

DOI: 10.11779/CJGE201403011

# 线性无关高阶数值流形法

徐栋栋<sup>1, 2</sup>, 郑 宏<sup>1, 2</sup>, 杨永涛<sup>1, 2</sup>

(1. 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071; 2. 中国科学院武汉岩土力学研究所, 湖北 武汉 430071)

**摘要:** 对高阶数值流形方法来说, 若采用 1 阶局部位移函数显然提高了计算精度, 但又不可避免地使总体刚度矩阵亏秩, 出现线性相关问题。针对这种情况, 提出局部位移函数采用 1 阶泰勒展开形式, 使得定义在物理覆盖上的自由度具有明确的物理意义。当基函数所对应自由度取为应变分量时, 定义物理覆盖为 PC-u- $\epsilon$  型; 使用局部坐标系下的应力分量来代替应变分量, 进而发展了 PC-u- $\sigma$  型。这样方便了位移和应力边界条件的施加。数值算例表明, PC-u- $\epsilon$  型显著地减少了亏秩数; PC-u- $\sigma$  型的施加完全地消除了亏秩数, 同样保持了很高的计算精度。

**关键词:** 数值流形法; 泰勒展开; 线性相关; 亏秩; Cook 斜梁; 1/4 圆孔; 边坡

中图分类号: O3; TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2014)03-0482-07

**作者简介:** 徐栋栋(1986-), 男, 山东聊城人, 博士研究生, 主要从事计算岩土力学等方面的研究。E-mail: xdhappy717@163.com。

## Linearly independent higher-order numerical manifold method

XU Dong-dong<sup>1, 2</sup>, ZHENG Hong<sup>1, 2</sup>, YANG Yong-tao<sup>1, 2</sup>

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Wuhan 430071, China; 2. Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

**Abstract:** The adoption of the first-order local approximation functions has improved the accuracy, but it has also led to rank deficiency of the global stiffness matrix for the higher-order numerical manifold method, meaning the existence of the linear dependence. The first-order Taylor's expansions with regard to the interpolation point are adopted as the local displacement functions, which makes the degrees of freedom defined on the physical cover have definite physical meanings. Then the first-order partial differential derivatives are expressed by the strain components, leading to the PC-u- $\epsilon$ . The strain components are further replaced by the stress components in the local framework, creating the PC-u- $\sigma$ . In this way, both the displacement and the stress boundary conditions are easily applied. Numerical examples show that the PC-u- $\epsilon$  alone significantly causes a drastic decrease in rank deficiency, while deploying the PC-u- $\sigma$  along the stress boundary completely eliminates the rank deficiency and retains higher accuracy.

**Key words:** numerical manifold method; Taylor's expansion; linear dependence; rank deficiency; Cook skew beam; 1/4 circular hole; slope

## 0 引言

数值流形方法 (NMM) 基于数学覆盖和物理覆盖实现了连续和非连续问题的统一解。其数学覆盖的选择常见有两种: 第 1 种完全遵循石根华博士所发布程序中的正三角形网格所构造的数学覆盖; 第 2 种采用自动剖分而成的有限单元网格来构造数学覆盖: 例如王水林等<sup>[1]</sup>利用有限元网格作为数学覆盖模拟了裂纹扩展路径; 韩有民等<sup>[2]</sup>基于三角形有限元网格阐述了裂纹扩展时的物理网格与流形单元的生成算法, 并给出裂纹扩展模拟算例; 曹文贵等<sup>[3]</sup>基于三角形有限元网格对 NMM 前处理进行了研究; 凌道盛等<sup>[4]</sup>不仅基于有限单元网格构造初始数学覆盖, 还将网格自适应

技术应用到流形单元中, 对边坡稳定分析进行了研究; 朱爱军等<sup>[5]</sup>对研究区域采用规则较密有限元网格, 利用 NMM 对岩土工程开挖卸荷问题进行了模拟。结果表明这种构造方式也是切实有效的。文中采用后者, 以便更为简单方便地施加第 2 类边界条件, 尝试解决 NMM 总体刚度矩阵的线性相关问题。

基于单位分解 (PU) 的方法可自由地提高局部位移函数 (多项式) 的阶次, 且将局部位移函数乘上单位分解函数来构造总体位移函数, 提高了计算精度,

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11172313); 国家 973 项目资助课题 (2011CB013505)

