorithms for engineering design optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, **194**(33): 3244 - 3268.
- [13] COHN M Z, MAIER G. Engineering plasticity by mathematical programming[M]. New York: Pergamon Press, 1979.
- [14] NOCEDAL J, WRIGHT J W. Numerical optimization[M]. New York: Springer, 2006.
- [15] RAO S S. Engineering optimization: theory and practice[M]. New Jersey: John Wiley & Sons, 2009.
- [16] ABBO A J, SLOAN S W. A smooth hyperbolic approximation to the Mohr-Coulomb yield criterion[J]. Computers and Structures, 1995, **54**(3): 427 - 441.
- [17] LYAMIN A V, SLOAN S W. Mesh generation for lower bound limit analysis[J]. Advances in Engineering Software, 2003, **34**: 321 - 338.
- [18] DUFF I S. A code for the solution of sparse symmetric definite and indefinite systems[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 2004, **30**(2): 118 - 144.
- [19] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 2 版. 北京: 中国水利水电出版社, 1996. (QIAN Jia-huan, YIN Zong-ze. Principles of soil engineering and calculation[M]. 2nd ed. Beijing: China Water Power Press, 1996. (in Chinese))