

DOI: 10.11779/CJGE202107003

# 基于分形理论的堆石料颗粒破碎极限和概率研究

陈子玉<sup>1</sup>, 李国英<sup>1</sup>, 魏匡民<sup>1</sup>, 武利强<sup>2</sup>, 朱雨萌<sup>1</sup>

(1. 南京水利科学研究院岩土工程研究所, 江苏 南京 210024; 2. 浙江省水利河口研究院, 浙江 杭州 310020)

**摘要:** 为了研究具有分形级配的堆石料颗粒破碎规律与初始分形维数和围压的关系, 采用粗粒土大型三轴试验仪, 针对不同初始级配的缩尺堆石料, 展开不同围压下的颗粒破碎试验, 通过计算颗粒破碎前后分形维数的变化, 建立围压与颗粒分形维数  $D$  的关系式, 对现有的颗粒破碎度指标  $B_r$  的上限值进行修正, 利用分形颗粒集合体的概念对颗粒破碎概率进行计算。研究表明, 堆石料的初始分形维数  $D_0$  影响其应力应变特征; 堆石料颗粒破碎存在极限值, 分形维数和破碎度指标与破碎前后分形维数和围压相关; 颗粒集合体可以用来计算分形级配堆石料分形维数变化规律, 颗粒集合体中颗粒破碎概率与粒径无关, 不同粒径颗粒具有相同的破碎概率, 随着围压增加破碎概率增加, 且存在上下限值, 破碎概率与初始分形维数  $D_0$  相关。

**关键词:** 堆石料; 分形维数; 颗粒破碎; 破碎概率; 级配

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2021)07-1192-09

**作者简介:** 陈子玉(1992—), 男, 博士研究生, 主要从事土石坝、堰塞坝数值计算与分析方面的研究工作。E-mail: chdgcgz@163.com。

## Ultimate state and probability of particle breakage for rockfill materials based on fractal theory

CHEN Zi-yu<sup>1</sup>, LI Guo-ying<sup>1</sup>, WEI Kuang-min<sup>1</sup>, WU Li-qiang<sup>2</sup>, ZHU Yu-meng<sup>1</sup>

(1. Geotechnical Engineering Department, Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210024, China; 2. Zhejiang Institute of Hydraulics and Estuary, Hangzhou 310020, China)

**Abstract:** In order to study the particle breakage rules of rockfill with fractal gradation, a large-scale triaxial test equipment for coarse soil is used to carry out particle breakage experiments under different confining pressures for scaled rockfill materials with different initial gradations. By calculating the change of fractal dimension before and after particle breakage, the effects of stress on the fractal dimension are studied, and the existing particle breakage index  $B_r$  is modified. The probability of particle breakage is calculated by using the concept of fractal particle aggregation. The results show that the initial fractal dimensions affect the stress and strain characteristics of the rockfill materials. The fractal dimension and the index of breakage degree are related to the fractal dimension and confining pressure before and after breakage. The particle aggregation can be used to explain the increase of the fractal dimension in fractal gradation. The probability of particle breakage of particle aggregation is independent of the particle size, and the probability of particle breakage increases with the increase of the confining pressure. The probability of particle breakage has upper and lower limits, and the crushing probability is related to the initial fractal dimension  $D_0$ .

**Key words:** rockfill material; fractal dimension; particle breakage; breakage probability; gradation

## 0 引言

堆石料作为典型的粗粒料广泛应用于土石坝工程中, 目前土石坝工程中堆石料最大粒径可达 1000 mm, 相对于砂土、黏土物质, 堆石料的应力应变特征与粗颗粒材料的颗粒破碎程度密切相关。国内外针对粗颗粒破碎的研究从粗颗粒料试验的影响因素出发, 通过试验分析粗颗粒的颗粒组成<sup>[1]</sup>、应力条件<sup>[2]</sup>、级配曲线<sup>[3-4]</sup>、岩性<sup>[5]</sup>等对粗颗粒材料颗粒破碎的影响。众多

