

# 岩土材料特性相关塑性位势理论

李学丰<sup>1, 2</sup>, 孔亮<sup>3</sup>, 黄茂松<sup>2</sup>

(1. 宁夏大学固体力学研究所, 宁夏 银川 750021; 2. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092;  
3. 青岛理工大学理学院, 山东 青岛 266033)

**摘要:** 针对传统塑性位势理论因采用连续性、均匀性与各向同性等基本假定导致其应用于岩土材料导致的局限性, 根据砂土细观物理特性可以用宏观组构张量来描述的特点, 统一考虑各向同性与各向异性, 把应变分配法则和材料特性联系起来, 建立了岩土材料特性相关的塑性位势理论。该理论塑性应变增量的分量方向和应力分量方向相同, 但是塑性应变增量的大小与3个因素相关, 即塑性因子、组构各向异性程度和组构与主应力方向的几何关系。建立的位势理论不但可以描述岩土材料在主应力轴固定条件下应变增量的各向异性分配关系, 而且可以描述主应力旋转条件下应变增量的大小和方向变化规律。采用能量转换关系证明了塑性应变增量的大小的变化规律, 与现有的非共轴塑性理论相比, 建立的位势理论应用范围更广、物理意义更清晰。

**关键词:** 塑性位势理论; 非共轴; 细观结构; 材料特性相关; 砂土

**中图分类号:** TU 443    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1000-4548(2013)09-1722-08

**作者简介:** 李学丰(1976-), 男, 宁夏平罗人, 博士, 讲师, 主要从事岩土工程及岩土本构理论的研究工作, E-mail: lixuefeng1928@163.com。

## Property-dependent plastic potential theory for geomaterials

LI Xue-feng<sup>1, 2</sup>, KONG Liang<sup>3</sup>, HUANG Mao-song<sup>2</sup>

(1. Solid Mechanics Institute, Ningxia University, Yinchuan 750021, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. School of Sciences, Qingdao Technological University, Qingdao 266033, China)

**Abstract:** Aiming at the application defects of the traditional potential theory to geomaterials, caused by the basic assumptions such as continuity, homogeneity and isotropy, the property-dependent plastic potential theory for geomaterials is proposed by linking the strain distribution law with the material properties. The new theory is based on the physical properties in the microscopic aspects of sand described by the fabric with isotropic and anisotropic together. According to the proposed theory, the component direction of the plastic strain increment is consistent with that of the stress, but the value is the function of loading stress, degree of fabric anisotropy and geometric relationship between fabric and stress. Therefore the proposed theory can describe the anisotropic distribution of the plastic strain increment under the fixed principal stress and the values and direction of the plastic strain increment under the rotational principal stress. The energy conversion relationship is used to analyze the variation of the plastic strain increment. Compared with the existing non-coaxial plasticity theory, the proposed potential theory own a wider application and a clearer physical meaning.

**Key words:** plastic potential theory; non-coaxiality; microstructure; property-dependency; sand

## 0 引言

如果说土力学的核心是本构关系, 那么弹塑性本构关系的核心应该是塑性位势理论。传统塑性位势理论是对土体塑性应变增量方向的一种假设, 其目的是保证塑性流动方向按照塑性势函数的法线方向发展、即满足正交流动法则, 它是建立本构关系中最重要的理论之一。然而由于岩土材料的复杂性, 在一些假设基础上建立的传统塑性位势理论应用到本构模型中不

同程度存在很多缺陷, 无法较好描述其应力应变关系, 因此, 本文针对传统塑性理论采用假设导致的局限性, 尝试建立岩土材料特性相关塑性位势理论。

传统塑性位势理论由Von Mises、Drucker建立和

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(51368050); 山东省自然科学杰出青年基金项目(JQ201017); 2013宁夏自治区科技支撑计划项目; 宁夏自治区自然科学基金重点项目(NZ13001)

**收稿日期:** 2012-10-09

发展起来的。大量试验证实传统位势理论不适应岩土材料的变形机制, 其根本原因是该理论采用了与岩土材料变形机制不相符的假设, 如连续性与均匀性假定、各向同性假定等<sup>[1]</sup>。正是这些假设导致该理论在岩土材料的实际应用过程中存在诸多缺陷。连续性假设所造成其不能描述土体微观离散性等缺陷, 近几年相当一部分学者<sup>[2-3]</sup>把理论研究转向微观土力学的研究领域, 希望将微观本构理论应用于宏观现象。各向同性假设导致无法较好描述土体各向异性及其相关特性等不足。因为, 土颗粒均匀分布与否在力学特性上表现为各向同性和各向异性两种, 而各向异性影响最为关键。正是因为土体各向异性的存在, 使得土体表现出明显的主应力轴旋转效应和非共轴等特性。基于各向同性假设的塑性位势理论算不出主应力轴旋转产生的塑性变形, 也无法描述非共轴特性。为了解决这些问题, 国内外学者提出了许多思路, 例如: 杨光华等<sup>[4]</sup>的广义塑性位势理论, 郑颖人等<sup>[1]</sup>、刘元雪等<sup>[5]</sup>考虑主应力轴旋转的广义塑性位势理论, Rudnicki等<sup>[6]</sup>提出的非共轴理论以及Yang等<sup>[7]</sup>和Huang等<sup>[8]</sup>在传统塑性位势理论的非共轴修正模型, Gutierrez等<sup>[9]</sup>、史宏彦等<sup>[10]</sup>引入非共轴角的非共轴塑性位势理论等<sup>[9]</sup>。以上这些思路都不同程度存在数学形式复杂、模型参数物理意义不明显以及屈服机理难以得到试验直接验证等不足。从产生机理上讲, 非共轴产生的根本原因是各向异性的存在, 各向异性产生的深层机理都可以归结于砂土的细观特性。以上考虑主应力轴旋转及非共轴修正等思路仍然是在连续介质力学各向同性假设的基础上, 因此如何消除各向同性假设是解决各向异性和其相关性的根本途径。

