

DOI: 10.11779/CJGE201403001

# 散粒介质三维应力 - 组构解析与破坏分析

刘 洋<sup>1</sup>, Ching S Chang<sup>2</sup>, 张 铎<sup>1</sup>, 汪成林<sup>1</sup>

(1. 北京科技大学土木与环境工程学院, 北京 100083; 2. 麻省大学阿默斯特分校, 马塞诸塞州 01003)

**摘 要:** 基于散粒体宏 - 微观力学分析, 首先提出了 3 类张量的概念, 推导了散粒体三维应力 - 组构关系, 接着给出了二维和轴对称条件下的应力 - 组构解析表达式, 并采用双轴和三轴离散元 (DEM) 模拟结果对解析解进行了验证分析。最后基于应力 - 组构解析, 采用“真应力”的概念分析了散粒体的强度问题。研究表明: 散粒体中的应力分布受 3 类张量的共同影响, 双轴与三轴的离散元模拟与解析关系较吻合。在略去了高阶项后, 二维应力 - 组构关系式与 Rothenburg 等提出的表达式一致。进一步的分析表明: 散粒材料强度受控于“真应力”, 表观活动摩擦角的变化实质是颗粒摩擦和各向异性组构共同作用的结果。研究成果可以用于分析散粒体各向异性强度特征和本构关系。

**关键词:** 散粒介质; 各向异性; 应力 - 组构关系; 解析; 离散元

中图分类号: TU441

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 4548(2014)03 - 0401 - 08

**作者简介:** 刘 洋(1979 - ), 男, 江苏徐州人, 博士, 副教授, 主要从事土细观力学和砂土液化方面的研究与教学工作。E-mail: ly-ocean@sohu.com。

## Analytical solution of stress-fabric relationship and failure of granular materials in three dimensions

LIU Yang<sup>1</sup>, Ching S Chang<sup>2</sup>, ZHANG Duo<sup>1</sup>, WANG Cheng-lin<sup>1</sup>

(1. Department of Civil Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China; 2. Department of Civil Engineering, University of Massachusetts Amherst, Massachusetts 01003, USA)

**Abstract:** Based on the macro-micro mechanical analysis, three kinds of tensors are proposed to investigate the stress-fabric relationship. An explicit relationship is derived among applied stress tensor, material fabric tensor and force-fabric tensor in three dimensions. The expressions are also obtained in two dimensions and triaxial stress condition, which are verified by DEM simulation of biaxial and triaxial tests. A concept of “true stress” is adopted to investigate the failure of granular materials. The analytical and numerical results indicate that the stress in granular materials is affected by the three kinds of tensors motioned above. The analytical solution of stress-fabric is coincided with the DEM results and has the same form as that proposed by Rothenburg when the higher order terms are omitted. The strength of granular materials is controlled by the “true stress”, and the apparent mobilized frictional angle is the joint action of friction of particles and anisotropic fabric induced by the applied stress. The proposed stress-fabric relationship is potentially useful for further development of the strength theory and stress-strain behavior for granular materials.

**Key words:** granular material; anisotropy; stress-fabric relationship; analytical solution; DEM

## 0 引 言

散粒体是一个离散颗粒的集合体, 在外荷载作用下散粒体内部形成如图 1 所示的力链, 力通过颗粒之间的接触传递, 从而在散体内部形成非均匀非连续的应力。力的分布模式或者力组构关系对散体的变形与强度起着重要作用。对于不同材料组构的散粒体, 其力链模式差别很大, 如图 1 中: 两种不同材料组构的散粒体, 即使是在相同的外荷载下其力链模式完全不同。因此, 在分析散粒体的力学性质中, 力组构和材料组构之间的关系研究是一个重要课题。这种关系的

研究有助于发展新的强度准则和本构模型。

散粒体微细观组构的概念最早由早 Brewer<sup>[1]</sup>提出, 常用来描述颗粒的接触排列方向、孔隙尺寸和方向等<sup>[2-3]</sup>。20 世纪 70 年代日本学者 Oda 等<sup>[4-6]</sup>对散粒材料特别是砂土进行了一系列的试验和理论研究。他认为砂土的细观组构要素可归纳为: 土颗粒本身的性质、与土孔隙特征有关的性质, 以及土颗粒之间的几

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51178044); 新世纪优秀人才项目 (NCET-11-0579); 中央高校基本科研业务费项目 (FRF-TP-12-001B)  
收稿日期: 2013 - 05 - 15

何学关系等。二阶对称组构张量是最常用的一种描述散粒体组构各向异性的方法<sup>[7-10]</sup>, 沈珠江<sup>[11]</sup>认为可以用两个组构张量即接触张量和定向张量来描述散粒体的组构特征, 此外平均孔隙率, 孔隙分布的标准差等也是重要的指标。也有学者用高阶张量来研究散粒体的组构特征, 其在某些条件下更精确<sup>[12-13]</sup>。从数学上讲, 上述问题的实质是对表征一些物理意义的具有方向性质数据的数学描述, Kanatani<sup>[14]</sup>分析了组构张量的数学问题, Li 等<sup>[15]</sup>对这个问题进行了进一步的扩展。