研究表明, 颗粒受压破坏前的级配分布情况对粗颗粒的破碎起到控制性作用, 分形理论由 Mandelbrot 等<sup>[6]</sup>提出以来迅速应用于粗粒土研究领域, 目前国内外大量土石坝工程中所使用的堆石料级配符合分形分布,

**基金项目:** 国家重点研发计划项目(2018YFC1508500); 国家自然科学基金-雅砻江联合基金重点项目(U1765203); 中央级公益性科研院所基本科研业务费专项资金项目(Y320004, Y320005)

**收稿日期:** 2020-08-04

\*通信作者(E-mail: gyli@nhri.cn)

分形维数  $D$  与级配曲线形式相关, 根据朱晟等<sup>[7]</sup>、吴莹等<sup>[8]</sup>的统计, 国内外土石坝填筑所用堆石料分形维数  $D$  大多处于 2.5~2.7。大量的研究表明, 对于连续级配粗粒土,  $D$  值影响到堆石料干密度<sup>[7]</sup>、孔隙比<sup>[9]</sup>、应力应变特征<sup>[2]</sup>, 对颗粒破碎起控制性作用, 且堆石料颗粒破碎存在上限值, 如刘汉龙等<sup>[10]</sup>采用 Hardin<sup>[11]</sup>提出的破碎率  $B_r$  计算方法, 通过粗粒土三轴试验提出了破碎率随应力变化的双曲线方程; 刘萌成等<sup>[12]</sup>采用 Einav<sup>[13]</sup>提出的破碎率定义了峰值破碎指标; 高玉峰等<sup>[14]</sup>依据大型三轴试验的结果提出破碎率与围压呈线性增加关系; 张科芬等<sup>[15]</sup>采用颗粒流数值模拟的方法, 研究了颗粒破碎过程中分形维数增长极限问题; 孙逸飞等<sup>[16]</sup>采用 Einav 破碎度指标<sup>[13]</sup>提出了破碎度指标与剪应变之间呈双曲线关系; 丁建源等<sup>[17]</sup>提出对数回归几率模型来计算破碎度的增长规律。以上研究表明堆石料破碎度上限值与应力条件相关, 但 Hardin<sup>[11]</sup>和 Einav<sup>[13]</sup>提出的破碎度指标上限值与应力条件无关, 与试验不符。由于破碎度指标计算与级配曲线相关, 具有级配分形维数的堆石料, 其破碎度指标与分形维数密切相关, 但破碎度指标上限值与分形维数之间的关系并不明确; 并且破碎度的研究针对堆石料整体, 对于具体颗粒的破碎规律没有进行分析, 针对具有级配分形结构的堆石料破碎率指标还需要进一步的研究。

粗颗粒材料应力加载的过程中, 初始级配向破碎后级配演化的过程伴随着颗粒破碎, 因此针对粗颗粒材料的破碎问题可以建立应力—级配方程—颗粒破碎的研究路线。本文针对符合分形级配堆石料的粗粒土, 采用粗粒土三轴试验研究不同围压条件下分形维数对应力应变特征的影响, 及颗粒破碎后的分形级配特征, 通过试验结果确定出分形级配极限分维的大小, 对 Hardin 破碎率指标  $B_r$  进行修正, 同时通过参数分析研究极限分维与初始分形维数的关系, 建立破碎率指标  $B_r$  与分形维数之间的关系式。利用经典颗粒集合体, 对符合分形结构的粗粒土破碎规律进行研究, 对分形结构粗粒土的单颗粒和整体破碎规律进行数学解释。

## 1 堆石料颗粒破碎试验

### 1.1 颗粒分形理论

根据统计分形模型, 在分形颗粒集合体中, 颗粒数量满足

$$N(\geq d) = \frac{k}{d^D}, \quad (1)$$

式中,  $N$  为颗粒数目,  $k$  为常数,  $d$  为颗粒粒径,  $D$  为

分形颗粒集合体的分形维数。

式 (1) 表明颗粒数量与粒径之间存在对应关系, 根据颗粒质量  $M$  与颗粒数目  $N$  满足 3 次方关系, 可得

$$\lg \frac{M(<d)}{M_0} = (3-D) \lg \left( \frac{d}{d_{\max}} \right). \quad (2)$$

