

DOI: 10.11779/CJGE201403007

# 粒状材料临界状态的颗粒级配效应

李 罡<sup>1, 3</sup>, 刘映晶<sup>1, 2</sup>, 尹振宇<sup>1, 2\*</sup>, Christophe Dano<sup>1</sup>, Pierre-Yves Hicher<sup>1</sup>

(1. 南特中央理工大学土木与力学学院, 南特 44300; 2. 上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院土木工程系, 上海 200240;  
3. 中交第三航务工程勘察设计院有限公司, 上海 200032)

**摘要:** 采用理想颗粒材料(DEM 理想球体)、人工颗粒材料(玻璃球)和天然颗粒材料(Hostun 砂), 通过数值和室内常规三轴排水试验研究了颗粒材料级配对其应力-应变响应和临界状态的影响规律。试验结果表明: 在相同加载初始条件下( $e_0 = 0.574$ ,  $p'_0 = 400$  kPa), 随着不均匀系数  $C_u$  ( $d_{60}/d_{10}$ ) 的增大, 试样在  $q - \varepsilon_1$  平面上从剪胀变为剪缩, 在  $\varepsilon_v - \varepsilon_1$  平面上表现出由应变软化转变为应变硬化的特性。通过不同围压下的三轴排水试验, 在  $e - p'$  和  $q - p'$  平面上分别对不同级配的颗粒材料集合体绘制了临界状态线,  $e - p'$  平面随着  $C_u$  的增大临界状态线往下偏移, 而在  $q - p'$  平面上临界状态线不随  $C_u$  的改变而改变。

**关键词:** 颗粒级配; 离散单元法; 三轴排水试验; 临界状态; 粒状材料

中图分类号: TU411 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2014)03-0452-06

作者简介: 李 罡(1984-), 男, 博士研究生, 主要从事土力学研究。E-mail: engineer.ligang@gmail.com.

## Grading effect on critical state behavior of granular materials

LI Gang<sup>1,3</sup>, LIU Ying-jing<sup>1,2</sup>, YIN Zhen-yu<sup>1,2</sup>, Christophe Dano<sup>1</sup>, Pierre-Yves Hicher<sup>1</sup>

(1. Research Institute of Civil and Mechanical Engineering, UMR CNRS, 6183, Ecole Centrale Nantes, Nantes 44300, France; 2.

Department of Civil Engineering, School of Naval Architecture, Ocean & Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China; 3. CCCC Third Harbor Consultants Co., Ltd., Shanghai 200032, China)

**Abstract:** By adopting the idealized granular materials (DEM sphere), artificial materials (glass bead) and natural materials (Hostun sand), the grading effect on the stress-strain and the critical state behavior of granular materials is investigated through numerical and conventional drained triaxial tests. The results reveal that for the samples with the same initial loading conditions ( $e_0 = 0.574$ ,  $p'_0 = 400$  kPa), granular materials with a wider particle distribution display more contractive behavior and also strain hardening upon shearing. Furthermore it is found that the critical state line in the  $e-p'$  plane shifts downward as grading broadens with an increase of the coefficient of uniformity  $C_u$ , whereas the critical state line in the  $q-p'$  plane appears to be independent of the coefficient of uniformity  $C_u$ .

**Key words:** grain size distribution; DEM; triaxial drained test; critical state; granular material

## 0 引言

颗粒材料在土木工程中有广泛的应用, 如堆石坝、碎石路基、铁路道砟等, 大部分颗粒材料在外力的作用下很容易产生颗粒破碎<sup>[1-3]</sup>, 在工程实践中发现颗粒破碎往往进一步引发结构物的大变形严重的甚至导致结构整体失稳<sup>[4-5]</sup>。通过研究发现, 颗粒材料的破碎导致颗粒级配的变化, 进而会引起颗粒材料力学性质的改变, 例如: Coop<sup>[6]</sup>和 Verdugo 等<sup>[7]</sup>发现, 加载过程中颗粒破碎导致的颗粒级配的变化将引起的试样体积收缩以及峰值强度的降低。此外 Biarez 等<sup>[8]</sup>, Daouadji 等<sup>[9]</sup>和 Hu 等<sup>[1]</sup>发现, 随着颗粒破碎的增加, 不均匀系数  $C_u$  逐步增大, 相应的临界状态线(CSL)在  $e-p'$  平面上逐渐降低; 尹振宇等<sup>[10]</sup>综合探讨了粒状