收稿日期: 2013-08-06

但会令总体刚度矩阵奇异, 也即线性相关。

Babuska 等<sup>[6]</sup>首次发现了线性相关问题, 进而其他基于 PU 的方法<sup>[7-9]</sup>, 也出现了这种问题。数值流形方法<sup>[10-12]</sup>, 以有限元形函数作为单位分解函数, 将定义在 3 个物理覆盖上的局部位移函数(可采用任意阶次多项式形式)揉和到一起来构造每个流形单元上的总体位移函数, 同样也将不可避免地产生线性相关问题<sup>[12]</sup>。

针对线性相关问题, 学者们提出不同的解决方法。文献[13]指出禁止在 Dirichlet 边界条件下施加高阶自由度, 可有效地解决了线性相关问题, 但实际操作中施加并不容易。同样, 文献[14]也指出在需要引入位移边界条件的物理覆盖上直接采用 0 阶位移函数来消除刚度矩阵的线性相关现象, 但这样可能会导致边界上计算精度的降低。

另外对单元性质的改进也可以来解决线性相关问题<sup>[15-19]</sup>: 比如发展了基于 PU 的 3 节点三角形单元<sup>[15]</sup>, 高性能的 3 节点三角形单元以及 4 节点四面体单元<sup>[16-17]</sup>, 混合复杂元胞<sup>[18]</sup>, 以及混合有限元-无网格四边形单元<sup>[19]</sup>。但是不可避免地引入了附加自由度<sup>[16-17]</sup>, 复杂的前处理<sup>[18]</sup>以及计算量的增加<sup>[15-19]</sup>。另外, 文献[20]分析了 NMM 中亏秩数与网格拓扑结构和局部位移逼近函数的阶次有关, 并推导了亏秩数目的计算公式, 可供参考。

针对二维弹性问题, 为了克服线性相关问题并保持高计算精度, 每个物理覆盖上的局部位移函数采用对该覆盖插值点的 1 阶泰勒展开形式。进而, 泰勒展开式中的 1 阶偏导数由覆盖应变自由度来代替, 发展了 PC-u- $\varepsilon$  型的覆盖; 考虑到很多情况下, 大多数边界属于应力边界条件, 在局部坐标系下, 将覆盖上的应变自由度由应力自由度来代替, 发展了 PC-u- $\sigma$  型的覆盖。PC-u- $\sigma$  型的覆盖的引入, 方便了合理地施加位移应力边界条件。该研究前处理简单, 并未引入附加自由度, 且计算量并未增加。

## 1 定义具有物理意义的物理覆盖

基于三角形有限单元的数值流形方法, 数学覆盖用来定义插值函数, 数学覆盖与材料区域的交集定义为 1 个物理覆盖, 那么每个流形单元(积分区域)将是 3 个物理覆盖的交集。

物理覆盖上的局部位移函数的水平分量  $u_i(x, y)$  对其所对应的插值节点  $(x_i, y_i)$  的 1 阶泰勒展开形式可以表示为

$$u_i(x, y) = u^i + u_x^i(x - x_i) + u_y^i(y - y_i), \quad (1)$$

式中,  $u^i = u(x_i, y_i)$ ,  $u_x^i = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_i, y_i)}$ ,  $u_y^i =$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_i, y_i)}.$$

同样, 垂直位移分量也可以表示为

$$v_i(x, y) = v^i + v_x^i(x - x_i) + v_y^i(y - y_i), \quad (2)$$

式中,  $v^i = v(x_i, y_i)$ ,  $v_x^i = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_i, y_i)}$ ,  $v_y^i =$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_i, y_i)}.$$

弹性小变形假定下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon_x, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \varepsilon_y \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

且

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \gamma_{xy}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= \omega \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2}(\gamma_{xy} + \omega), \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2}(\gamma_{xy} - \omega) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中,  $\omega$  表示穿过点  $(x, y)$  的任意微量绕着  $z$  轴的转动角度。

进而, 流形单元上的位移矢量可以表示为

$$\text{式中, } \mathbf{T}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{x - x_i}{l_i} & 0 & \frac{y - y_i}{2l_i} & \frac{y - y_i}{2l_i} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{y - y_i}{l_i} & \frac{x - x_i}{2l_i} & \frac{x_i - x}{2l_i} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d}_i^T = (u_i \quad v_i \quad \bar{\varepsilon}_x^i \quad \bar{\varepsilon}_y^i \quad \bar{\gamma}_{xy}^i \quad \bar{\omega}^i).$$

$l_i$  为与模型尺寸等数量级的一个值, 可以任意给定; 且  $\bar{\varepsilon}_x^i = l_i \varepsilon_x^i$ ,  $\bar{\varepsilon}_y^i = l_i \varepsilon_y^i$ ,  $\bar{\gamma}_{xy}^i = l_i \gamma_{xy}^i$ ,  $\bar{\omega}^i = l_i \omega^i$ 。