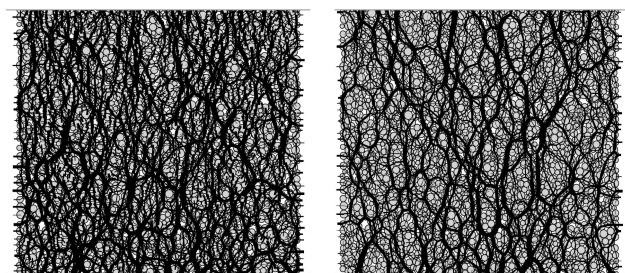


图 1 相同外荷载下不同组构散粒体的力链

Fig. 1 Force chain of different packing structures under same loading

散粒体应力-组构关系的研究对于建立各向异性强度准则和本构关系有着重要意义, 一般可以根据将现有的强度准则和本构关系通过引入组构张量推广到各向异性情况<sup>[16-20]</sup>。从微观力学上分析, 所谓岩土材料的各向异性、非共轴性等力学特征其本质是材料初始各向异性和应力诱发各向异性发展变化的结果, 而这种变化可以从应力-组构关系方面研究其隐含的微观力学机理, 从而建立相应的微观力学强度准则与本构模型<sup>[21]</sup>。

但在散粒体微观应力-组构研究中一个突出困难是试验问题, 尤其是实际的散体材料如砂土颗粒等非光弹体, 其接触力链测量非常困难甚至是不可能的, 故相当一部分学者采用离散单元法 (DEM) 对外荷载作用下散粒体组构的发展变化进行研究<sup>[22-27]</sup>, 并基于 DEM 的模拟结果对提出的应力-组构关系进行验证。

但在他们的工作中, 关于材料组构与力组构之间关系的研究却较少, 特别是在三维空间应力条件下的应力-组构关系问题, 只有 Rothenberg 等<sup>[22]</sup>研究了理想散粒体中的应力-组构关系。此外, 对于散粒体破坏问题的微观力学意义尚不十分清楚, 破坏过程中应力-组构发展如何尚无统一论。基于此, 本文通过散粒介质的微细观力学分析方法, 对三维应力空间的应力-组构关系进行数学解析, 采用离散元对解析结果进行了验证, 并进一步探讨了散粒体渐进破坏的微

观力学意义。

## 1 散粒体三维应力-组构关系解析

### 1.1 三类张量

为了建立散粒体三维应力-组构关系, 首先定义 3 类张量, 即接触密度张量、材料组构张量和力组构张量。

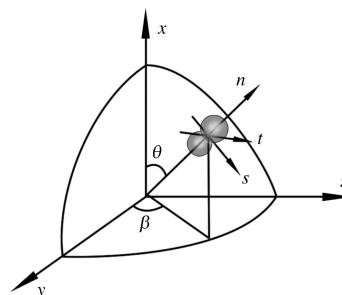


图 2 全局和局部坐标系

Fig. 2 Global and local coordinate system

#### (1) 接触密度张量

散粒体的结构描述通常由颗粒的接触分布法向来描述, 接触密度函数为描述接触分布的函数。选择合理接触分布函数是定量描述散粒体细观结构变化及其宏观响应的关键问题。最常用的接触密度函数形式为球坐标系下的傅里叶三角级数。为此, 建立球坐标系如图 2 所示, 其中颗粒接触处的局部坐标系由正交的单位矢量  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{t}$  组成, 其中:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \cos \beta \mathbf{j} + \sin \theta \sin \beta \mathbf{k} \\ \mathbf{s} &= \sin \theta \mathbf{i} - \cos \theta \cos \beta \mathbf{j} - \sin \beta \cos \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{t} &= \sin \beta \mathbf{j} - \cos \beta \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

接触密度函数采用 Chang 等<sup>[28]</sup>提出的二阶傅里叶级数形式:

$$\xi(\theta, \beta) = \frac{1}{4\pi} \left[ 1 + \frac{a}{4} (3 \cos 2\theta + 1) + 3b \sin^2 \theta \cos 2\beta \right]. \quad (2)$$

显然有

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \xi(\theta, \beta) \sin \theta d\theta d\beta = 1. \quad (3)$$

方程 (2) 可写成笛卡尔坐标系下的张量形式, 即

$$\xi(\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} D_{ij} n_i n_j, \quad (4)$$

式中,  $D_{ij}$  即为接触密度张量,

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} 1+a & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{a}{2}+3b & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{a}{2}-3b \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中,  $a, b$  为定义接触法向各向异性分布的参数。

### (2) 材料组构张量

除了接触密度张量, 有的学者提出用组构张量 (fabric tensor) 来表征散粒材料的空间排列结构, 常用的组构张量定义为<sup>[7]</sup>

$$F_{ij} = \frac{1}{N} \sum_c n_i n_j, \quad (6)$$

式中,  $N$  是接触数, 求和符号  $\sum_c$  代表对所有接触进行统计。式 (6) 可采用接触密度函数写成积分形式如下:

$$F_{ij} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \xi(\theta, \beta) n_i n_j \sin \theta d\theta d\beta. \quad (7)$$

将式 (2) 中的接触密度函数带入式 (7), 即得到组构张量的表达式:

$$[F_{ij}] = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 5+2a & 0 & 0 \\ 0 & 5-a+6b & 0 \\ 0 & 0 & 5-a-6b \end{bmatrix}. \quad (8)$$