则符合分形级配的堆石料颗粒级配方程表示如下:

$$p_i = \left( \frac{d_i}{d_{\max}} \right)^{3-D} \times 100, \quad (3)$$

式中,  $p_i$  为小于  $d_i$  的累积质量分数 (%),  $D$  为级配分形维数。

由式 (2), (3) 可知, 分形颗粒集合体的分形维数可通过筛分试验, 由式 (2) 确定  $(M(<d)/M_0)$  与  $(d/d_{\max})$  的关系式, 从而确定分形颗粒集合体的分形维数  $D$ 。分形维数  $D$  控制着堆石料的颗粒级配, 由于  $d_{\max}$  为固定值, 颗粒级配曲线的形式由分形维数  $D$  唯一控制, 因此可以通过分形维数  $D$  的大小确定堆石料破碎过程中级配变化及破碎率。

### 1.2 试验设备及试样方案

堆石料颗粒破碎的三轴压缩试验在 GCTS 大三轴压缩试验仪上进行, 仪器见图 1 所示。该仪器主要技术参数: 最大轴向静荷载为 1500 kN; 最大轴向动荷载为 800 kN; 最大静态围压为 3 MPa; 最大动态围压为 3 MPa; 振动频率为 0~20 Hz; 试样尺寸为  $\Phi 300 \text{ mm} \times 700 \text{ mm}$ 。



图 1 大三轴压缩试验仪

Fig. 1 Large triaxial equipment

试验所用堆石料成分为片麻岩, 试验方案为粗粒土常规三轴压缩试验 (CD 试验), 初始级配分形维数  $D_0$  分别取 2.3, 2.5, 2.6, 2.7;  $d_{\max}$  取 60 mm; 级配曲线如图 2 所示, 随着分形维数增加, 堆石料中较细颗粒含量逐渐增加, 曲线上移。试样初始级配分形维数下最大、最小干密度试验结果如表 1 所示, 可以看出, 随着分形维数增加, 最小干密度呈增大趋势, 最

大干密度随分形维数增加先增大后降低,但总体变化较小。试验所用试样采用相对密度制样,相对密度取0.85。围压分别取500,1000,2000,3000 kPa,共16组。试验按照或参考《土工试验方法标准:GB/T 50123—2019》进行。试验中将备好的试样均匀混合,采用振动器分层振实,对饱和试样采用水头法饱和。按要求施加围压,固结完成后不关排水阀,使试样保持排水条件施加轴向压力,以试样破坏或至试样轴向应变的15%作为试验终止条件。试验完成后对堆石料颗粒进行筛分试验,采用式(2)对试验后颗粒级配进行分形维数计算。

表1 堆石料干密度试验结果

Table 1 Dry density test results of rockfill materials

初始分形维数 $D_0$	最大干密度 $\rho_d / (\text{g} \cdot \text{cm}^{-3})$	最小干密度 $\rho_d / (\text{g} \cdot \text{cm}^{-3})$
2.3	2.20	1.60
2.5	2.23	1.69
2.6	2.25	1.74
2.7	2.24	1.77