若第  $i$  个物理覆盖上的自由度定义为  $\mathbf{d}_i$  (单位与位移相同), 定义它为 PC-u- $\varepsilon$  型。引入  $l_i$  的目的为让所有自由度的单位均为位移单位, 较之文献[21]的提法, 改善了整体刚度矩阵的数值特性。

局部位移函数为 0 阶的物理覆盖, 定义为 PC-u 型。

如果光滑边界处的物理覆盖上的表面张力给定, 那么可将  $\varepsilon_x^i$ ,  $\varepsilon_y^i$  以及  $\gamma_{xy}^i$  替换为  $\sigma_n^i$ ,  $\sigma_t^i$  及  $\tau_{nt}^i$ 。后 3 者为第  $i$  个物理覆盖在局部坐标系下的应力分量。根据应力张量的性质, 整体坐标系下它们的关系可以表

示为

$$\boldsymbol{\sigma}_L^i = \mathbf{L} \boldsymbol{\sigma}_G^i , \quad (7)$$

式中,  $\boldsymbol{\sigma}_L^i \equiv (\sigma_n^i \ \sigma_t^i \ \tau_{nt}^i)^T$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_G^i \equiv (\sigma_x^i \ \sigma_y^i \ \tau_{xy}^i)^T$ 。

且

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ n_y^2 & n_x^2 & -2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} , \quad (8)$$

$\mathbf{n}^T = (n_x, n_y)$  表示第  $i$  个物理覆盖的外法向量。 $\mathbf{L}$  的逆为

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & -2n_x n_y \\ n_y^2 & n_x^2 & 2n_x n_y \\ n_x n_y & -n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} . \quad (9)$$

全局坐标系下应力与应变的本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma}_G^i = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_G^i , \quad (10)$$

代入到式 (7) 得到

$$\boldsymbol{\sigma}_L^i = \mathbf{G} \boldsymbol{\varepsilon}_G^i , \quad (11)$$

式中,  $\boldsymbol{\varepsilon}_G^i = (\varepsilon_x^i \ \varepsilon_y^i \ \gamma_{xy}^i)^T$ 。

对于平面应力问题弹性矩阵为

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} . \quad (12)$$

平面应变问题:

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/[2(1-\nu)] \end{bmatrix} , \quad (13)$$

且

$$\mathbf{G} = \mathbf{L} \mathbf{D} , \quad (14)$$

或者等效为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G^i = \mathbf{G}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_L^i . \quad (15)$$

以  $\boldsymbol{\sigma}_L$  的格式来表示  $\mathbf{d}_i$ :

$$\mathbf{d}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^i \\ l_i \boldsymbol{\varepsilon}_G^i \\ l_i \boldsymbol{\omega}^i \end{pmatrix} = \mathbf{F} \mathbf{g}_i , \quad (16)$$

式中

$$\mathbf{u}^i = (u^i, v^i)^T , \quad (17)$$

且

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} , \quad (18)$$

$$\mathbf{g}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^i \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_L^i \\ \bar{\boldsymbol{\omega}}^i \end{pmatrix} , \quad (19)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_L^i = \frac{l_i}{E} \boldsymbol{\sigma}_L^i . \quad (20)$$

将式 (16) 代入 (6) 得

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{U}^i \mathbf{g}_i , \quad (21)$$

式中,  $\mathbf{U}^i = \mathbf{T}^i \mathbf{F}$ 。

将  $\mathbf{g}_i$  作为自由度的物理覆盖, 定义为 PC-u- $\sigma$  型。因其自由度中含应力项, 方便了应力边界条件的施加。

## 2 罚形式的变分原理及离散形式

当物理覆盖上的位移阶次取为 0 阶时, 位移边界条件可严格地满足。而当阶次取为高阶时, 这将不再成立。

根据最小势能原理, 真实的位移满足下式

$$\pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_s} \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{p}} dS +$$

$$\int_{\Gamma_d} \frac{1}{2} k (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})^T (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) dS . \quad (22)$$

式中  $\Gamma_s$  为应力边界条件,  $\Gamma_d$  为位移边界条件,  $\Gamma_s + \Gamma_d = \partial\Omega$ ;  $\tilde{\mathbf{u}}$  为位移边界  $\Gamma_d$  上的位移;  $\tilde{\mathbf{p}}$  为应力边界  $\Gamma_s$  上的应力;  $k$  为罚参数。