### (3) 力组构张量

散粒体中颗粒接触力分布模式可以用力组构 (或者力链) 来描述。粒间接触力在颗粒触点处有 3 个方向 ( $\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$ ) 的分量, 其中,  $\mathbf{n}$  方向为法向接触力  $f_n$ ,  $\mathbf{s}$  和  $\mathbf{t}$  方向为切向接触力  $f_s, f_t$ 。基于离散元模拟结果, 法向接触力和切向接触力可以表示为<sup>[22]</sup>

$$f_n = \bar{f} A_{jk} n_k n_j, \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} f_s &= a_s \bar{f} A_{jk} n_k s_j, \\ f_t &= a_t \bar{f} A_{jk} n_k t_j, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中,  $\bar{f}$  为平均法向力

$$\bar{f} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f_n \sin \theta d\theta d\beta. \quad (11)$$

式 (9)、(10) 中的  $A_{jk}$  即为力组构张量,

$$[A_{jk}] = \begin{bmatrix} 1+a_n & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{a_n}{2}+3b_n & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{a_n}{2}-3b_n \end{bmatrix}, \quad (12)$$

定义  $A_{jk}$  中的参数  $a_n, b_n$  以及式 (10) 中的参数  $a_s, a_t$  描述了散粒体中接触力的分布形式。

## 1.2 三维应力-组构关系解析

将力组构张量 (12) 带入式 (9) 和式 (10), 则得

$$f_n(\theta, \beta) = \bar{f} \left[ 1 + \frac{a_n}{4} (3 \cos 2\theta + 1) + 3b_n \sin^2 \theta \cos 2\beta \right], \quad (13)$$

$$f_s(\theta, \beta) = \bar{f} a_s \sin 2\theta, \quad (14)$$

$$f_t(\theta, \beta) = \bar{f} a_t \sin \theta \sin 2\beta. \quad (15)$$

颗粒集合体代表体积  $V$  (REV) 的平均应力可从

颗粒接触力计算<sup>[29-30]</sup>, 即

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_c l_i f_j, \quad (16)$$

式中,  $l_i$  是枝矢量, 定义为连接颗粒中心的矢量,  $f_i$  是颗粒接触力, 将接触密度函数带入上式则式 (16) 的积分形式如下:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= m_v \bar{l}_0 \int_V f_j(\mathbf{n}) n_i(\mathbf{n}) \xi(\mathbf{n}) d\mathbf{n} \\ &= m_v \bar{l}_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [f_n(\theta, \beta) n_i n_j + f_s(\theta, \beta) s_i n_j + f_t(\theta, \beta) t_i n_j] \\ &\quad \xi(\theta, \beta) \sin \theta d\theta d\beta, \end{aligned} \quad (17)$$

式中,  $m_v$  为体积  $V$  内的总接触数,  $\bar{l}_0$  为平均枝矢量长度。

将接触力表达式 (13) ~ (15) 带入式 (17), 可得散粒体应力张量表达式为

$$\sigma_{ij} = A_{pq} D_{mn} T_{ipqmn}, \quad (18)$$

式中,

$$T_{ipqmn} = m_v \bar{l}_0 \bar{f} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [n_p n_q n_i n_j + a_s n_p s_q s_i n_j + a_t n_p t_q t_i n_j] n_m n_n \sin \theta d\theta d\beta.$$

积分式 (18) 求得应力分量分别为

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= m_v \bar{l}_0 \bar{f} \left( \frac{2}{15} a + \frac{2}{15} a_n + \frac{4}{15} a_s + \frac{11}{105} a a_n + \right. \\ &\quad \left. \frac{4}{105} a a_s + \frac{12}{35} b b_n + \frac{1}{3} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \frac{m_v \bar{l}_0 \bar{f}}{2} \left( -\frac{2}{15} a - \frac{2}{15} a_n - \frac{4}{15} a_s + \frac{1}{3} a_t + \frac{4}{5} b + \frac{4}{5} b_n + \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{21} a a_n - \frac{4}{105} a a_s - \frac{1}{15} a a_t - \frac{8}{35} a b_n - \frac{8}{35} a_n b - \right. \\ &\quad \left. \frac{8}{35} a_s b + \frac{72}{35} b b_n + \frac{2}{3} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \frac{m_v \bar{l}_0 \bar{f}}{2} \left( -\frac{2}{15} a - \frac{2}{15} a_n - \frac{4}{15} a_s - \frac{1}{3} a_t - \frac{4}{5} b - \frac{4}{5} b_n + \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{21} a a_n - \frac{4}{105} a a_s + \frac{1}{15} a a_t + \frac{8}{35} a b_n + \frac{8}{35} a_n b + \right. \\ &\quad \left. \frac{8}{35} a_s b + \frac{72}{35} b b_n + \frac{2}{3} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

进而可以求得两个应力不变量  $p, q$  如下:

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = m_v \bar{l}_0 \bar{f} \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{14}{105} a a_n + \frac{84}{35} b b_n \right), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= m_v \bar{l}_0 \bar{f} \left[ \left( \frac{1}{5} a + \frac{1}{5} a_n + \frac{2}{5} a_s + \frac{2}{35} a a_n + \frac{2}{35} a a_s - \frac{24}{35} b b_n \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. 3 \left( \frac{1}{6} a_t + \frac{2}{5} b + \frac{2}{5} b_n - \frac{1}{30} a a_t - \frac{4}{35} a b_n - \frac{4}{35} a_n b - \frac{4}{35} a_s b \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (23)$$