通过以上分析, 自然会想到两个问题, 一是具有细观离散本质的岩土材料表现的部分宏观特性是否可以用塑性位势理论来描述? 二是各向异性和各向同性在塑性理论中是否可以统一起来考虑? 这就本文讨论的问题。

针对问题一, 目前相当多专家学者<sup>[2-3]</sup>围绕土体颗粒微观离散特性展开研究, 一部分学者致力于微观离散颗粒本构直接应用于宏观土体; 另一部分开始用宏细观结合的方法研究, 该方法依据是“土体在宏观上连续性和细观上离散性”, 将土体细观特性的宏观表现引入到宏观数学方程中来描述其宏观本构关系。对于后者, 根据目前砂土细观研究的最新成果较多, 砂土细观离散颗粒的空间排列特性在宏观上具有数学统计的相关“组构”特性, 该特性可以用一个组构张量<sup>[11-12]</sup>来描述, 并逐渐用于建立土体各向异性本构模型<sup>[13-14]</sup>和强度准则<sup>[15-16]</sup>。笔者等也建立了宏细观结合砂土各向异性破坏准则<sup>[17]</sup>, 并进行了砂土各向异性力学特性

分析<sup>[18-19]</sup>。对于第二个问题目前国内外鲜见报道。

针对以上传统位势理论所面临的两个问题以及笔者基于宏细观结合砂土力学特性和本构模型的研究工作<sup>[17-21]</sup>, 本文在连续介质力学的框架下, 针对建立材料位势理论假设的限制, 将材料应变分配法则和材料细观特性联系起来, 把材料的各向同性和各向异性统一到材料特性中, 建立岩土材料特性相关的塑性位势理论。分析新理论实质及其物理意义, 采用能量转换的方法对建立的位势理论预测变形的大小进行分析, 对材料特性对应变增量方向唯一性与否的问题进行分析和证明, 并与现有解决非共轴特性的非共轴塑性位势理论进行比较分析。

## 1 材料特性相关位势塑性理论

### 1.1 岩土材料物理特性描述

岩土材料组构是客观存在的, 理论上组构张量的6个独立方向分量可以通过试验得到, 但是目前试验只能检测到3个主方向的组构, 因此需要通过坐标转换的方法将主方向表示的组构转换到一般应力。根据现有试验, 假定土体组构张量可以表示为

$$F'_{ij} = \frac{1}{3+a_1+a_2+a_3} \begin{pmatrix} 1+a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

式中,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ 分别是3个主方向的各向异性参量, 也是材料的细观物理特性。式(1)中对角线上的量为分别为3个主方向的分量, 一般情况下,  $F_1 \geq F_2 \geq F_3$ , 而且满足  $F_{kk} = 1$ , 即材料在3个主方向上各向异性参量和为单位1。

岩土材料多数情况下为横观各向同性, 即  $F_2 = F_3$ , 即  $F_1 = 1 - (F_2 + F_3) = 1 - 2F_2$ 。因此, 可以用一个标量  $a$  定义组构张量, Oda<sup>[11-12]</sup>的研究认为砂土横观各向同性的组构张量可以表示为

$$F'_{ij} = \frac{1}{3+a} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}, \quad (2)$$

式中,  $a$  为可测量的各向异性参量, 它的大小表示为土颗粒方向和参考面方向各向异性的程度。根据 Oda<sup>[10-11]</sup>等细观力学的试验研究, 随机非球形砂土颗粒的空间排列和相对孔隙比具有数学统计意义上的相关特性, 在大应变的情况下,  $a$  主要与砂土颗粒的空间排列方向有关。Curry<sup>[21]</sup>根据土颗粒的这种排列特性定义  $a$  为

$$a = \frac{1}{2N} \sqrt{\left( \sum_{k=1}^{2N} \cos 2\varphi_k \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^{2N} \sin 2\varphi_k \right)^2}. \quad (3)$$

式中  $N$  为土颗粒数(个); 其单位矢量为  $n$ , 且

$n_i = -n_j$ ,  $n_i^k$ ,  $n_j^k$  为第  $k$  个矢量分量, 它的大小代表张量中颗粒特定方向的分量;  $\varphi_k$  为土颗粒的长轴方向与单位矢量  $n$  的倾角 (°)。文献[13]根据式(3)对 Toyoura 砂进行了细观定量检测分析, 不同制样方法检测  $a$  值差别较大。 $a$  的取值范围为 [0, 1]。当  $a=0$  时, 土体为各向同性; 当  $a \neq 0$  时, 土体为各向异性; 当  $a=1$  时, 所有颗粒的长轴方向在横观各向同性面内。