$\boldsymbol{\sigma}$  及  $\boldsymbol{\varepsilon}$  均为位移的函数, 可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = L_d \mathbf{u} , \quad (23)$$

且

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} , \quad (24)$$

$$L_d = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} . \quad (25)$$

应该指出, 与传统最小势能原理相比, 式 (22) 中的  $\mathbf{u}$  不必事先满足位移边界条件。

每个流形单元的位移函数  $\mathbf{u}(x, y)$  可以表示为

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^3 L_i \mathbf{w}_i , \quad (26)$$

式中,  $\varphi_i = L_i$  = 面积坐标。

对 PC-u- $\varepsilon$  或 PC-u- $\sigma$  分别将式 (6) 或 (21) 代入式 (26) 得到

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{h} , \quad (27)$$

$\mathbf{N}$  包含 3 个  $2 \times 6$  的子矩阵:  $\mathbf{N}^1$ ,  $\mathbf{N}^2$ ,  $\mathbf{N}^3$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^1 & \mathbf{N}^2 & \mathbf{N}^3 \end{bmatrix} , \quad (28)$$

矢量  $\mathbf{h}$  是包含 3 个  $6 \times 1$  子矩阵:  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$ ,  $\mathbf{h}_3$

$$\mathbf{h}^T = (\mathbf{h}_1^T \ \mathbf{h}_2^T \ \mathbf{h}_3^T) , \quad (29)$$

$$\text{如果为 PC-u-}\varepsilon\text{ 型: } \mathbf{N}^i = L_i \mathbf{T}^i, \mathbf{h}_i = \mathbf{d}_i, \quad (30)$$

$$\text{如果为 PC-u-}\sigma\text{ 型: } \mathbf{N}^i = L_i \mathbf{U}^i, \mathbf{h}_i = \mathbf{g}_i. \quad (31)$$

将式(27)代入式(22)得到

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{h}, \quad (32)$$

$\mathbf{B}$ 由3个 $3 \times 6$ 子矩阵组成:  $\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, \mathbf{B}^3$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}^1 \quad \mathbf{B}^2 \quad \mathbf{B}^3], \quad (33)$$

$$\mathbf{B}^i = L_d \mathbf{N}^i. \quad (34)$$

将式(32)代入式(24)得到

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\mathbf{h}, \quad (35)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}\mathbf{B}. \quad (36)$$

将式(27)、(32)及(35)代入到式(22)中, 令 $\delta\pi=0$ , 得到系统平衡方程为

$$\mathbf{K}\mathbf{p} = \mathbf{q}, \quad (37)$$

式中,  $\mathbf{p}$ 为总自由度,  $\mathbf{K}$ 为总体刚度矩阵,  $\mathbf{q}$ 为等效荷载矩阵。

单元刚度矩阵为

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega + k \int_{\Gamma_c^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega. \quad (38)$$

单元荷载矩阵为

$$\mathbf{q}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_s^e} \mathbf{N}^T \tilde{\mathbf{p}} dS + k \int_{\Gamma_d^e} \mathbf{N}^T \tilde{\mathbf{u}} dS. \quad (39)$$

### 3 数值算例

为了测试本文所提出的PC-u- $\sigma$ 型的物理覆盖, 设计了如下3种物理覆盖布置方案: ①NMM-u位于位移边界上的物理覆盖设置为PC-u型, 其他覆盖设为PC-u- $\varepsilon$ 型; ②NMM-u- $\varepsilon$ 所有物理覆盖均设为PC-u- $\varepsilon$ 型; ③NMM-u- $\sigma$ 在光滑应力边界上设置PC-u- $\sigma$ 型, 其他覆盖设为PC-u- $\varepsilon$ 型。

#### 3.1 PC-u- $\sigma$ 型有效性验证

对如图1所示的4种简单网格, 测试了不同约束方式对总体刚度矩阵秩的影响。如表1所示, 不施加任何约束时亏秩数为均为9个。施加刚体约束后, 亏秩数减少为6个。进而再施加PC-u- $\sigma$ 型应力边界条件, 亏秩数最终减少为4个, 证实了这种约束方式的有效性。对于最终亏秩的消除, 仍需约束其他的应变自由度, 下文将会介绍。