材料的颗粒破碎的本质是颗粒级配的变化, 指出颗粒破碎可以由反映颗粒级配变化的破碎因子来描述; 采用 PFC<sup>3D</sup> 模拟颗粒级配对材料应力应变特性和临界状态的影响, 得到临界状态线的位置随着不均匀系数  $C_u$  的增大而下移。

临界状态理论是目前工程设计计算时所采用的诸多本构模型的基本理论依据, 因此, 研究级配效应对临界状态的影响具有重要的科研和工程价值。

基金项目: 国家自然科学基金项目(41240024, 51161130523); 欧盟玛丽居里行动计划项目(PIAPP-GA-2011-286397); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20110073120012)

收稿日期: 2013-03-12

\*通讯作者

需要指出的是上述结论都是基于易破碎材料的研究得到的, 而颗粒破碎引起的级配变化是一个动态过程, 很难定量建立级配变化与临界状态的关系。因此有必要采用坚硬的非破碎材料通过改变其初始级配并保持在加载过程中级配不变来研究级配效应对临界状态的影响, 进而为破碎问题的研究提供依据与旁证。

Wood 等<sup>[11]</sup>采用二维离散单元法(2D-DEM)证实了在不考虑破碎材料的情况下, 圆盘颗粒的临界状态线在  $e-p'$  平面上的位置会随着试样的初始不均匀系数  $C_u$  的增大而降低。Yan 等<sup>[12]</sup>采用三维离散单元法(3D-DEM)也进一步证实这一结论。然而这些研究采用的不均匀系数  $C_u$  都相对较小 ( $C_u < 2.6$ ), 另外其提供的室内试验数据与 DEM 的关联性不够强。此外按照美国试验标准规范( ASTM standards, D 2487-83), 土体材料按其直径大小的不同可分为砂砾(gravel)、砂(sand)、粉土(silt)、黏土(clay), 以往的室内试验为了突出级配效应, 多采用粉土和砂的混合物来研究级配对临界状态的影响<sup>[13]</sup>, 很明显粉土和砂土的力学性能是迥然有别的, 因此应当按照规范采用一种材料进而突出级配效应。

有鉴于此, 笔者采用三维离散单元法, 通过三轴排水试验研究了理想颗粒材料级配对其力学性能的影响。此外参照美国试验标准规范分类标准取直径范围在 0.08~2 mm 的砂颗粒作为研究对象, 选取两种在试验过程中可认为没有破碎的坚硬颗粒材料(人工材料玻璃球; 天然材料 Hostun 砂), 配置更广的级配分布, 通过室内常规三轴排水试验进一步研究, 验证了颗粒材料的级配对其力学性能的影响。

## 1 试验方案

试验采用颗粒级配的分布为  $C_u=1.1\sim20$ , 并控制所有级配的  $d_{50}$  一致, 级配曲线如图 1 所示。这里需要指出的是由于受到计算时间的限制, 对于数值三轴试验, 试样的最大不均匀系数取到 5.0。

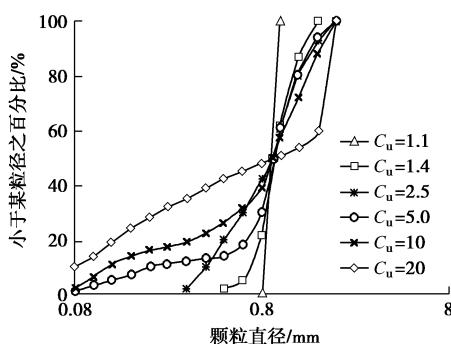


图 1 颗粒级配曲线

Fig. 1 Grain size distribution

### 1.1 理想材料三轴试验

对于 DEM 数值三轴试验, 笔者应用 PFC<sup>3D</sup>, 按照图 1 所示的级配, 通过随机生成不同直径大小的球单元来模拟理想颗粒材料, 采用墙单元模拟边界条件。球单元之间以及球单元与墙单元之间的接触关系采用简单线弹性接触模型, 为了减少墙体刚度对颗粒集合体刚度的影响, 墙体刚度取球体刚度的 0.1 倍。具体的模型参数如表 1 所示。