式 (22) 和 (23) 相除, 即得散粒体三维应力条件下的应力 - 组构关系 (表达式较复杂, 这里省略), 若忽略高阶项, 则可得近似的三维应力 - 组构关系式:

$$\frac{q}{p} = \frac{\left[ \left( \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}a_t \right)^2 + 3 \left( \frac{1}{6}a_t + \frac{2}{5}b + \frac{2}{5}b_n \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{3} \left( 1 + \frac{14}{105}aa_n + \frac{84}{35}bb_n \right)} \quad (24)$$

## 2 二维和轴对称应力 - 组构解析

### 2.1 轴对称应力 - 组构关系

三轴应力状态 (轴对称) 是试验室最常见的应力状态, 对于初始各向同性的材料在三轴应力条件下将诱发横观各向同性的材料组构, 接触密度张量、组构张量和力张量分别蜕化为

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} 1+a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a/2 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 1+a_n & 0 & 0 \\ 0 & 1-a_n/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a_n/2 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$[F_{ij}] = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 5+2a & 0 & 0 \\ 0 & 5-a & 0 \\ 0 & 0 & 5-a \end{bmatrix}. \quad (27)$$

接触密度函数和接触力分别为

$$\xi(\theta, \beta) = \frac{1}{4\pi} \left[ 1 + \frac{a}{4} (3 \cos 2\theta + 1) \right], \quad (28)$$

$$f_n(\theta, \beta) = \bar{f} \left[ 1 + \frac{a_n}{4} (3 \cos 2\theta + 1) \right], \quad (29)$$

$$f_t(\theta, \beta) = \bar{f} a_t \sin 2\theta. \quad (30)$$

式 (17) 变为

$$\sigma_{ij} = m_v \bar{l}_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\bar{f}_n(\theta, \beta) n_i n_j + \bar{f}_t(\theta, \beta) s_i n_j] \xi(\theta, \beta) \sin \theta d\theta d\beta. \quad (31)$$

轴对称条件下各应力分量计算结果为

$$\sigma_a = m_v \bar{l}_0 \bar{f}_0 \left( \frac{2}{15}a + \frac{2}{15}a_n + \frac{4}{15}a_t + \frac{11}{105}aa_n + \frac{4}{105}aa_t + \frac{1}{3} \right), \quad (32)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2} m_v \bar{l}_0 \bar{f}_0 \left( -\frac{2}{15}a - \frac{2}{15}a_n - \frac{4}{15}a_t + \frac{2}{21}aa_n - \frac{4}{105}aa_t + \frac{2}{3} \right). \quad (33)$$

因此, 应力 - 组构关系如下,

$$\frac{\sigma_a - \sigma_r}{\sigma_a + 2\sigma_r} = \frac{\left( \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}a_t + \frac{1}{105}aa_n + \frac{6}{105}aa_t \right)}{\left( 1 + \frac{21}{105}aa_n \right)}. \quad (34)$$

若略去高阶项, 式 (34) 简化为

$$\frac{\sigma_a - \sigma_r}{\sigma_a + 2\sigma_r} \approx \left( \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}a_t \right). \quad (35)$$

### 2.2 二维应力 - 组构关系

对更简单的二维条件, 接触密度张量、组构张量和力张量分别为

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 1+a_n & 0 \\ 0 & 1-a_n \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$[F_{ij}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2+a & 0 \\ 0 & 2-a \end{bmatrix}. \quad (38)$$

接触密度函数和接触力分别为

$$\xi(\theta) = \frac{1}{2\pi} (1 + a \cos 2\theta), \quad (39)$$

$$f(\theta) = \bar{f} (1 + a_n \cos 2\theta), \quad (40)$$

$$f_t(\theta) = -\bar{f} a_t \sin 2\theta. \quad (41)$$

式 (17) 蜕化为

$$\sigma_{ij} = m_v \bar{l}_0 \int_0^{2\pi} [f_n(\theta) n_i n_j + f_t(\theta) t_i n_j] \xi(\theta) d\theta, \quad (42)$$

二维条件下各应力分量计算结果为,

$$\sigma_x = \frac{m_v \bar{l}_0 \bar{f}}{2} \left( 1 + \frac{aa_n}{2} + \frac{1}{2}(a + a_t + a_r) \right), \quad (43)$$

$$\sigma_y = \frac{m_v \bar{l}_0 \bar{f}}{2} \left( 1 + \frac{aa_n}{2} - \frac{1}{2}(a + a_t + a_r) \right). \quad (44)$$

进而求得应力 - 组构关系为

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_x + \sigma_y} = \frac{\frac{1}{2}(a + a_n + a_t)}{1 + \frac{1}{2}aa_n}, \quad (45)$$

若略去高阶项, 式 (45) 变为

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_x + \sigma_y} \approx \frac{1}{2}(a + a_n + a_t). \quad (46)$$

值得注意的是, 略去高阶项后的二维应力 - 组构关系式与 Rothenberg<sup>[22]</sup>所得式子完全一致。

## 3 与离散元模拟结果的比较分析

### 3.1 二维模拟结果与解析解比较

为了验证提出的二维应力 - 组构关系, 采用离散元进行了一系列数值模拟。数值模拟采用密实和松散两种密实度的 DEM 试样, 密实试样圆盘颗粒数 4610 个, 松散试样圆盘颗粒数 3797 个。两种试样的颗粒分布均为直径 0.075~0.1 m 的均匀分布。