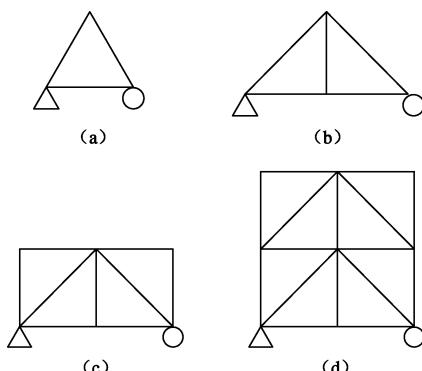


图1 4种简单测试网格

Fig. 1 Four kinds of meshes

表1 亏秩数比较

Table 1 Comparison of rank deficiency

约束	无约束/仅刚体约束/刚体约束+PC-u- $\sigma$ 型约束
网格	(a) (b) (c) (d)
亏秩数	9/6/4 9/6/4 9/6/4 9/6/4

#### 3.2 带孔无限板

中间带孔无限板在无穷远处施加水平拉力 $p$ 及其简化模型, 如图2所示。模型参数为:  $a=1$ ,  $p=1$ ,  $b=5$ ; 平面应变问题, 杨氏模量 $E=1000$ , 泊松比 $\nu=0.3$ 。左侧位移边界条件为:  $u=\bar{u}_{xy}=\bar{\omega}=0$ ; 底部位移边界条件为:  $v=\bar{u}_{xy}=\bar{\omega}=0$ ; 右侧及上部应力边界条件为公式(40)~(42); 内圆孔应力边界条件为:  $\bar{\sigma}_n=\bar{\tau}_{nt}=0$ 。

据参考文献[22], 其任意点处应力分量的解析解为

$$\sigma_{xx} = p \left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} \left[ \frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right] + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right\}, \quad (40)$$

$$\sigma_{yy} = -p \left\{ \frac{a^2}{r^2} \left[ \frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right] + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right\}, \quad (41)$$

$$\tau_{xy} = p \left\{ -\frac{a^2}{r^2} \left[ \frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right] + \frac{3a^4}{2r^4} \sin(4\theta) \right\}, \quad (42)$$

式中,  $a$ 为圆孔的半径,  $(r, \theta)$ 为以左下角点为原点的极坐标系。

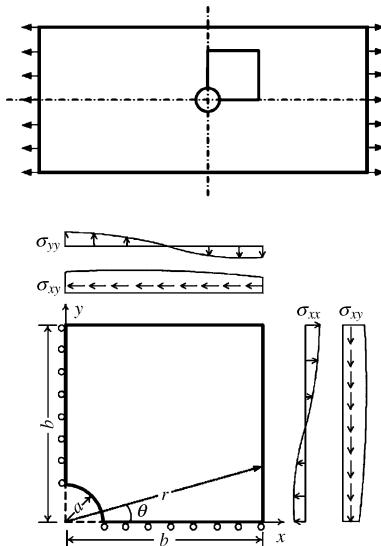


图2 带有圆孔的无限板

Fig. 2 Infinite plate with a circular hole

采用如图3所示的有限元网格构造数学覆盖。3种不同布置方案下的亏秩数统计如表2所示, Rank表示总体刚度矩阵的秩, RD (rank deficiency) 表示亏秩数; 底边界与左边界上的应力计算结果如图4和5所示。

示。综合得出如下结论：

(1) 施加位移或应力边界条件以后, 对于任一种的物理覆盖布置方案, 亏秩数均为常数, 并不依赖于网格形式和密度。

(2) 对于 NMM-u- $\epsilon$  型, 施加完位移边界条件后, 亏秩数显著减少, 但是仍不为 0, 说明对于这种物理覆盖布置方案, 线性相关问题依然存在, 并未完全解决。

(3) 对于 NMM-u- $\sigma$  型, 亏秩数为 0, 说明完全消除了线性相关现象。

(4) NMM-u 型, 亏秩数为 0, 虽然消除了线性相关, 但在靠近圆孔处的应力精度稍差。

因此, NMM-u- $\sigma$  型不仅消除了总体刚度矩阵的线性相关现象, 而且达到了满意的计算精度。

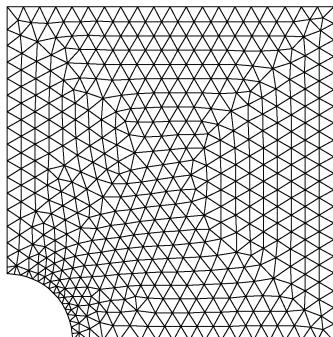


图 3 构造数学覆盖的有限单元网格

Fig. 3 Finite element mesh used to construct mathematical cover

表 2 带孔水平受拉平板的亏秩数统计

Table 2 Number of rank deficiencies of plate with circular hole under horizontal tensile force