式(1)和式(2)的组构张量可以根据应力张量特性分解为

$$\begin{aligned} F'_{ij} &= p_F'(\delta_{ij} + \tilde{s}'_{ij}) = p_F'(\bar{F}'_{ij}) \\ &= p_F \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + p_F \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad (4) \end{aligned}$$

式中,  $p_F$  为组构张量大小,  $p_F = 1/(3 + a_1 + a_2 + a_3)$ ,  $\bar{F}'_{ij}$  可视为组构的方向张量。当材料为各向同性时, 即  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ,  $F'_{ij} \equiv \delta_{ij}$ ; 当材料为各向异性时, 组构张量可以分解为具有各向同性特性的部分  $\delta_{ij}$  和各向异性部分  $\tilde{s}'_{ij}$ , 各向异性主要体现在  $\tilde{s}'_{ij}$ 。

式(1)为主方向表示的组构张量, 塑性位势理论通常在一般应力空间描述, 因此需要将 3 个正交方向表示的组构张量向一般空间转换。根据主应力空间向一般应力空间的坐标转换关系, 可以将组构张量做类似转换。假设组构张量 3 个主方向和 3 个应力方向对应相同, 那么应力张量与组构张量的转换关系<sup>[4]</sup>为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= A_{in} A_{jm} \sigma'_{nm} \\ F'_{ij} &= B_{in} B_{jm} F'_{nm} \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

式中,  $A_{ij}$  和  $B_{ij}$  分别是主应力张量  $\sigma'_{nm}$  和组构主方向张量  $F'_{nm}$  与任意张量 ( $\sigma_{ij}$ ,  $F'_{ij}$ ) 的方向余弦, 即  $A_{ij} = \cos(x_i^\sigma, x_j)$ ,  $B_{ij} = \cos(x_i^F, x_j)$ ,  $x_i^\sigma$ ,  $x_i^F$  和  $x_j$  分别为主应力坐标、组构主方向坐标和一般应力坐标轴。坐标轴转换关系满足:

$$\left. \begin{aligned} x_j &= A_{ij} x_i^\sigma \\ x_i &= B_{ij} x_j^F \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

当主应力轴固定的条件下, 即主应力方向和组构主方向对应一致时, 则  $A_{ij} = B_{ij}$ , 即由式(5)用应力转换张量  $A_{ij}$  将组构张量转换到一般应力空间。

当主应力轴相对组构主轴发生旋转时, 即满足:

$$\sigma'_{ij} = C_{in} C_{jm} F'_{nm}, \quad (7)$$

式中,  $C_{ij}$  是主应力方向相对组构发生旋转时的方向余弦, 即  $C_{ij} = \cos(x_i^\sigma, x_j^F)$ 。那么由式(6)和式(7)可以得到

$$x_i^F = C_{ij} x_j^\sigma = A_{im} B_{jm} x_j^\sigma. \quad (8)$$

根据应力状态和主应力轴和组构张量的几何关系, 就得到了转换张量  $A_{ij}$  和  $C_{ij}$ , 由式(8)就可以得

到组构张量的转换张量  $B_{ij}$ , 这样可以确定式(5)中主应力轴旋转条件下组构张量的转换关系了。

## 1.2 岩土材料特性相关位势塑性理论的一般表达式

材料特性相关塑性理论的基本思路是: 根据材料客观存在的组构特性, 假定材料特性可以用一个组构张量来描述, 那么材料受力时应变分配将受材料特性的影响。

岩土材料本构关系用增量描述, 结合以上基本思路, 岩土材料特性相关塑性位势理论的一般表达式为

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{il}} \bar{F}_{lj}, \quad (9)$$

式中,  $g$  为塑性势函数,  $d\lambda$  是塑性因子增量,  $\bar{F}_{lj}$  是式(5)转换后的组构张量  $F_{lj}$  的方向张量。

根据组构方向张量的特点, 当材料为各向同性时, 即  $\bar{F}_{ij} \equiv \delta_{ij}$ ,  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 张量 (当  $i \neq j$  时,  $\delta_{ij} = 0$ ; 当  $i = j$  时,  $\delta_{ij} = 1$ ),  $\bar{F}_{ij}$  通过式(5)转换之后的  $\bar{F}_{ij}$  对式(9)无任何影响, 也就是这种条件下主应力轴旋转对材料的力学条件无任何影响, 此时, 式(9)自然退化到各向同性的形式, 和传统位势理论表达式相同, 也和传统位势理论各向同性的假设一致。当组构为各向异性时, 式(9)塑性应变分量分配法则与材料特性相关, 在主应力固定条件下, 塑性应变分配法则只受材料各向异性程度的影响, 塑性应变增量根据组构方向张量分量大小为各向异性分配; 在主应力轴旋转条件下, 塑性应变增量分配不但受材料特性影响, 而且还受主应力轴相对组构几何关系的影响, 将材料各向异性程度和主应力轴旋转自然融在一起考虑。

综上所述, 材料特性相关位势塑性理论通过组构张量将材料特性统一起来。材料为各向同性时, 自然退化到传统位势理论, 此时主应力轴旋转不会造成材料力学性质的变化; 当材料为各向异性时, 可以自然描述主应力轴固定和旋转时塑性应变增量分量大小和方向的变化规律, 而且整个过程符合实际土体受力的几何关系, 物理意义清晰。