离散元颗粒在随机生成器中生成, 采用接触刚度模型, 颗粒密度 2630 kg/m<sup>3</sup>, 法向与切向接触刚度均

取 100 MN/m, 颗粒摩擦系数取 0.5。二维松散试样和密实试样的孔隙分别为 0.3 和 0.17。

松散试样生成起始即赋颗粒摩擦系数为 0.5, 然后各向同性固结至围压 1.0 MPa。密实试样先设置摩擦系数为 0.0, 等向固结至 1.0 MPa 后, 改变颗粒摩擦系数为 0.5 再计算平衡。生成后的松散和密实试样(局部)如图 3 所示。

数值试样固结完成后即对试样进行单向加载试验, 通过数值伺服系统让顶部和底部墙体作相对运动来施加荷载, 并同时调整两侧墙体的位移, 以保持围压的稳定。

图 4 是离散元模拟结果与解析结果式(46)的计算结果比较图, 从图中可以看出, 二维的应力-组构关系式与离散元模拟结果很接近。

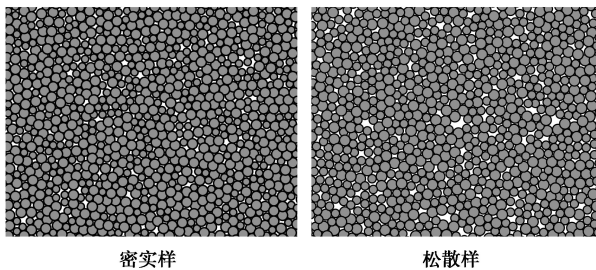


图 3 二维离散元数值试样结构(局部区域)

Fig. 3 Biaxial compression numerical sample (Local area)

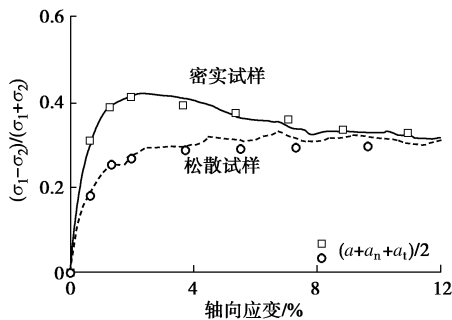


图 4 双轴离散元模拟结果与解析解比较

Fig. 4 Comparison of stress-strain curves from discrete element and analytical solution for biaxial test

### 3.2 轴对称模拟结果与解析解比较

轴对称离散元模拟程序与双轴模拟一样, 首先在圆柱体随机生成器中生成三轴试样, 总计 12201 个球形颗粒。球颗粒粒径为 0.075~0.1 m 均匀分布。颗粒密度为 2630 kg/m³, 法向与切向接触刚度均取 100 MN/m, 颗粒摩擦系数 0.5, 固结围压 1.0 MPa。生成试样如图 5 所示。

图 6 是离散元模拟结果与解析结果式(35)的计算结果比较图, 从图 6 中可以看出, 提出轴对称的应力-组构关系式与离散元模拟结果很接近。

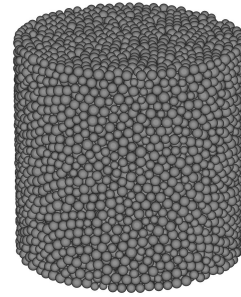


图 5 三轴离散元数值试样

Fig. 5 Triaxial compression numerical sample

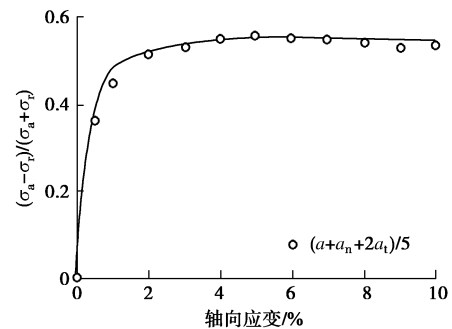


图 6 三轴离散元模拟结果与解析解比较

Fig. 6 Comparison of stress-strain curves from discrete element and analytical solution for triaxial tests

## 4 散粒体强度与破坏分析

### 4.1 “真应力”的概念与材料破坏

上述应力-组构解析结果式(24)、(35)、(46)以及离散元模拟结果表明, 外荷载作用下散粒体强度由两部分来承担: 一是散粒体颗粒间的摩擦, 另外一部分即散粒体各向异性结构。其中第一部分是“真应力”, 其控制着材料的强度与变形。“真应力”概念很早在脆性材料的损伤分析中就提出<sup>[31]</sup>, 但在散体材料强度分析中却很少有应用。这里, 提出一个真应力与施加应力之间的关系如下:

$$\sigma_{ij} = 3F_{ik}\sigma'_{kj}, \quad (47)$$

式中,  $F_{jk}$  即为式(8)定义的材料组构张量。

对于摩擦散粒体, 活动摩擦角  $\varphi_m$  和  $\varphi'_m$  由下式定义:  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$ ,  $\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3} = \frac{1+\sin\varphi'_m}{1-\sin\varphi'_m}$ 。其中,  $\varphi_m$  由施加的应力定义, 而  $\varphi'_m$  由真应力定义, 前者在整理三轴试验指标时经常用到。