NMM-u		NMM-u- $\epsilon$		NMM-u- $\sigma$	
Rank	RD	Rank	RD	Rank	RD
404	0	466	2	468	0
1122	0	1216	2	1218	0
2040	0	2158	2	2160	0
3138	0	3280	2	3282	0

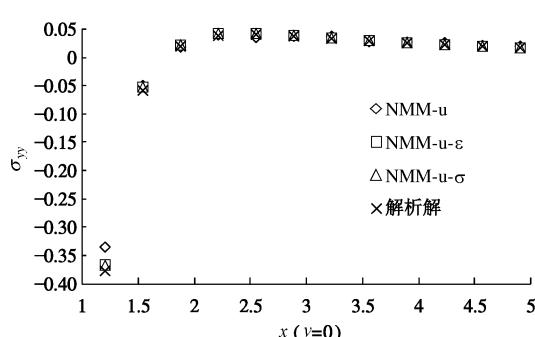


图 4 底部边界  $y$  方向应力分量比较

Fig. 4 Comparison of stress component in  $y$  direction at bottom boundary

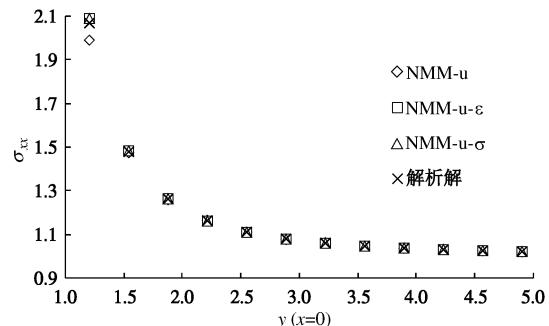


图 5 左侧边界  $x$  方向应力分量比较

Fig. 5 Comparison of stress component in  $x$  direction on left boundary

### 3.3 Cook 斜梁

Cook 斜梁模型尺寸如图 6 所示。梁的右侧施加剪切分布力  $F=1/16$ 。平面应力问题, 杨氏模量  $E=1.0$ , 泊松比  $\nu=1/3$ 。左侧为固定端, 位移边界条件为:  $u=v=\bar{\epsilon}_y=\bar{\omega}=0$ , 上部和底部应力边界条件为:  $\bar{\sigma}_n=\bar{\tau}_{nt}=0$ ; 右侧应力边界条件为:  $\bar{\sigma}_n=0$ 。图 7 为构造 Cook 斜梁中数学覆盖所使用的有限单元网格。

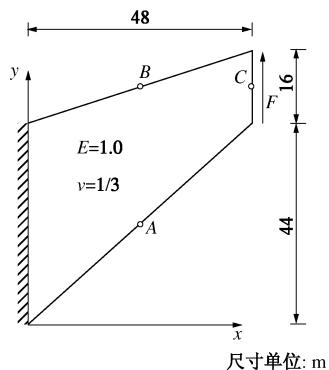


图 6 Cook 斜梁右侧受均布剪切力

Fig. 6 Cook skew beam suffering from distributed shear force at right side

Cook 斜梁在 3 种不同覆盖布置方案下的亏秩数统计, 如表 3 所示。可知 NMM-u- $\epsilon$  并未完全消除亏秩现象, 而另外两种类型解决了线性相关问题。同样亏秩数与网格密度与形状无关, 结论同表 2。

表 3 Cook 斜梁的亏秩数统计

Table 3 Number of rank deficiencies of Cook skew beam

NMM-u		NMM-u- $\epsilon$		NMM-u- $\sigma$	
Rank	RD	Rank	RD	Rank	RD
398	0	435	3	438	0
1044	0	1101	3	1104	0
1960	0	2037	3	2040	0
4132	0	4245	3	4248	0

Cook 斜梁中, 在不同的布置方案下, 分别对  $A$  的最大主应力,  $B$  点的最小主应力以及  $C$  点的竖向位移进行了比较, 结果如表 4 所示。可知, NMM-u- $\epsilon$

与 NMM-u- $\sigma$  型总体要稍好于 NMM-u 型, 且达到了很高的计算精度, 证实了程序的正确性。

表 4 3 个测量点处的应力与位移比较

Table 4 Comparison of stress and displacement for 3 measured points

方法	$\sigma_{\max A}$	$\sigma_{\min B}$	$V_c$
NMM-u	0.23703	-0.20294	23.9391
NMM-u- $\epsilon$	0.23609	-0.20294	23.9529
NMM-u- $\sigma$	0.23679	-0.20284	23.9516
参考值 <sup>[23]</sup>	0.2362	-0.2023	23.96