表 1 DEM 参数

Table 1 Properties of DEM specimens

参数	密度 /(kg·m <sup>-3</sup> )	法向接触刚 度/(N·m <sup>-1</sup> )	切向接触刚 度/(N·m <sup>-1</sup> )	摩擦 系数
球	2630	$1.5\times 10^8$	$1.5\times 10^8$	0.5
墙体	0.0	$1.5\times 10^7$	$1.5\times 10^7$	0.0

首先试样按照指定的孔隙率, 采用直径膨胀法初步生成, 然后通过自动伺服机制施加指定的三维等向固结应力(100, 200, 400 kPa)进行等向固结直至平衡。在试样生成以后, 保持水平方向应力不变的情况下通过控制上下两面墙单元的竖向移动速率来模拟排水剪切试验, 数值实验中没有考虑水的影响。

### 1.2 人工及天然材料三轴试验

对于室内常规三轴试验, 采用的试验材料是人工材料玻璃球和天然材料 Hostun 砂。这两种材料的抗压强度较高, 试验后量测的破碎系数  $B_f$ <sup>[1]</sup>近乎为 0。因此在给定的加载条件下可以认为没有产生颗粒破碎, 进而表明加载过程中试样的级配不发生改变。

需要指出的是, 对于人工材料玻璃球, 由于是采用标准化生产, 因此其颗粒的形状几乎一致。然而对于 Hostun 砂, 由于其是天然材料(由天然的 Hostun 岩块破碎产生), 颗粒形状并不能保持完全一致, 尤其是不同粒径下的颗粒形状<sup>[14]</sup>。颗粒的形状对于材料的力学性质影响很大, 研究发现: 随着颗粒材料的形状不规则程度的增加, 最大孔隙率  $\epsilon_{max}$  和最小孔隙率  $\epsilon_{min}$  会增大<sup>[8]</sup>; 试样的刚度会减小<sup>[15]</sup>; 临界状态摩擦角  $\phi_{cs}$  会增大<sup>[15]</sup>。甚至有研究表明, 颗粒的形状会影响临界状态线在  $e-p'$  平面上的位置<sup>[8, 16]</sup>。因此, 为了突出研究颗粒级配对颗粒材料临界状态的影响, 试验所用的材料必须排除颗粒形状因素的影响。

基于法国南特中央理工大学的扫描电镜(scanning electron microscope)获取了不同粒径下 Hostun 砂的形状参数  $\beta$ <sup>[17]</sup>, 并通过统计对比分析了其相似性。 $\beta$  值的定义如下:

$$\beta = L_M/L_m \quad , \quad (1)$$

式中,  $L_M$ ,  $L_m$  分别是单颗粒最小外切矩形的长边和短边, 如图 2(c) 所示。颗粒的图像分析过程主要分为

以下两个步骤：图像处理（获取每个颗粒的  $\beta$  值）和数学统计（分析  $\beta$  值的分布）。

图像处理分为以下两个步骤（如图 2 所示）：①通过扫描电镜获取颗粒图片；②利用开源软件 ImagJ 二值化处理图片并自动获取颗粒最小外切矩型的长边值和短边值。

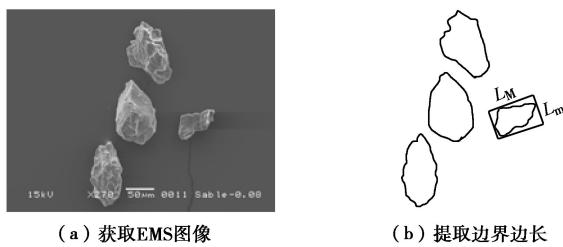


图 2 颗粒图像处理

Fig. 2 Process of digital image processing

图 3 展示了在 0.08~2 mm 范围内 Hostun 砂  $\beta$  值的数学统计结果（共 860 颗）。从统计图中可以看出  $\beta$  值基本上位于 1.0~1.4 之间，相应的累积频数超过了 80%。基于以上分析结果，可以认为在采用此直径范围内的 Hostun 砂的形状是相似的，能够满足试验要求。