散粒材料的破坏由  $\varphi'_m$  控制, 因此当活动摩擦角  $\varphi'_m$  超过颗粒摩擦角  $\varphi_\mu$ , 材料破坏。由式(47)可得材料组构比与应力比之间的关系:

$$\frac{F_{11}}{F_{33}} = \frac{1-\sin\varphi'_m}{1+\sin\varphi'_m} \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = k \frac{\sigma_1}{\sigma_3}. \quad (48)$$

从微观角度分析,破坏时活动摩擦角 $\varphi'_m$ 即等于颗粒摩擦角 $\varphi_\mu$ 。

#### 4.2 一个简单应用

文献[32]即采用上述组构应力关系式(48)建立了考虑应力诱发各向异性的强度准则,虽然文中没有提出“真应力”的概念,但其思想是一致的。破坏时组构比与破坏应力比的关系如下:

$$\frac{F_{11}}{F_{33}} = \frac{1 - \sin \varphi_\mu}{1 + \sin \varphi_\mu} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right)_f \quad (49)$$

对于给定的散体材料其颗粒摩擦角 $\varphi_\mu$ 为常数,式(48)表明,散粒体破坏时组构比与应力比为线性关系,不同应力诱发各向异性的组构比其破坏应力比不同。对于常规三轴试验,三轴压缩和三轴伸长试验应力状态不同诱发了不同的各向异性组构。设三轴压缩试验过程应力比与组构比的关系也为线性关系且线性常数为 $k_c$ ,三轴伸长试验的线性常数为 $k_e$ ,对于Bishop参数为 $b$ 为常数的空间应力路径,其线性常数假设为

$$k_f = k_c(1-b)^n + k_e b^n \quad (50)$$

材料初始各向同性,材料组构比等于1,随着荷载的施加,三维应力条件下应力-组构关系如下

$$\frac{F_{11}}{F_{22}} = k_f \left( \frac{\sigma_x}{\sigma_y} - 1 \right) + 1 \quad (51)$$

$$\frac{F_{11}}{F_{33}} = k_f \left( \frac{\sigma_x}{\sigma_z} - 1 \right) + 1 \quad (52)$$

$$F_{11} + F_{22} + F_{33} = 1 \quad (53)$$

显然,对于轴对称的三轴伸长和三轴压缩应力状态 $\sigma_y = \sigma_z$ ,  $F_{22}/F_{33} = 1$ 。

对于图1中坐标系的某颗粒接触处的法向接触力和切向接触力可以采用静力假定计算[32],

$$f_j^c = \sigma_{ij} A_{ik}^{-1} n_k^c \quad (54)$$

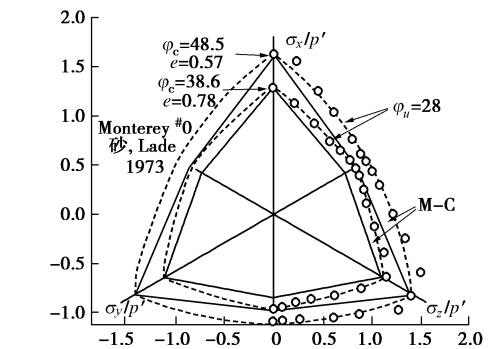
式中, $f_j^c$ 为接触 $c$ 处的3个接触力分量, $n_k^c$ 为接触单位法向量。

对式(54)应用库仑摩擦定律,并联立式(50)~(53)即得到基于微观力学组构-应力分析的诱发各向异性强度破坏准则。

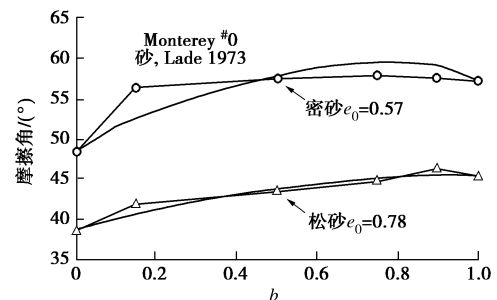
以Lade等[33]对两种密实状态的Monterey Sand进行的真三轴试验结果为例,对提出的强度准则进行验证。松密两种试样的初始孔隙比分别为 $e_0=0.57$ 和 $e_0=0.80$ ,试验过程中保持围压不变(58.8 kPa),调整大主应力和中主应力在不同的 $b$ 值下加载直至破坏,试验仅在 $0^\circ \sim 60^\circ$ 范围内进行。

$\pi$ 平面上的试验和预测结果如图7(a)所示,图7(b)是摩擦角的试验和预测结果,其中密砂三轴压

缩摩擦角 $\varphi_c = 48.5^\circ$ ,松砂 $\varphi_c = 38.6^\circ$ 。图7(a)中虚线是预测结果,实线是莫尔-库仑准则的预测结果。



(a)  $\pi$ 平面试验与模拟结果



(b) 摩擦角与 $b$ 值关系的试验与模拟结果

图7 Monterey 砂试验结果

Fig. 7 Results of Monterey sand

模型参数可直接从室内三轴压缩和伸长试验点获取, $\varphi_\mu$ 和 $n$ 对松砂和密砂均取 $\varphi_\mu = 28^\circ$ ,  $n=0.8$ 。 $\pi$ 面上破坏轨迹和不同 $b$ 值摩擦角的模拟结果均与试验较吻合,模型的详细分析可参见文献[32]。