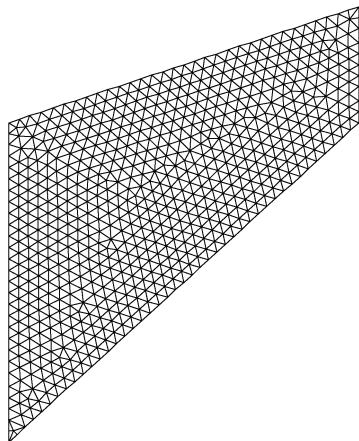


图 7 Cook 斜梁中用于构造数学覆盖的有限元网格

Fig. 7 Mathematical mesh in Cook skew beam

### 3.4 均质边坡

如图 8 所示, 均质边坡<sup>[24]</sup>, 边坡材料重度为  $\gamma = 19.62 \text{ kN/m}^3$ , 弹性模量  $E = 80 \text{ MPa}$ , 泊松比为  $\nu = 0.43$ 。两侧位移边界条件:  $u = 0$ , 底部位移边界条件:  $u = v = \bar{\omega} = 0$ , 顶部应力边界条件:  $\bar{\sigma}_n = \bar{\tau}_{nt} = 0$ 。模型的数学覆盖, 如图 9 所示。

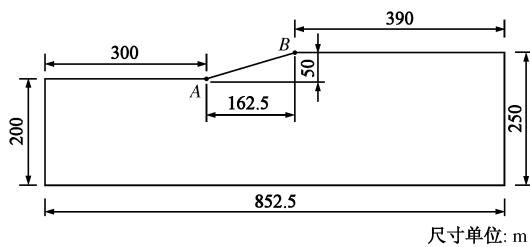


图 8 边坡模型尺寸

Fig. 8 Dimensions of slope mode

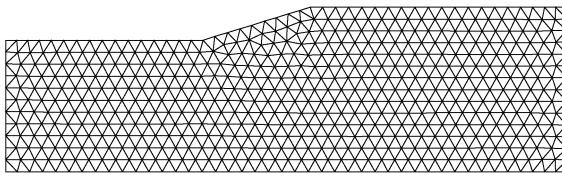


图 9 模型网格划分

Fig. 9 Mathematical cover in slope model

边坡算例在 3 种不同覆盖布置方案下的亏秩数及测量点 A 和 B 的水平和竖向位移分别如表 5 和 6 所示。对本例 NMM-u- $\sigma$  型消除了总体刚度矩阵的线性相关现象且保持较高的计算精度。

表 5 边坡算例的亏秩数统计

Table 5 Number of rank deficiencies of slope model

NMM-u		NMM-u- $\epsilon$		NMM-u- $\sigma$	
Rank	RD	Rank	RD	Rank	RD
506	0	614	4	618	0
802	0	938	4	942	0
1406	0	1586	4	1590	0
3276	0	3548	4	3552	0

表 6 两个测量点处的水平与竖向位移比较

Table 6 Comparison of horizontal and vertical displacements at two measured points

方法	A 点水平位移	A 点竖向位移	B 点水平位移	B 点竖向位移
NMM-u	-0.57809	-1.607	-0.41997	-2.7859
NMM-u- $\epsilon$	-0.57863	-1.6071	-0.42014	-2.7864
NMM-u- $\sigma$	-0.57767	-1.6071	-0.42054	-2.7871
参考值 <sup>[25]</sup>	-0.5792	-1.6074	-0.4207	-2.7847

## 4 结语

数值流形法中物理覆盖上的局部位移函数采用 1 阶泰勒展开形式, 使得定义其上的自由度具备物理意义, 方便了位移和应力边界条件的施加。

边界上采用不同的物理覆盖布置方案对比发现: 位移边界采用 PC-u 型, 消除了线性相关现象, 但会减弱边界计算精度; PC-u- $\epsilon$  型达到了很高的精度, 但是依然存在线性相关现象, 且亏秩数与三角形网格形式和密度无关; 应力边界上施加 PC-u- $\sigma$  型, 有效地消除了线性相关问题, 并达到了很高的计算精度。

## 参考文献:

- [1] 王水林, 葛修润. 流形元方法在模拟裂纹扩展中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1997, 16(5): 405 - 410. (WANG Shui-lin, GE Xiu-run. Application of manifold method in simulating crack propagation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1997, 16(5): 405 - 410. (in Chinese))
- [2] 韩有民, 罗先启, 王水林, 等. 裂纹扩展时物理覆盖与流形元的生成算法[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(6): 662 - 666. (HAN You-min, LUO Xian-qi, WANG Shui-lin, et al. Formulation algorithm of covers and manifold elements in NMM during propagation of cracks[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(6): 662 - 666. (in Chinese))
- [3] 曹文贵, 速宝玉. 流形元覆盖系统自动形成方法之研究[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(2): 187 - 190. (CAO Wen-gui, SU Bao-yu. A study on techniques of automatically forming of cover system of numerical manifold method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(2): 187 - 190. (in Chinese))