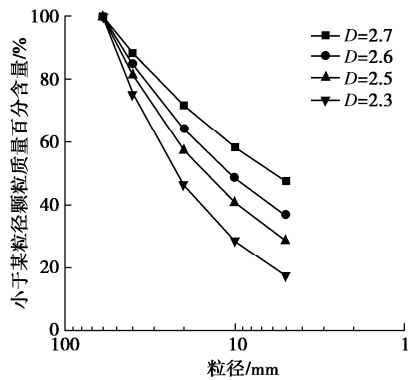


图2  $d_{\max}=60$  mm的级配曲线

Fig. 2 Distribution curves of particles with  $d_{\max}$  of 60 mm

## 2 堆石料大型三轴试验颗粒破碎规律

### 2.1 初始分形维数 $D_0$ 对堆石料强度的影响

不同初始分形维数  $D_0$ 下应力应变曲线如图3所示,基本规律一致。如图3所示,初始分形维数  $D_0$ 为2.7时,随着围压的增加,试样的体应变峰值和轴向应力峰值随之增加,轴向应力峰值出现明显的峰值点;随着轴向应变的增加,试样由剪缩变为剪胀;围压越大,剪缩变为剪胀时的轴向应变越大。堆石料试验前的级配不同,应力应变曲线随着  $D_0$ 的增加而稍有不同,从图3的对比中可知,在相同的围压下,随着分形维数的降低,剪胀性变弱,剪缩转化为剪胀时的轴向应变随着分形维数的降低而增加,由应变软化转变为应变硬化。表明分形维数的降低,堆石料中较细颗粒土含量降低,粗粒土含量增加,粗细颗粒之间接触不充分,三轴试验过程中受到荷载的作用,颗粒发生重排列和破碎效应明显,使得试样应变硬化性质明显。

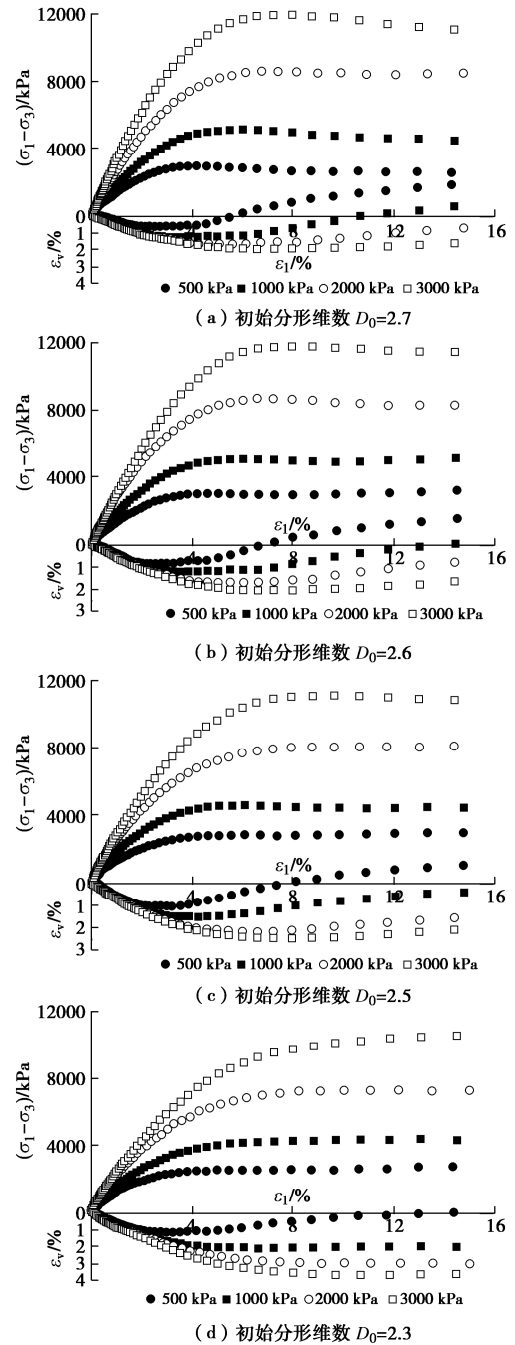


图3 应力应变曲线

Fig. 3 Curves of deviatoric stress and volumetric strain vs. axial strain

### 2.2 不同围压下堆石料剪切破坏后颗粒级配变化

大型三轴试验前后颗粒级配数据及依据式(1)~(3)计算的分形维数统计值如表2所示。由表2可知,相同初始级配下,随着围压的增加,试样破坏后颗粒级配较原级配出现变化,粗颗粒含量降低,细颗粒含量增加,且粒径越小粒组颗粒增加量越多,随着围压增加,小粒径组颗粒增加幅度增大。对破碎后颗粒粒径采用式(2)计算分形维数拟合度在0.99以上,相应的分形维数值随着围压增高而增高,表明具有分形级配结构的堆石料在三轴试验中颗粒破碎后的级配分布同样符合分形分布。不同初始级配下,在相同的围