根据张量的转换特性, 式(5)转换后的组构张量  $F_{ij}$ , 根据式(4)的分解, 有

$$F_{ij} = p_F(\delta_{ij} + \tilde{s}_{ij}) = p_F(\bar{F}_{ij}), \quad (10)$$

将式(10)得到的方向张量  $\bar{F}_{ij}$  带到式(9)就可以得到材料特性位势理论另一种表达式:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{il}} \tilde{s}_{lj}, \quad (11)$$

式中,  $\tilde{s}_{ij}$  是式(10)组构张量  $F_{ij}$  的各向异性部分。

式(11)比式(9)更为清晰描述了材料特性相关位势塑性理论分配关系, 即材料塑性应变增量自然分解为各向同性和各向异性两部分。当材料各向异性存在时,

式(11)的后一部分即可描述主应力轴固定和旋转条件下应力增量的分配关系。

### 1.3 新位势理论的物理实质

材料特性相关位势塑性理论在连续介质力学理论框架下, 针对传统位势理论采用各向同性假设所存在的诸多不足(不能反映材料的细观离散特性, 基于传统位势理论修正模型不能较好描述各向异性, 以及由于各向异性的存在导致土体表现的非共轴特性和主应力轴旋转产生的塑性变形特性等), 借鉴砂土材料细观特性的最新成果, 即砂土细观离散颗粒排列特性在宏观上可以用组构张量来描述的特点, 将材料应变分配法则和材料细观特性联系起来, 建立材料特性相关的塑性应变分配法则, 即: 塑性应变分量增量的方向和应力方向一致, 塑性应变分量增量的大小和塑性因子、组构各向异性程度及组构与主应力方向的几何关系3个因素相关, 这样就建立起材料特性相关的位势理论。

材料特性相关的位势理论放松了材料的各向同性的假设, 将材料的各向同性和各向异性统一作为材料特性来考虑, 用组构张量来描述材料物理特性为基础, 建立材料物理特性相关的应变分配法则, 其描述的物理意义更为清晰。

## 2 材料特性相关位势塑性理论能量解释

功能转换关系作为自然界最基本的自然规律, 对解释岩土材料在特定条件下的变形关系最为合理。

### 2.1 能量一般表达式

岩土材料在任意应力 $\sigma_{ij}$ 作用下, 其塑性耗散功 $dW^p$ 为<sup>[1, 22]</sup>

$$dW^p = \sigma_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij}^p \quad . \quad (12)$$

将式(11)代入式(12)得到材料特性相关塑性耗散功的计算表达式

$$dW^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_{ij} (d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{il}} \tilde{s}_{lj}) \quad . \quad (13)$$

式(13)在主应力条件下的表示式为

$$\begin{aligned} d\bar{W}^p &= \bar{\sigma}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij}^p = \sigma_k d\varepsilon_k^p \\ &= \sigma_k (d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_k} + d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_k} \tilde{s}_k) \quad . \end{aligned} \quad (14)$$

从式(13)、(14)中可以看出, 采用本文塑性位势理论计算的塑性耗散功也自然分为两部分, 即材料为各向同性塑性功和材料特性相关塑性耗散功两部分。与传统位势理论计算塑性功相比, 本文位势理论塑性耗散功分量计算仍然为应力分量和其方向的位移增量的乘积, 即应力方向和塑性应变增量方向一致, 差别是本文位势理论在不同方向上塑性应变增量大小与各向同性不同, 表现了各向异性分配特性, 各个方

向计算的塑性功不同, 而且当主应力轴发生旋转都会造成塑性耗散功的变化。

### 2.2 不变量表达的能量关系

尽管式(14)表示能量功计算式仍然限定了塑性应变增量和应力方向相同, 然而, 式(14)分量大小的变化却能描述岩土材料的非共轴特性。为了较好地进行解释, 现将式(14)表示为应力不变量( $p, q, \theta_\sigma$ )和相应的应变增量不变量的形式( $\varepsilon_v^p, \gamma^p, \theta_{de}$ )。

式(14)中应力用不变量可以表示为

$$\sigma_k = p + \frac{2}{3}q \sin\left[\theta_\sigma + \frac{2\pi(2-k)}{3}\right] \quad k=1, 2, 3 \quad . \quad (15)$$

$$\text{式中 } p = \sigma_{kk}/3, \quad q = \sqrt{3J_2}, \quad J_2 = s_{ij}s_{ij}/2, \\ s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}p, \quad \theta_\sigma = \sin^{-1}(3\sqrt{3}J_3/2J_2^3)/3.$$

根据式(9)可以得到主塑性的不变量表达式:

$$d\varepsilon_k^p = \frac{1}{3}d\varepsilon_{kk}^p + d\gamma^p \sin\left[\theta_{de} + \frac{2(2-k)\pi}{3}\right], \quad (16)$$

$$\text{式中, } d\varepsilon_{kk}^p = d\varepsilon_{kk}^p/3, \quad d\gamma^p = \sqrt{3J_2'/4}, \quad J_2' = de_{ij}^p de_{ij}^p/2, \\ de_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^p - \delta_{ij} d\varepsilon_{ij}^p/3, \quad J_3' = de_{ij}^p de_{ik}^p de_{ki}^p, \quad \theta_\sigma = \arcsin(3\sqrt{3}J_3'/2J_2'^{3/2})/3.$$