- [4] 凌道盛, 何淳健, 叶 茂. 数值流形单元法数学网格自适应[J]. 计算力学学报, 2008, 25(2): 201 - 205. (LING Dao-sheng, HE Chun-jian, YE Mao. Mathematical mesh adaptation of numerical manifold element method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2008, 25(2): 201 - 205. (in Chinese))
- [5] 朱爱军, 邓安福, 曾祥勇. 数值流形方法对岩土工程开挖卸荷问题的模拟[J]. 岩土力学, 2006, 27(2): 179 - 183. (ZHU Ai-jun, DENG An-fu, ZENG Xiang-yong. Numerical manifold method for simulation of excavation unloading in geotechnical engineering[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(2): 179 - 183. (in Chinese))
- [6] BABUSKA I, MELENK J M. Partition of unity method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40(4): 727 - 758.
- [7] ODEN J T, DUARTE C A, ZIENKIEWICZ O C. A new cloud-based hp finite element method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 153(1/2): 117 - 126.
- [8] STROUBOULIS T, COPPS K, BABUSKA I. The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 47: 1401 - 1417.
- [9] STROUBOULIS T, BABUSKA I, COPPS K. The design and analysis of the generalized finite element method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 181: 43 - 69.
- [10] SHI G H. Manifold method[C]// Proceedings of the First International Forum on Discontinuous Deformation Analysis (DDA) and Simulations of Discontinuous Media, TSI Press, Albuquerque, New Mexico, USA, 1996: 52 - 204.
- [11] CHEN G, OHNISHI Y, ITO T. Development of higher-order manifold method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 43: 685 - 712.
- [12] LIN J S. A mesh-based partition of unity method for discontinuity modeling[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192: 1515 - 1532.
- [13] TIAN R, YAGAWA G, TERASAKA H. Linear dependence problems of partition of unity-based generalized FEMs[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195: 4768 - 4782.
- [14] 蔡永昌, 张湘伟. 使用高阶覆盖位移函数的数值流形方法及其应力精度的改善[J]. 机械工程学报, 2000, 36(9): 20 - 24. (CAI Yong-chang, ZHANG Xiang-wei. Expansions to high-order cover function and improvement of the stress accuracy in numerical manifold method[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2000, 36(9): 20 - 24. (in Chinese))
- [15] CAI Y C, ZHUANG X Y, AUGARDE C. A new partition of unity finite element free from the linear dependence problem and possessing the delta property[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199: 1036 - 1043.
- [16] TIAN R, YAGAWA G. Generalized nodes and high-performance elements[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 64: 2039 - 2071.
- [17] TIAN R, MASTUBARA H, YAGAWA G. Advanced 4-node tetrahedrons[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 68: 1209 - 1231.
- [18] RIKER C, HOLZER S M. The mixed-cell-complex partition-of-unity method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 198: 1235 - 1248.
- [19] RAJENDRAN S, ZHANG B R. A “FE-meshfree” QUAD4 element based on partition of unity[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 197: 128 - 147.
- [20] AN X M, LI L X, MA G W, et al. Prediction of rank deficiency in partition of unity-based methods with plane triangular or quadrilateral meshes[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(5/6/7/8): 665 - 674.
- [21] 郭朝旭. 高阶数值流形方法中线性相关问题的研究[D]. 宜昌: 三峡大学, 2012. (GUO Chao-xu. Study on linear dependence problem in high-order numerical manifold method[D]. Yichang: China Three Gorges University, 2012. (in Chinese))
- [22] TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. Theory of elasticity[M]. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [23] COOK R D, MALKUS D S, PLESHA M E. Concepts and applications of finite element analysis[M]. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons Inc, 1989.
- [24] ZHENG H, LIU D F, LI C G. Slope stability analysis based on elasto-plastic finite element method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, 64(14): 1871 - 1888.
- [25] 杨永涛, 郑 宏, 张建海. 基于三角形网格的虚多边形有限元法[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(6): 1214 - 1221. (YANG Yong-tao, ZHENG Hong, ZHANG Jian-hai. A virtual polygonal finite element method based on triangular mesh[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, 32(6): 1214 - 1221. (in Chinese))