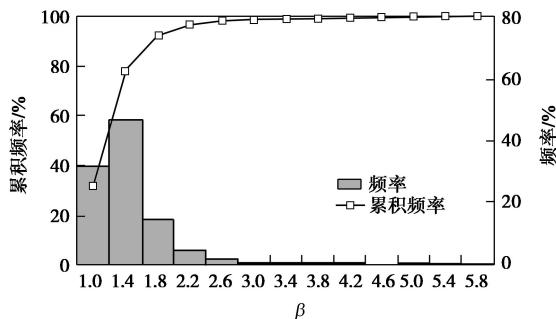


图 3 颗粒形状参数统计直方图

Fig. 3 Histogram of particle analysis

为了减少加载过程中的局部化应变，采用湿砂分层法<sup>[18]</sup>制作松散的试样，试样的直径为 100 mm，高 200 mm。室内三轴排水试验通过控制应变速率进行加载，对同一种级配的试样分别做 3 组不同围压（100, 200, 400 kPa）下的剪切试验。

## 2 试验结果及分析

按照从理想材料到天然材料的框架，完整分析了颗粒级配对颗粒材料应力应变特性的影响。通过数值试验研究了相同加载初始条件下（相同初始孔隙率和围压）的颗粒材料应力应变响应，并通过室内试验进行推广验证。

### 2.1 颗粒材料级配对应力应变关系的影响

采用离散单元法可以避开常规室内试验量测的缺陷，能够精确的控制所需试样的初始条件，包括初始

孔隙率和围压。利用 DEM 的这一优点，配置相同初始孔隙率和围压的不同级配的试样，对颗粒材料级配对应力应变关系的影响进行研究。

图 4 展示了不同级配下颗粒材料的应力应变响应。由图可见，在相对较高的应变水平下（轴向应变高于 25%），所有的试样都到达了所谓的临界状态。

图 4 (a) 给出了轴向应变与偏应力的关系，从图中可以看出，在相同的初始加载条件下 ( $e_0=0.574$ ,  $p_0'=400$  kPa) 所有的试样的临界状态偏应力均相同而与级配无关，然而偏应力的峰值表现出级配相关性：不均匀系数  $C_u$  小的试样 ( $C_u=1.4$ )，其最大剪切强度值较大，而对于不均匀系数  $C_u$  较大的试样 ( $C_u=5.0$ )，剪切强度值较小（为残余强度也即临界强度）。随着不均匀系数  $C_u$  的增大，偏应力峰值随着降低，材料由应变软化转变为应变硬化的特性。

图 4 (b) 展示出，3 种级配试样在剪切到较大应变水平（20%）后，其体积应变保持不变，轴向应变一直在发展；随着不均匀系数  $C_u$  的增大，试样在  $\varepsilon_v - \varepsilon_l$  平面上表现出从剪胀到剪缩转化的规律。

图 4 (c) 显示，尽管初始孔隙率相同，不同级配的试样到达临界状态时的最终孔隙率不同，然而临界状态下的平均有效应力相近。

从图 4 (d) 可见，随着试样不均匀系数  $C_u$  的增大，其峰值应力比逐渐下降，意味着峰值摩擦角在减小。在达到临界状态时，不同级配的颗粒材料的应力比是相同的，也即临界状态摩擦角不随级配的改变而改变。

### 2.2 基于级配效应的极限状态线研究

图 5 分别展示了，3 种颗粒材料在  $q - p'$  平面（图 5 (a)、5 (b)、5 (c)）和  $e - p'$  平面（图 5 (d)、5 (e)、5 (f)）上不同级配的试样在不同围压下达到的临界状态点（每一个点代表一个三轴试验结果），如图中虚线所示。

在  $q - p'$  平面上的临界状态线采用线性方程拟合，DEM、玻璃球试验和 Hostun 砂试验的直线斜率分别是 0.79, 0.8 和 1.1。 $e - p'$  平面上的临界状态线按照 Li 等<sup>[19]</sup>建议的如下公式拟合：

$$e_c = e_{\text{ref}} - \lambda \left( \frac{p'}{p_{\text{at}}} \right)^{\xi} \quad (2)$$

式中， $e_c$  是平均有效应力  $p'$  对应的临界状态孔隙率， $e_{\text{ref}}$  是参照孔隙率，确定了临界状态线的高低， $\lambda$  确定了临界状态线的斜率（ $\xi$  是材料参数通常取为 0.9<sup>[12]</sup>， $p_{\text{at}}$  是大气压力，取为 101.3 kPa）。