#### 4.3 进一步讨论

将上面双轴试验 DEM 模拟过程中任意应变对应的应力比和组构比绘制在应力比-组构比坐标系中,如图8所示,曲线上任意一点代表此应变水平散粒体的应力比值和组构比值。连接曲线上任意点与坐标原点的直线斜率即为式(48)中的此应力状态下的“真应力”比。

从图8可以看出,对于密实试样,在峰值应力点

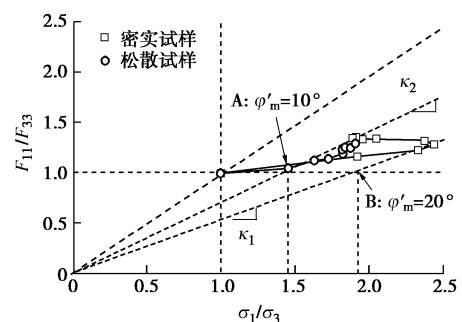


图8 双轴试验中的应力比与材料比变化曲线

Fig. 8 Stress ratio versus material-fabric ratio in biaxial tests

应力比  $\sigma_1/\sigma_3 = 2.5$ , 即峰值活动摩擦角约为  $26^\circ$ 。连接原点和峰值点的直线斜率为  $k_1 = 1.9$  (真应力比为 1.9, 相应的活动摩擦角  $20^\circ$ )。这表明, 对于峰值摩擦强度  $\phi_m = 26^\circ$ , 其中  $20^\circ$  源于颗粒的摩擦,  $6^\circ$  源于应力诱发的各向异性组构。

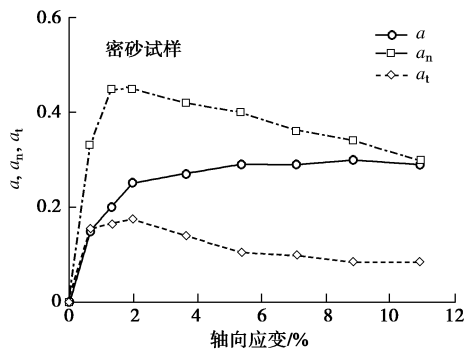


图9 双轴试验各向异性参数演化曲线

Fig. 9 Evolution of fabric parameters in biaxial tests

在残余应力状态, 施加的应力比为 1.95 ( $21^\circ$ )。真应力比为 1.4 ( $10^\circ$ ), 从图中可以看出, 当应力比从峰值减小到残余应力状态时, 材料的组构比并未降低, 甚至有少许增加。换句话说, 基于组构各向异性承担的强度没有减少, 而基于材料摩擦承担的强度从  $20^\circ$  减小到了  $10^\circ$ 。这种减少的原因是由于密实试样剪胀产生的颗粒咬合摩擦的降低, 总的摩擦角从峰值的  $26^\circ$  减少到残余状态的  $20^\circ$ 。这点也可以从图 9 中的各向异性组构参数  $a$ ,  $a_n$ ,  $a_t$  的发展曲线看出来, 峰值强度后反映材料组构各向异性的参数  $a$  并未减少, 而反映法向力和切向力各向异性的组构参数  $a_n$  和  $a_t$  逐渐降低。

对三轴离散元模拟结果的数据分析也可以得出类似结论。对于图 8 中的松砂, 随着应变的发展, 其组构比与应力比一直呈增加趋势。

需要指出的是, 对于峰值之后各向异性组构变化尚需要更多的离散元模拟来验证上述结论, 关于应力诱发各向异性的强度问题还需进一步试验和理论研究。

另外, 从图 8 中还可以看出, 在双轴压缩应力条件下, 对初始各向同性的散粒体 (初始组构比=1.0), 在达到峰值应力之前, 其应力比与组构比的发展曲线近似呈线性关系, 这也说明式 (50) ~ (52) 的假设是合理的。

## 5 结 论

通过散粒体宏-微观力学分析, 推导了散粒体三维应力-组构关系, 采用双轴和三轴离散元 (DEM) 模拟结果对二维和轴对称应力条件下的解析结果进行

了验证分析, 并采用“真应力”的概念分析了散粒体的强度问题, 研究初步得出以下 4 点结论。

(1) 散粒体中的应力-组构关系受 3 类张量的共同影响, 即接触密度张量、材料组构张量和力组构张量。

(2) 离散模拟结果表明, 本文提出的散粒体三维应力-组构解析表达式是正确的, 在略去了高阶项后, 二维应力-组构关系式与 Rothenburg 等提出的表达式一致。