压下, 细颗粒含量增加值不同, 初始分形维数越小, 细颗粒含量增加值越大, 粗颗粒含量降低值越大, 表明颗粒破碎以粗颗粒为主, 随着分形维数的降低, 颗粒破碎量越大。对比不同围压下堆石料破碎后分形维数, 随着围压的增加, 颗粒破碎后分形维数逐渐增加, 在低围压下分形维数增加值明显, 随着围压增加, 分形维数增加值逐渐降低, 变化趋势变缓, 分形维数趋于稳定值。

表 2 堆石料破碎后颗分结果及分形维数  $D$

Table 2 Grain-size distributions and fractal dimension before and after tests

初始分形维数 $D_0$	围压 /kPa	各粒组颗粒质量分数/%					分形维数 $D$	拟合度
		<60 mm	<40 mm	<20 mm	<10 mm	<5 mm		
2.7	—	100	88.5	71.9	58.4	47.5	—	—
	500	100	88.7	73.0	60.3	49.0	2.714	0.999
	1000	100	89.0	74.3	61.3	49.2	2.720	0.998
	2000	100	92.9	75.4	62.6	51.5	2.737	0.995
	3000	100	93.1	76.6	63.3	52.5	2.745	0.995
2.6	—	100	85.0	64.4	48.8	37.0	—	—
	500	100	87.7	67.4	51.6	40.2	2.634	0.999
	1000	100	87.7	68.3	53.4	42.1	2.652	0.999
	2000	100	91.0	69.8	55.3	44.0	2.676	0.996
	3000	100	91.1	70.9	56.3	44.0	2.686	0.996
2.5	—	100	81.6	57.7	40.8	28.9	—	—
	500	100	83.3	62.5	45.5	33.7	2.563	0.999
	1000	100	85.3	62.9	47.5	35.7	2.585	0.999
	2000	100	87.7	65.4	49.1	37.5	2.607	0.998
	3000	100	90.4	67.0	51.4	39.4	2.629	0.996
2.3	—	100	75.3	46.3	28.5	17.6	—	—
	500	100	81.7	52.3	35.4	24.3	2.426	0.999
	1000	100	82.8	55.4	38.2	27.0	2.470	0.999
	2000	100	87.5	58.7	41.6	30.7	2.522	0.996
	3000	100	87.7	60.0	42.9	31.7	2.537	0.996

以上研究表明: 堆石料在三轴试验中随着围压的增加, 颗粒重排列和颗粒破碎受到初始分形维数  $D_0$  的控制。相同初始分形维数  $D_0$  下, 颗粒破碎后分形维数较初始分形维数  $D_0$  均有所增加, 围压越大增加值越高; 不同初始分形维数  $D_0$  下, 颗粒破碎后分形维数与  $D_0$  数值有关,  $D_0$  数值越小, 增加值越大。堆石料颗粒破碎后级配分形维数  $D$  受到围压和初始分形维数  $D_0$  的共同控制, Xu 等<sup>[1]</sup>、蔡正银等<sup>[9]</sup>、张季如等<sup>[18]</sup>、Yuan 等<sup>[19]</sup>同样提出了类似的观点。