由图 5 (a) ~ 5 (c) 可以看出，在  $q - p'$  平面上，同一种材质不同级配材料的临界状态点都落在同一临

界状态线上, 临界状态线并不随着材料不均匀系数  $C_u$  的改变而改变, 也即材料的临界应力比相同。由此可知材料的临界状态摩擦角并不随级配的改变而变化。

由图 5(d)~5(f) 可以看出与临界状态应力比

不同, 在  $e - p'$  平面上, 对于相同材质级配相同的材料, 临界状态线是唯一的, 均可用式(2)描述; 而对于相同材质而不均匀系数  $C_u$  不同的材料, 随着颗粒材料不均匀系数  $C_u$  的逐渐增大, 临界状态线逐渐下移。

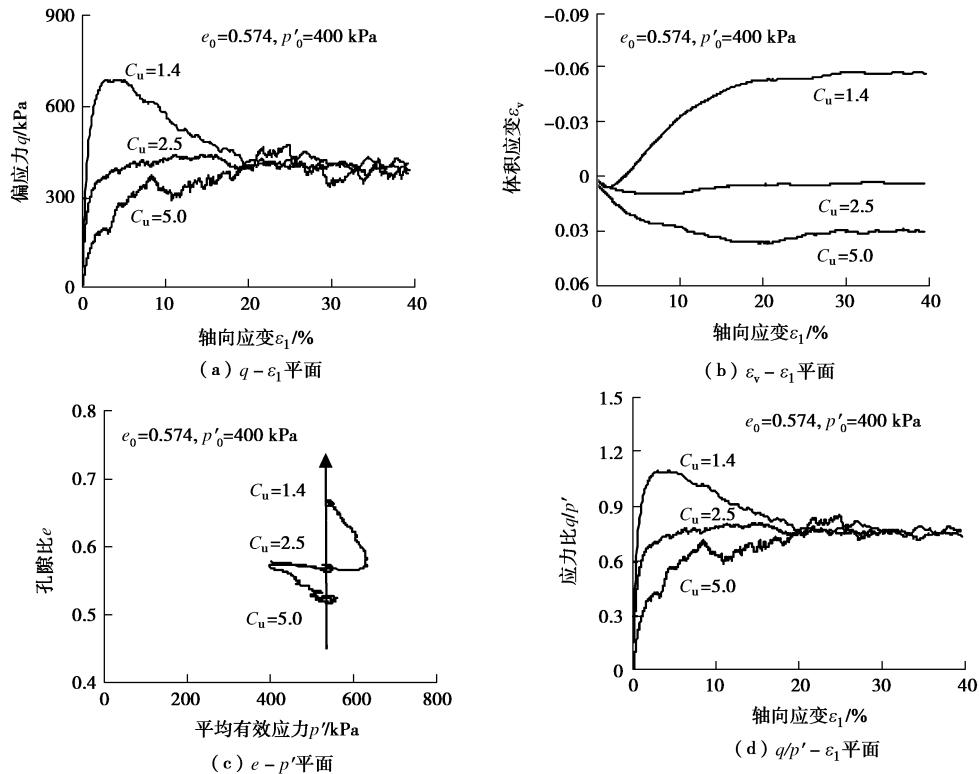


图 4 数值模拟颗粒级配对应力应变响应的影响

Fig. 4 Numerical simulation of GSD effect on stress-strain responses

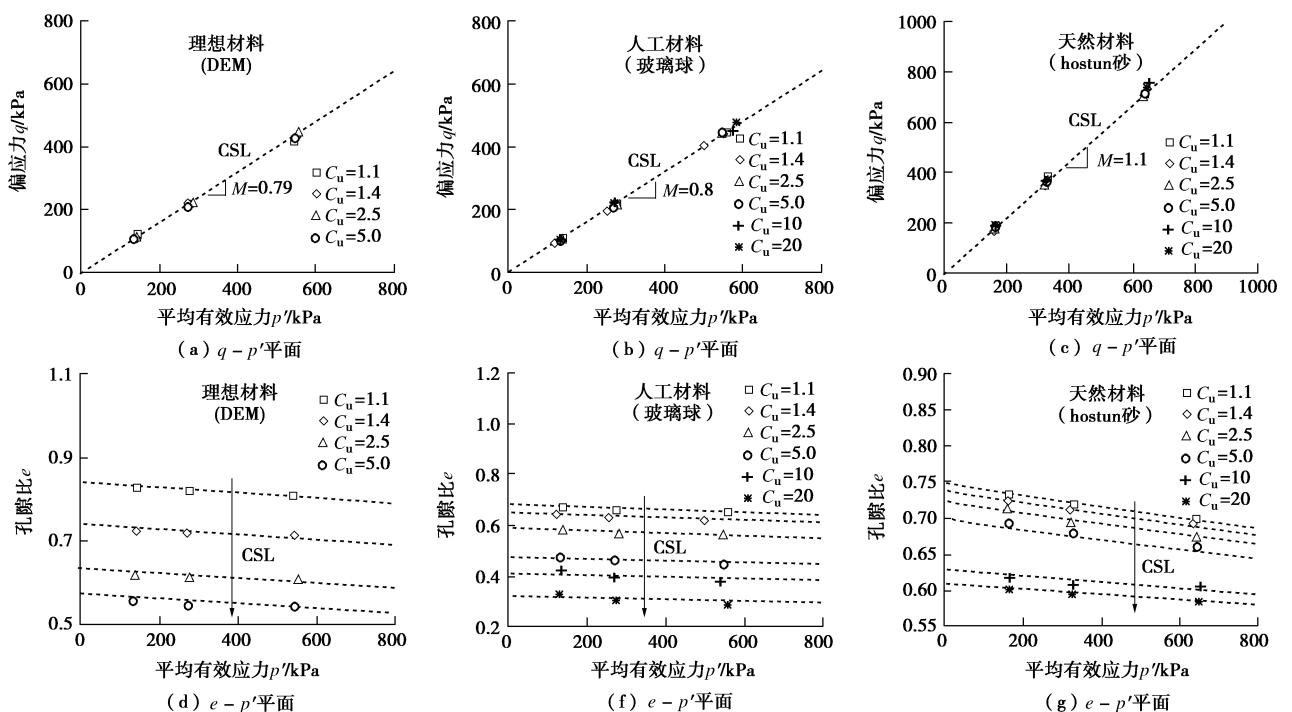


图 5 3 种材料的临界应力状态线

Fig. 5 Critical state lines of three materials

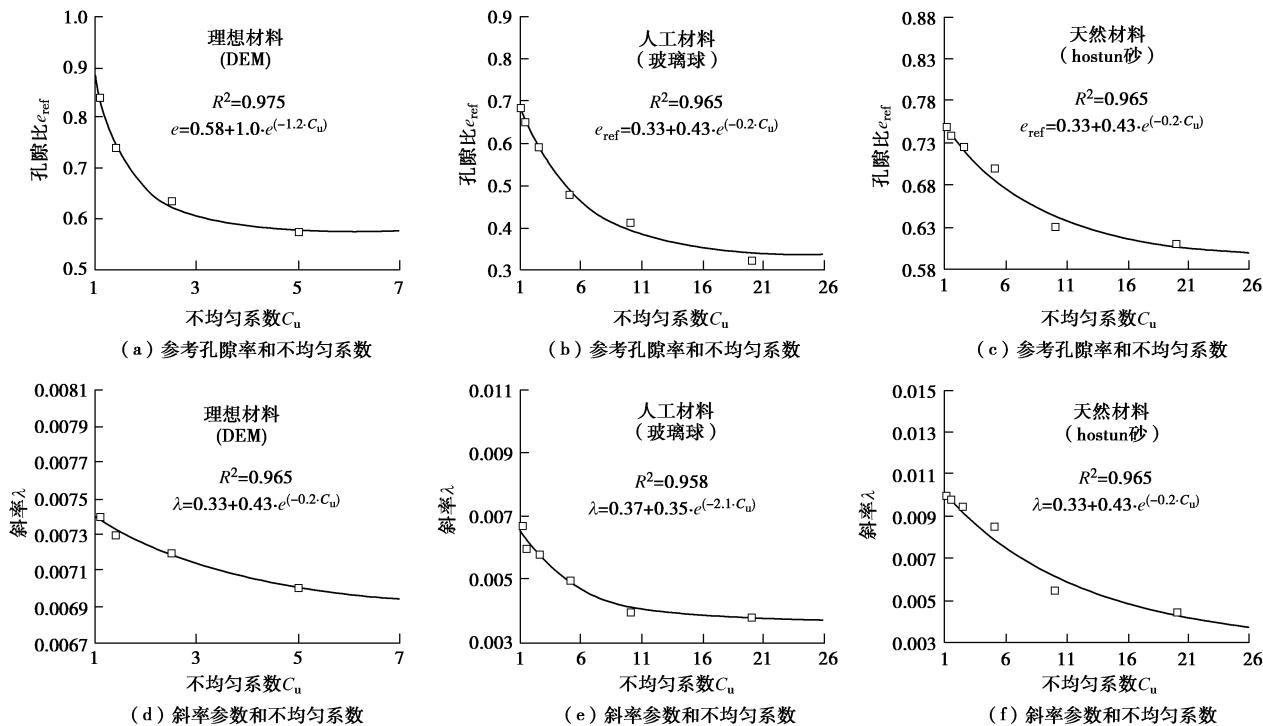


图 6 临界状态系数随不均匀系数变化规律