(3) 散粒体中的“真应力”控制了其强度, 在单调加载条件下, 材料达到峰值应力之前, 其组构比和应力比可近似看成线性关系。

(4) 散粒材料的总强度主要来源于两部分: 颗粒摩擦 (滑动和咬合摩擦) 以及应力诱发的各向异性组构, 表观活动摩擦角的变化实质是二者共同作用的结果。

## 参考文献:

- [1] BREWER R. Fabric and mineral analysis of soils[M]. New York: John Wiley and Sons, 1964.
- [2] ODA M. Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular materials[J]. Soils and Foundations, 1972, 12(1): 17 - 36.
- [3] MUHUNTHAN B, CHAMEAU J L. Void fabric tensor and ultimate state surface of soils[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1997, 123(2): 173 - 181.
- [4] ODA M, KONISHI J. Microscopic deformation mechanism of granular materials[J]. Soils and Foundations, 1974, 14(4): 25 - 38.
- [5] ODA M, KOISHIKAWA I, HIGUCHI T. Experimental study of anisotropic shear strength of sand by plane strain test[J]. Soils and Foundations, 1978, 18(1): 25 - 38.
- [6] ODA M, NAKAYAMA H. Yield function for soil with anisotropic fabric[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1989, 115(1): 89 - 104.
- [7] SATAKE M. Constitution of mechanism of granular materials through graph representation[M]// Theoretical and Applied Mechanics. Tokyo: University of Tokyo Press, 1978.
- [8] Nemat-Nasser S. Influence of fabric on liquefaction and densification potential of cohesionless sand[J]. Mechanics of Materials, 1982, 1(1): 43 - 62.
- [9] PIETRUSZCZAK S, LYDZBA D, SHAO J F. Modelling of inherent anisotropy in sedimentary rocks[J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39(3): 637 - 648.
- [10] PIETRUSZCZAK S, MROZ Z. Formulation of anisotropic

- failure criteria incorporating a microstructure tensor[J]. Computers and Geotechnics, 2000, **26**(2): 105 – 112.
- [11] 沈珠江. 复杂荷载下砂土液化变形的结构性模型[C]// 第五届全国土动力学学术会议论文集. 大连: 大连理工大学出版社, 1998. (SHEN Zhu-jiang. Structural model of liquefaction deformation of sand under complicated loading[C]// The 5th National Conference on Soil Dynamics. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1998. (in Chinese))
- [12] ODA M. Similarity rule of crack geometry in statistically homogeneous rock masses[J]. Mechanics of Materials, 1984, **3**(2): 119 – 129.
- [13] PIETRUSZCZAK S, MROZ Z. On failure criteria for anisotropic cohesive-frictional materials[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2001, **25**(5): 509 – 524.
- [14] KANATANI K. Distribution of directional data and fabric tensors[J]. International Journal of Engineering Science, 1984, **22**(2): 149 – 164.
- [15] LI X, YU H S. Tensorial characterisation of directional data in micromechanics[J]. International Journal of Solids and Structures, 2011, **48**(14/15): 2167 – 2176.
- [16] LADE P V. Failure criterion for cross-anisotropic soils[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2008, ASCE, **134** (1): 117 – 124.
- [17] GAO Z, ZHAO J, YAO Y. A generalized anisotropic failure criterion for geomaterials[J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, **47**(22/23): 3166 – 3185.
- [18] 李学丰, 黄茂松, 钱建固. 宏细观结合的砂土各向异性破坏准则[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, **29**(9): 1885 – 1892. (LI Xue-feng, HUANG Mao-song, QIAN Jian-gu. Failure criterion of anisotropic sand with method of macro-meso incorporation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, **29**(9): 1885 – 1892. (in Chinese))
- [19] LI X S, DAFALIAS Y F. Constitutive modeling of inherently anisotropic sand behavior[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2002, **128**(10): 868 – 880.
- [20] WAN R G, GUO P J. Stress dilatancy and fabric dependencies on sand behavior[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, **130**(6): 635 – 645.
- [21] CHANG C S, YIN Zhen-yu. Micromechanical modeling for inherent anisotropy in granular materials[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2010, **136**(7): 830 – 838.
- [22] ROTHENBURG L, BATHURST R J. Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials[J]. Géotechnique, 1989, **39**(4): 601 – 614.
- [23] ROTHENBURG L, KRUYT N P. Micromechanical definition of entropy for quasi-static deformation of granular materials[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2009, **57**(3): 634 – 655.
- [24] YUNUS Y, VINCENSAND E, CAMBOU B. Numerical local analysis of relevant internal variables for constitutive modeling of granular materials[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2010, **34**(11): 1101 – 1123.
- [25] KUHN M R. Micro-mechanics of fabric and failure in granular materials[J]. Mechanics of Materials, 2010, **42**(9): 827 – 840.
- [26] THORNTON C, ZHANG L. On the evolution of stress and microstructure during general 3D deviatoric straining of granular media[J]. Géotechnique, 2010, **60**(5): 333 – 341.
- [27] KRUYT N P. Micromechanical study of fabric evolution in quasi-static deformation of granular materials[J]. Mechanics of Materials, 2012, **44**: 120 – 129.
- [28] CHANG C S, MISRA A. Packing structure and mechanical properties of granulates[J]. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, 1990, **116**(5): 1077 – 1093.
- [29] CHRISTOFFERSON J, MEHRABADI M M, NEMAT-NASSAR S. A micromechanical description on granular material behavior[J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 1981, **48**(2): 339 – 344.
- [30] ROTHENBURG L, SELVADURAI A P S. Micromechanical definitions of the Cauchy stress tensor for particular media[C]// Mechanics of Structured Media. Amsterdam, Elsevier, 1981: 469 – 486.
- [31] LUBARDA V A, KRAJCINOVIC D. Damage tensors and the crack density distribution[J]. International Journal of Solids and Structures, 1993, **30**(20): 2859 – 2877.
- [32] 刘洋. 砂土的各向异性强度准则: 应力诱发各向异性[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(3): 460 – 468. (LIU Yang. Anisotropic strength criteria of sand: Inherent Anisotropy[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(3): 460 – 468. (in Chinese))
- [33] LADE P V, DUNCAN J M. Cubical triaxial tests on cohesionless soil[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1973, **99**(SM10): 793 – 812.