将式(15)、(16)代入式(14)中得

$$\begin{aligned} d\bar{W}^p &= p d\varepsilon_v^p + \\ &\quad \frac{2q d\gamma^p}{3} \sum_{k=1}^3 \sin\left[\theta_\sigma + \frac{2(2-k)\pi}{3}\right] \sin\left[\theta_{de} + \frac{2(2-k)\pi}{3}\right] \\ &= p d\varepsilon_v^p + q d\gamma^p \cos(\theta_\sigma - \theta_{de}) \quad . \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)可以分析材料状态变化造成位势理论计算的塑性应变增量大小变化。

当材料为各向同性时, 由式(15)、(16)可知 $\theta_\sigma \equiv \theta_{de}$ , 则式(17)为

$$d\bar{W}_1^p = p d\varepsilon_v^p + q d\gamma_1^p \quad . \quad (18)$$

当材料为各向异性时, 多数条件下 $\theta_\sigma \neq \theta_{de}$ , 则式(17)为

$$d\bar{W}_2^p = p d\varepsilon_v^p + q d\gamma_2^p \cos(\theta_\sigma - \theta_{de}) \quad . \quad (19)$$

在相同应力状态( $p, q, \theta_\sigma$ 恒定)条件下, 由式(17)和式(19)可得

$$d\bar{W}_1^p \geq d\bar{W}_2^p \quad . \quad (20)$$

假定外力对土体做的耗散功 $dW$ 为恒定值, 那么要满足 $dW = d\bar{W}_1^p = d\bar{W}_2^p$ , 由式(18)、(19)和式(20)可得

$$d\gamma_1^p \leq d\gamma_2^p \quad . \quad (21)$$

由式(21)可以看出, 在相同应力状态下, 相同耗散功作用下, 本文材料特性相关位势塑性理论比传统位势理论计算出更大的广义剪应变。

## 3 塑性应变方向不唯一性分析与解释

为了方便分析和解释, 这里在主应力空间进行分

析，并且不考虑主应力轴旋转。

### 3.1 不唯一性分析

式(4)转换关系中如果限定组构张量3个主方向和3个应力方向对应相同，实际上限定了主应力方向相对土体组构方向固定，即不发生主应力轴的旋转， $A_{ij} = B_{ij}$ ，如图1所示，根据式(9)可得主应力固定条件下主应力分量的材料特性分配关系：

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon}_{ij}^p &= \begin{pmatrix} d\varepsilon_1^p & 0 & 0 \\ 0 & d\varepsilon_2^p & 0 \\ 0 & 0 & d\varepsilon_3^p \end{pmatrix} \\ &= d\lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{F}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{F}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{F}_3 \end{pmatrix} \\ &= d\lambda \begin{pmatrix} \bar{F}_1 \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{F}_2 \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{F}_3 \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} \end{pmatrix}。 \quad (22) \end{aligned}$$

当材料为各向同性时，式(9)中就自然退化为传统位势理论的形式了。如图2所示，各向同性时塑性应变增量分量由 $d\lambda$ 和 $\partial g/\partial \sigma_k$ ， $k=1, 2, 3$ 确定，可以说塑性应变增量大小相同( $d\lambda$ 都相同)，其方向唯一取决于塑性势函数 $g$ 应力梯度方向，即塑性应变分量方向和塑性势函数分量方向相同，总塑性增量(塑性分量的矢量和)只由其塑性分量的方向决定，是由应力状态确定，那么总塑性增量方向表现出唯一性。这个特性与传统位势理论采用各向同性假设一致。

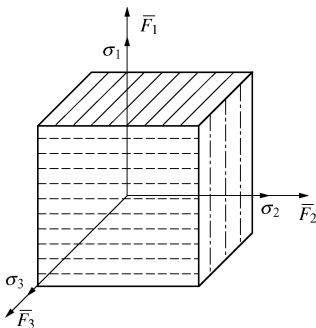


图1 主应力方向与组构的关系

Fig. 1 Geometry of problem

图3为本文材料特性相关位势塑性理论塑性应变方向的几何关系图。根据式(9)，塑性应变分量和塑性因子 $d\lambda$ 、组构张量 $\bar{F}_k$ 和应力梯度方向

$\partial g / \partial \sigma_k, k=1, 2, 3$ 三个因素共同决定。塑性应变增量的分量方向仍然和应力梯度 $\partial g / \partial \sigma$ 方向一致，大小由塑性因子和组构张量决定。当材料为各向同性时，组构张量在3个方向都为1，那么3个分量方向的大小都为 $d\lambda$ ，对总塑性应变方向无任何影响，总塑性应变方向唯一取决于应力状态；当材料为各向异性时，塑性应变分量方向和应力梯度方向相同，但大小和材料状态相关，受各向异性的影响，这样造成总塑性应变方向由应力梯度和材料特性共同决定，塑性应变增量方向随材料各向异性程度和应力方向的变化而变化。