Fig. 6 Relationship between critical state parameters and coefficient of uniformity

由式(2)可知,对于给定的材料,当 $p_{at}$ 和 $\zeta$ 给定时,临界状态线可以通过两个参数确定( $e_{ref}$ 和 $\lambda$ ),拟合参数如表2所示。

图6按照指数形式的方程拟合了参照孔隙率( $e_{ref}$ )以及斜率 $\lambda$ 和不均匀系数 $C_u$ 的关系。由图可知随着不均匀系数 $C_u$ 的逐步增大,参照孔隙率 $e_{ref}$ 和斜率 $\lambda$ 逐渐下降。对于玻璃球和Hostun砂,在 $C_u$ 高于10以后,参照孔隙率 $e_{ref}$ 以及斜率 $\lambda$ 逐渐趋于平缓。

表 2 3 种颗粒材料的临界状态线系数

Table 2 Critical state parameters of three granular materials

$C_u$	DEM		玻璃球		Hostun 砂	
	$e_{ref}$	$\lambda$	$e_{ref}$	$\lambda$	$e_{ref}$	$\lambda$
1.1	0.840	$7.4 \times 10^{-3}$	0.685	$6.7 \times 10^{-2}$	0.750	$1.0 \times 10^{-2}$
1.4	0.740	$7.3 \times 10^{-3}$	0.650	$6.0 \times 10^{-3}$	0.740	$9.8 \times 10^{-3}$