### 3 堆石料颗粒破碎有界性及破碎度指标

#### 3.1 颗粒破碎有界性

由前述分析可知, 堆石料颗粒破碎后级配具有分形结构, 且分形维数相对破碎前增加, 因此如何根据应力条件和初始分形维数预测破碎后颗粒级配分布情

况成为研究的热点内容, 以往的研究中针对分形维数变化的研究与堆石料的应力应变条件相结合, 如蔡正银等<sup>[9]</sup>在研究中采用线性拟合的方式预测分形维数的增长:

$$D = l + \alpha \sigma_3 / p_a + \beta D_0 \quad (4)$$

式中,  $l, \alpha, \beta$  为材料参数, 均通过试验数据拟合获得,  $p_a$  为标准大气压。

郁邦永等<sup>[20]</sup>以指数形式函数预测分形维数的增长趋势:

$$D = -0.55e^{-\frac{\sigma_1}{4.0908}} + 2.5382 \quad (5)$$

式中,  $\sigma_1$  为试验中轴向压力。

陈缪芬等<sup>[21]</sup>以线性拟合的方式确定分形维数随围压增长公式:

$$D / D_0 = a \sigma_3 / p_a + b \quad (6)$$

式中,  $a, b$  为材料参数, 均通过试验数据拟合获得。

由式 (4) ~ (6) 可看出, 颗粒破碎后分形维数均随着围压增加而增加, 由式 (2) 可知, 颗粒级配符合分形级配时, 堆石料的级配分形维数始终小于 3, 由于堆石料破碎后颗粒级配同样符合分形级配, 因此破碎后颗粒级配也应当小于 3, 表 2 中数据说明了这一点。Tsoungui 等<sup>[22]</sup>根据褥垫层试验指出, 颗粒破碎过程中最大粒径分组的颗粒不能完全破碎, 即图 2 中级配曲线的左端始终固定, 随着颗粒破碎的进行, 级配曲线逐渐上移。因此, 以上研究中虽然体现了颗粒破碎过程中分形维数随围压增加而增加的趋势, 但是围压或轴压增大到一定值, 分形维数  $D$  与式 (1) 中分形维数最终不能超过 3.0 的限制相矛盾, 分形维数的增长公式不能体现颗粒破碎的有界性。

为了更直观地观察颗粒破碎后分形维数的变化, 将表 2 中数据进行转化, 将围压除以标准大气压  $p_a$  进行归一化处理, 同时纵轴改变为破碎后分形维数与初始分形维数之差 ( $D - D_0$ ), 相关数据图如图 4 所示。

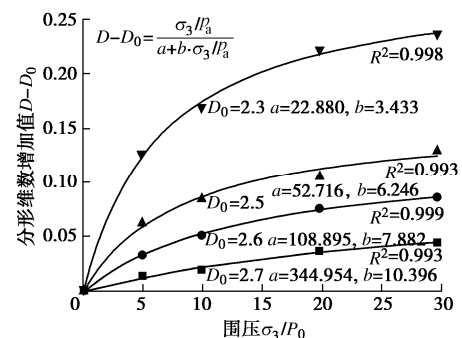


图 4 不同围压下颗粒破碎后分形维数增量  $D - D_0$

Fig. 4 Relationship between increase of fractal dimension and confining pressure

由图 4 可以看出, 颗粒破碎后分形维数增加值随着围压的增加曲线逐渐变缓, 表明颗粒破碎后分形维

数的增加值趋于一个稳定值，持续增加围压对颗粒破碎的影响作用逐渐减弱。Xu 等<sup>[1]</sup>、张季如等<sup>[18]</sup>的研究同样表明颗粒破碎随着围压增加逐渐趋于稳定。张季如等<sup>[18]</sup>对单粒组颗粒进行破碎试验，破碎压力最高达到 200 MPa，远超现实中土石坝等工程中实际载荷，在试验过程中颗粒级配由单粒组级配逐渐趋于分形级配，最终破碎后分形维数趋于稳定值 2.5~2.6。虽然 Xu 等<sup>[1]</sup>、张季如等<sup>[18]</sup>的试验以单颗粒、单粒组堆石料为研究对象，与本文研究对象为破碎前具有分形结构的堆石料不同，但是由图 4 同样可以观察到类似的现象。