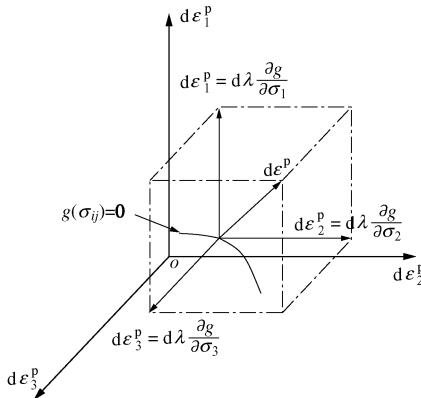


图2 传统位势理论应变增量方向

Fig. 2 Strain increment direction of traditional potential theory

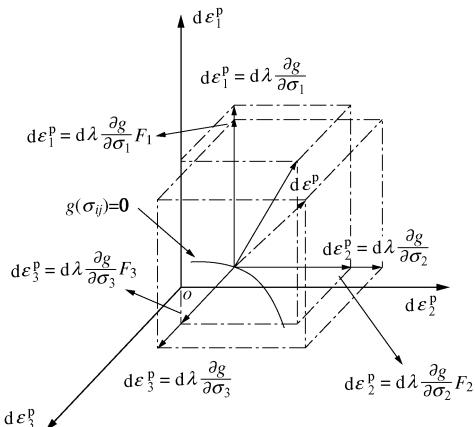


图3 材料特性相关位势塑性理论塑性应变增量方向

Fig. 3 Strain increment direction of property-dependent potential theory

综上所述，当主应力轴方向相对材料组构固定时，从材料特性相关的位势理论可以看出：材料应变分量由材料特性相关的大小和应力方向共同决定。当材料为各向同性时，总塑性应变满足方向唯一性；当材料为各向异性时，总塑性应变增量分量方向和大小材料特性和应力梯度共同决定，方向唯一性与否不确定。

### 3.2 不唯一性理论解释

传统塑性位势理论是在各向同性假设的基础上建

立起来的, 因此还有

$$d\epsilon_1 : d\epsilon_2 : d\epsilon_3 = \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} : \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} : \frac{\partial g}{\partial \sigma_3}。 \quad (23)$$

那么对于主应变增量关系  $d\sigma_i = D_{ij} d\epsilon_i$ ,  $D_{ij}$  的矩阵的元素  $a_{ij}$  必然存在如下关系:

$$a_{1i} : a_{2i} : a_{3i} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} : \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} : \frac{\partial g}{\partial \sigma_3}。 \quad (24)$$

式(23)和式(24)表明, 主应力空间矩阵  $D_{ij}$  只有一个基矢量, 即矩阵  $D_{ij}$  的秩为 1, 其物理意义表明应变增量方向和应力方向一致, 因此必然满足塑性应变增量方向与应力唯一性的关系。

然而, 对于本文的材料特性相关位势塑性理论, 由式(22)可以得到

$$a_{1i} : a_{2i} : a_{3i} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} \bar{F}_1 : \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} \bar{F}_2 : \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} \bar{F}_3。 \quad (25)$$

式(25)表明应变增量不但与应力方向相关, 而且和组构张量(材料特性)有关, 当材料为各向同性时, 组构张量为单位张量, 组构张量将对主应力空间矩阵  $D_{ij}$  的秩没有影响, 必然满足塑性应变增量方向与应力唯一性的关系; 当材料为各向异性时, 式(23)和式(24)的关系将不再满足, 主要受组构张量(材料特性)的影响(如式(25)), 这样造成式(24)中矩阵  $D_{ij}$  的秩不恒等于 1, 塑性应变增量方向与应力唯一性的将不再满足。因此, 塑性应变增量的方向唯一性也就不再满足。

## 4 验证分析

在主应力空间, 应力罗德角  $\theta_\sigma$  计算公式为

$$\theta_\sigma = \arctan \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 \right) \right]。 \quad (26)$$

由式(16)可以得到本文材料特性相关位势塑性理论应变罗德角  $\theta_{de}$  计算公式为

$$\begin{aligned} \theta_{de} &= \arctan \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 2 \frac{d\epsilon_2 - d\epsilon_3}{d\epsilon_1 - d\epsilon_3} - 1 \right) \right] \\ &= \arctan \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 2 \frac{d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} \bar{F}_2 - d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} \bar{F}_3}{d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} \bar{F}_1 - d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} \bar{F}_3} - 1 \right) \right]。 \end{aligned} \quad (27)$$

从式(27)可以看出材料为各向同性时,  $\theta_\sigma = \theta_{de}$ , 因此, 材料在  $\pi$  平面上, 以及整个主应力空间都表现出共轴特性, 塑性应变增量方向唯一取决于主应力方向; 然而当材料为各向异性时,  $\theta_\sigma$  与  $\theta_{de}$  是否相等取决于应力状态和材料特性。如图 1 所示, 主应力和组构在  $\pi$  平面上的关系, 当材料为横观各向同性时, 即:  $F_2 = F_3$ , 在常规三轴压缩点时,  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ , 3 个主

应力分别作用于组构  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3 = F_2$  三个主方向, 由式(18)可得  $\theta_\sigma \equiv \theta_{de}$ ; 当在常规三轴伸长试验时 ( $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ), 3 个主应力分别作用于组构  $F_2$ ,  $F_3 = F_2$ ,  $F_1$  三个主方向, 由式(25)可得  $\theta_\sigma \equiv \theta_{de}$ ,  $\pi$  平面上其他应力状态下,  $\theta_\sigma \neq \theta_{de}$ 。这与图 4 中 Lade 等的试验结果<sup>[23]</sup>一致。