2.5	0.635	$7.2 \times 10^{-3}$	0.590	$5.8 \times 10^{-3}$	0.725	$9.5 \times 10^{-3}$
5.0	0.575	$7.0 \times 10^{-3}$	0.477	$5.0 \times 10^{-3}$	0.700	$8.5 \times 10^{-3}$
10			0.410	$4.0 \times 10^{-3}$	0.630	$5.5 \times 10^{-3}$
20			0.320	$3.8 \times 10^{-3}$	0.610	$4.4 \times 10^{-3}$

### 3 结 论

分别采用理想材料、人工材料、天然材料,通过数值和室内三轴排水试验,研究了颗粒级配对颗粒材料应力应变特性和临界状态力学特性的影响,得到了以下结论:

(1) 颗粒级配对临界状态线在 $e-p'$ 平面上的位置

置影响明显,随着不均匀系数 $C_u$ 的增大,临界状态线在 $e-p'$ 平面上逐步降低。

(2) 在排水条件下颗粒级配并不影响临界状态线在 $q-p'$ 平面上的位置,也即临界状态应力与级配无关,颗粒级配并不影响临界状态摩擦角。

(3) 在相同加载初始条件下,颗粒级配对材料应力应变关系的影响显著,随着不均匀系数 $C_u$ 的增大,在 $q-\varepsilon_1$ 平面上试样由应变软化转变为应变硬化。