此外，由图 4 可知，破碎前后分形维数增量值 ( $D - D_0$ ) 与归一化后的围压数值  $\sigma_3 / p_a$  呈现出双曲线关系，采用类似邓肯-张模型中对弹性参数的处理方式，对图 4 中数据进行拟合，拟合曲线如图 4 所示，得到分形维数增量值 ( $D - D_0$ ) 的关系式：

$$D - D_0 = \frac{\sigma_3 / p_a}{a + b\sigma_3 / p_a} \quad (7)$$

式中， $a, b$  为拟合参数，与当前围压  $\sigma_3$  及初始分形维数  $D_0$  相关。

式 (7) 左端为分形维数增量值，右端为归一化后的围压拟合双曲线函数，由式 (7) 可以通过围压和初始分形维数，预测堆石料颗粒破碎后级配分形维数，且相比较式 (4) ~ (6) 存在极限，能够反映颗粒破碎趋于稳定的现象。

由式 (7) 可知，分形维数极限增量值 ( $D_u - D_0$ ) 与拟合参数  $b$  值直接相关，当围压趋于  $\infty$  时，( $D_u - D_0$ ) =  $1/b$ ，表明  $1/b$  为堆石料极限分形维数增量值。因此拟合参数  $b$  仅与初始分形维数  $D_0$  有关，为了验证式 (7) 以及以上假设的准确性，本文收集了傅华等<sup>[5]</sup>、蔡正银等<sup>[9]</sup>、高玉峰等<sup>[14]</sup>、凌华等<sup>[23]</sup>关于颗粒破碎前后级配的试验数据，共得到 36 组堆石料三轴压缩试验前后的级配数据，通过式 (2) 计算分形维数，通过式 (7) 拟合分形维数的增长趋势图，得到分形维数极限增量值  $D_u$  与初始分形维数  $D_0$  的关系图如图 5 所示。

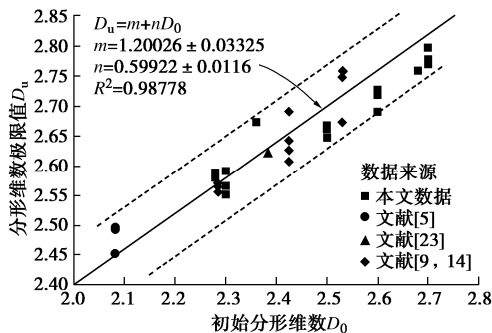


图 5 分形维数极限值与初始分形维数关系图

Fig. 5 Relationship between ultimate and initial fractal dimensions  
虽然图 5 中的数据来自不同研究者的试验结果，

采用的初始级配和岩土体材料种类不同，但是  $D_u$  与  $D_0$  两者之间呈现出很好的线性关系，随着初始分形维数的增加，分形维数极值逐渐增大。对图 5 中线性拟合公式中参数  $m, n$  取整，有

$$D_u = 1.2 + 0.6D_0 \quad (8)$$

式 (8) 给出了极限分形维数与初始分形维数之间的关系式，分形维数极限值仅与初始分形维数相关。堆石料在试验过程中的颗粒破碎极限仅与初始级配有关，不同围压对颗粒破碎的影响为颗粒破碎过程的中间状态，可以通过几组堆石料破碎试验和式 (8) 确定出堆石料在不同围压下分形维数  $D$  的预测公式，从而推测出其颗粒级配分布情况。