针对以上岩土材料表现的非共轴 ( $\theta_\sigma \neq \theta_{de}$ ) 特性, Gutierrez 等<sup>[9]</sup>、史宏彦等<sup>[10]</sup>根据他们的 Toyoura 砂实验结果, 提出了引入非共轴角的非共轴塑性理论, 其核心思想是将式(19)中设置了非共轴常数, 即

$$\left. \begin{aligned} dW^p &= p d\epsilon_v^p + cq d\gamma^p, \\ c &= \frac{s_{ij} d\epsilon_{ij}^p}{q d\epsilon_v^p}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式中,  $c$  为非共轴常数。

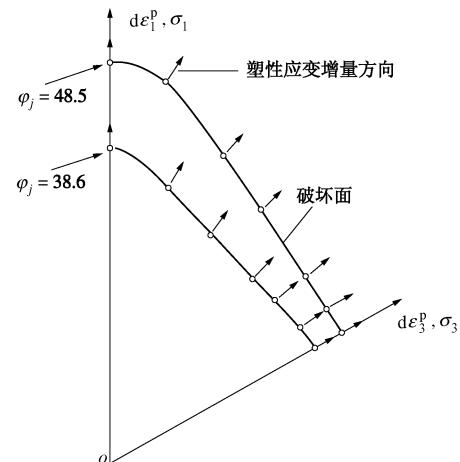


图 4 塑性应变增量方向试验值<sup>[23]</sup>

Fig. 4 Test values of strain increment direction<sup>[23]</sup>

众所周知, 土体非共轴本质原因由于土体各向异性的存在。根据本文材料特性相关位势塑性理论分析, 当材料为各向同性时满足共轴特性, 当材料为各向异性时, 非共轴是否存在取决于材料和应力状态, 然而式(28)一旦设定了非共轴常数, 那么它在整个应力空间都存在相同非共轴角, 这与图 4 的试验结果不符合, 而且非共轴参数也无法体现材料各向异性的实质, 非共轴参数确定也不是由各向异性的试验来确定。因此, 相比之下, 本文塑性位势理论描述的塑性应变方向更为丰富, 随材料从各向同性到各向异性的变化, 非共轴角自然出现, 而且各向异性越大非共轴角会越大, 在材料和应力特殊点(如常规三轴压缩和拉伸点), 既是材料存在各向异性, 但仍然表现了共轴特性, 而且整个过程物理意义更清晰。

## 5 结语

针对传统位势理论采用假设所面临的两个问题,

本文在连续介质力学理论框架下, 将材料特性和塑性应变分配法则联系起来建立了适合岩土材料的材料特性相关的位势理论。

该理论根据岩土材料客观存在的细观特性可以用一个材料特性相关的组构张量来描述的特点, 那么材料的受力时的应变分配法则将受材料特性的影响。材料为各向同性时, 材料自然退化到传统位势理论的形式, 也符合传统位势理论各向同性的假设; 材料为各向异性时, 塑性应变增量分配与材料特性相关。

材料为各向异性时, 塑性应变分量方向和应力方向相同, 但塑性应变增量的大小和塑性因子、组构各向异性程度及组构与主应力方向的几何关系3个因素相关, 这样建立的位势理论不但可以描述岩土材料在主应力轴固定条件下应变增量的各向异性分配关系, 而且可以描述主应力旋转条件下应变增量的大小和方向变化规律。

根据能量转换关系证明材料特性相关位势塑性理论比传统位势理论计算出更大的广义剪应变。同时, 证明了塑性应变方向是否唯一, 完全取决于材料特性和应力状态。与Gutierrez等提出非共轴塑性理论相比, 本文塑性理论更符合非共轴变形特性, 物理意义更清晰。