(4) 在相同加载初始条件下,在 $\varepsilon_v-\varepsilon_1$ 平面上随不均匀系数的增大,试样由剪胀特性转变为剪缩特性。

(5) 临界状态参数参照孔隙率 $e_{ref}$ 以及斜率 $\lambda$ 和不均匀系数 $C_u$ 存在幂函数变化规律。

### 参考文献:

- [1] HU W, YIN Z Y, DANO C, et al. A constitutive model for granular materials considering grain breakage[J]. Science China Technological Sciences, 2011, 54(8): 2188 - 2196.
- [2] 刘汉龙, 孙逸飞, 杨 贵, 等. 粗粒料颗粒破碎特性研究述评[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2012, 40(4): 361 - 369.  
(LIU Han-long, SUN Yi-fei, YANG Gui, et al. A review of particle breakage characteristics of coarse aggregates[J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 2012, 40(4): 361 - 369. (in Chinese))
- [3] 孙海忠, 黄茂松. 考虑颗粒破碎的粗粒土临界状态弹塑性本构模型[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(8): 1284 - 1290.

- (SUN Hai-zhong, HUANG Mao-song. Critical state elasto-plastic model for coarse granular aggregates incorporating particle breakage[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **32**(8): 1284 – 1290. (in Chinese))
- [4] FOURIE A B, PAPAGEORGIOU G. Defining an appropriate steady state line for Merriespruit gold tailings[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2001, **38**(4): 695 – 706.
- [5] HU W. Contribution a l'étude de l'effet d'échelle dans les matériaux granulaires[D]. Nantes: Ecole Centrale de Nantes, 2009. (HU W. Contribution to the scale effect of granular materials[D]. Nantes: Central University of Nantes, 2009. (in French))
- [6] COOP M. The mechanics of uncemented carbonate sands[J]. Géotechnique, 1990, **40**(4): 607 – 626.
- [7] VERDUGO R, HOZ K. Strength and stiffness of coarse granular soils[C]// Proceeding of Geotechnical Symposium Soil Stress-Strain Behavior: Measurement, Modeling and Analysis. Rome, 2007: 243 – 252.
- [8] BIAREZ J, HICHER P Y. Influence de la granulométrie et de son évolution par ruptures de grains sur le comportement mécanique de matériaux granulaires[J]. Revue Française de Génie Civil, 1997, **1**(4): 607 – 631. (Influence of grains breakage on the mechanical behaviors of granular materials [J]. Journal of French Civil Engineering, 1997, **1**(4): 607 – 631. (in French))
- [9] DAOUADJI A, HICHER P Y, RAHMA A. An elastoplastic model for granular materials taking into account grain breakage[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2001, **20**(1): 113 – 137.
- [10] 尹振宇, 许 强, 胡 伟. 考虑颗粒破碎效应的粒状材料本构研究: 进展及发展[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(12): 2170 – 2180. (YIN Zhen-yu, XU Qiang, HU Wei. Constitutive relations for granular materials considering particle crushing: review and development[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(12): 2170 – 2180. (in Chinese))
- [11] WOOD D M, MAEDA K. Changing grading of soil: effect on critical states[J]. Acta Geotechnica, 2007, **3**(1): 3 – 14.
- [12] YAN W, DONG J. Effect of particle grading on the response of an idealized granular assemblage[J]. International Journal of Geomechanics, 2011, **11**(4): 276 – 285.
- [13] BELKHATIR M, ARAB A, SCHANZ T, et al. Laboratory study on the liquefaction resistance of sand-silt mixtures: effect of grading characteristics[J]. Granular Matter, 2011, **13**(5): 599 – 609.
- [14] YUDHBIR, ABEDINZADEH R. Quantification of particle shape and angularity using the image analyzer[J]. Geotechnical Testing Journal, 1991, **14**(3): 296 – 308.
- [15] CHO G, DODDS J, SANTAMARINA J. Particle shape effects on packing density, stiffness, and strength: natural and crushed sands[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2006, **132**(5): 591 – 602.
- [16] MAEDA K, FUKUMA M, NUKUDANI E. Macro and micro critical states of granular materials with different grain shapes[C]// Proceeding of the 6th International Conference on Micromechanics of Granular Media. Golden, 2009: 829 – 832.
- [17] CAVARRETTA I. The influence of particle characteristics on the engineering behaviour of granular materials[D]. London: Imperial College, 2009.
- [18] ISHIHARA K. Liquefaction and flow failure during earthquakes[J]. Géotechnique, 1993, **43**(3): 351 – 415.
- [19] LI X S, WANG Y. Linear representation of steady-state line for sand[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1998, **124**(12): 1215 – 1217.