## 参考文献:

- [1] 郑颖人, 孔亮. 岩土塑性力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010. (ZHENG Ying-ren, KONG Liang. Geotechnical plastic mechanics[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2010. (in Chinese))
- [2] CHENG Y P, NAKATA Y, BOLTON M D. Discrete element simulation of crushable soil[J]. *Géotechnique*, 2003, **53**(7): 633–641.
- [3] JIANG M J, YU H S, HARRIS D. A novel discrete model for granular material incorporating rolling resistance[J]. *Computers and Geotechnics*, 2005, **32**(5): 340–357.
- [4] 杨光华, 李广信, 介玉新. 土的本构模型的广义位势理论及其应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2007. (YANG Guang-hua, LI Guang-xin, JIE Yu-xin. Soil constitutive model of generalized potential theory and its application[M]. Beijing: China Water Resources and Hydropower Press, 2007. (in Chinese))
- [5] 刘元雪, 郑颖人. 含主应力轴旋转的广义塑性位势理论[J]. 力学季刊, 2001, **21**(1): 129–133. (LIU Yuan-xue, ZHENG Ying-ren. Generalized plastic potential theory involving the rotation of principal stress axes[J]. *Chinese Quarterly Mechanics*, 2001, **21**(1): 129–133. (in Chinese))
- [6] RUDNICKI J W, RICE J R. Conditions for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials[J]. *J Mech Phys Solids*, 1975, **23**: 371–394.
- [7] YANG Y, YU H S. A non-coaxial critical state soil model and its application to simple shear simulation[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2006, **30**: 1369–1390.
- [8] HUANG Mao-song, LU Xi-lin, QIAN Jian-gu. Non-coaxial elasto-plasticity model and bifurcation prediction of shear banding in sands[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2010, **34**(9): 906–919.
- [9] GUTIERREZ M, ISHIHARA K. Non-coaxiality and energy dissipation in granular materials[J]. *Soils and Foundations*, 2000, **40**(2): 49–59.
- [10] 史宏彦, 谢定义, 汪闻韶. 平面应变条件下主应力轴旋转产生的应变[J]. 岩土工程学报, 2001, **23**(2): 162–166. (SHI Hong-yan, XIE Ding-yi, WANG Wen-shao. Strain due to rotation of principal stress axes under plane strain condition[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2001, **23**(2): 162–166. (in Chinese))
- [11] ODA M. Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular materials[J]. *Soils and Foundations*, 1972, **12**(1): 17–36.
- [12] ODA M. Fabric tensor and its geometrical meaning[C]// ODA M, IWASHITAK K, ed. *Introduction to Mechanics of Granular Materials*, Rotterdam, The Netherlands: A. A. Balkema, 1999: 27–35.
- [13] YANG Z X, LI X S, YANG J. Quantifying and modelling fabric anisotropy of granular soils[J]. *Géotechnique*, 2008, **58**(4): 237–248.
- [14] DAFALIAS Y F, PAPADIMITRIOU A G, LI X S. Sand plasticity model accounting for inherent fabric anisotropy[J]. *Journal of Engineering Mechanics* 2004, **130**(11): 1319–1333.
- [15] GAO Zhi-wei, ZHAO Ji-dong, YAO Yang-ping. A generalized anisotropic failure criterion for geomaterials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010: 3166–3185.
- [16] LADE P V. Failure criterion for cross-anisotropic soils[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, 2008, **134**(1): 117–124.
- [17] 李学丰, 黄茂松, 钱建固. 宏细观结合的砂土各向异性破坏准则[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, **29**(9): 1885–1892.

- (LI Xue-feng, HUANG Mao-song, QIAN Jian-gu. Failure criterion of anisotropic sand with the method of macro-micro incorporation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, **29**(9): 1885 – 1892. (in Chinese))
- [18] 李学丰, 黄茂松, 孔亮. 宏细观结合考虑主应力轴旋转砂土的破坏特性[J]. 岩土力学, 2013, **34**(7): 1923 – 1930. (LI Xue-feng, HUANG Mao-song, KONG Liang. Sand failure properties under principal stress rotation condition with the method of macro-micro incorporation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, **34**(7): 1923 – 1930. (in Chinese))
- [19] 黄茂松, 李学丰, 贾苍琴. 基于材料状态相关理论的砂土双屈服面模型[J]. 岩土工程学报, 2010, **31**(11): 1764 – 1771. (HUANG Mao-song, LI Xue-feng, JIA Cang-qin. A double yield surface constitutive model for sand based on state-dependent critical state theory[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **31**(11): 1764 – 1771. (in Chinese))
- [20] 孔亮, 李学丰, 赵占兵. 土体热力学模型的改进、验证及有限元分析[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(10): 1595 – 1602. (KONG Liang, LI Xue-feng, ZHAO Zhan-bing. Improvement of thermomechanical model for soil and its verification and FEM analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **31**(10): 1595 – 1602. (in Chinese))
- [21] CURRAY J R. The analysis of two-dimensional orientation data[J]. The Journal of Geology, 1956, **64**(2): 117 – 131.
- [22] KHAN A S, HUANG S. Continuum theory of plasticity[M]. New York: John-Wiley & Sons, 1995.
- [23] LADE P V, DUNCAN J M. Cubical triaxial tests on cohesionless soil[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1973, **99**(10): 793 – 812.

## 新书介绍——《地下工程支护结构与设计》

《地下工程支护结构与设计》由徐干成, 郑颖人, 乔春生, 刘保国编著, 中国水利水电出版社出版, 全书共十五章, 为: 一、概述; 二、岩体力学性质及力学参数预测; 三、围岩压力理论基础知识; 四、现代支护结构原理、类型与原则; 五、锚喷支护工程类比设计; 六、均质地层中锚喷支护的解析计算与设计; 七、地下工程支护结构分析的数值方法; 八、现场量测和监测设计; 九、地下工程施工变形预测的人工智能方法; 十、弹性地基梁的计算理论; 十一、半被覆结构的计算; 十二、直墙拱结构的计算; 十三、复合式衬砌结构的设计与计算; 十四、

地下油罐结构的设计与计算; 十五、地下工程支护结构可靠度设计。

《地下工程支护结构与设计》是编者在《地下工程支护结构》一书基础上, 经扩充、修改, 并增加了部分地下工程领域设计中的一些较新内容以及作者近年来部分新的研究成果, 编纂而成。本书内容充实、资料丰富、图文并茂、新颖实用, 文字简洁朴实, 语言流畅, 对广大土木工程、岩土工程工作者, 对从事地下工程设计、施工、教学及科研等工作的技术人员是一本具有较高参考价值的科学论著。

(本刊编辑部)