### 3.2 破碎度指标修正

Hardin<sup>[11]</sup>提出的破碎度指标  $B_r$  定义为破碎度与破碎势之间的比值，破碎度  $B_r$  代表了当前颗粒级配曲线与破碎前初始级配曲线所围面积大小，破碎势  $B_p$  为初始级配曲线与水平线所围面积大小，如图 6 所示。该破碎度指标隐含了一条假设，即随着应力条件（围压或轴压）的增加，粗颗粒材料会完全破碎，直到颗粒级配曲线呈现为一条水平线，此时试验材料全部为小于 0.074 mm 的黏土颗粒，这一假设明显与 Tsoungui 褥垫层的试验不符，因此其破碎度指标的取值范围并不是 0~1 的范围。而 Einav<sup>[13]</sup>根据 Coop 等<sup>[24]</sup>的研究进一步提出颗粒破碎存在极限，将颗粒破碎的极限分形维数设定为 2.6，Einav<sup>[13]</sup>的研究由单粒径组颗粒压缩试验获得，在单粒径组颗粒破碎过程中，由于颗粒破碎，颗粒级配逐渐趋于分形分布，级配演化的过程中颗粒级配分形维数始终小于 2.6 的数值，但对于已经存在级配分形的堆石料颗粒破碎时不在适用，尤其是初始级配分形维数大于 2.6 的情况，如本文所采用的初始级配分形维数 2.7，颗粒破碎后分形维数进一步增大，此时 Einav<sup>[13]</sup>定义的破碎度指标不再适用，因此针对以上情况需要对破碎度指标进行修正。

如图 6 所示，图中 3 条曲线分别为初始级配  $P_0$ 、当前级配  $P_d$ 、极限级配状态  $P_u$ 、曲线与水平线面积分别定义为  $F_0, F_d, F_u$ 。

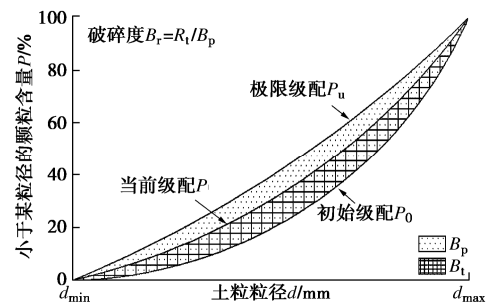


图 6 破碎率计算示意图

Fig. 6 Definition of particle breakage index  $B_r$

颗粒破碎势定义为极限级配与初始级配所围面积之差:  $B_p = F_u - F_0$ ; 当前破碎量为当前级配与初始级配所围面积之差:  $B_t = F_d - F_0$ 。

破碎度指标  $B_r$  定义为

$$B_r = B_t / B_p \quad (9)$$

将  $B_p, B_t$  代入式 (9), 通过计算得到破碎度指标  $B_r$ :

$$B_r = \frac{D - D_0}{D_u - D_0} \frac{4 - D_u}{4 - D} \quad (10)$$

将式 (7) 代入式 (10), 化简可得到与围压相关的破碎度指标  $B_r$ :

$$B_r = \frac{\sigma_3 / p_a (4b - 1)}{(a + b\sigma_3 / p_a) (4 - D_0) - \sigma_3 / p_a} \quad (11)$$

由式 (11) 可知, 当前分形维数  $D = D_0$ , 即未发生破碎时, 破碎度指标  $B_r = 0$ , 当前分形维数  $D = D_u$  时, 颗粒破碎达到极限值, 此时破碎度指标  $B_r = 1.0$ 。与 Einav<sup>[13]</sup> 提出的破碎度指标计算方法相比, 可以适用于初始分形维数  $D > 2.6$  的级配堆石料, 与 Hardin<sup>[11]</sup> 提出的破碎度指标相比, 破碎度指标取值范围为  $1.0 \geq B_r \geq 0.0$ , 对应力一级配方程一颗粒破碎的研究路线来说, 确定了破碎度指标的上下限取值。此外, 对于具有分形级配的堆石料, 其破碎度指标仅与初始分形维数  $D_0$ 、当前分形维数  $D$ 、分形维数极限值  $D_u$  相关, 当确定当前分形维数时, 即可确定当前破碎度大小。通过式 (11) 可根据围压的大小, 推测出当前围压下破碎后颗粒整体破碎度。

### 4 颗粒集合体的破碎概率研究

Turcotte<sup>[25]</sup> 将分形理论引入单颗粒的颗粒破碎概率的计算, 通过重整化群的理论计算了单颗粒破碎与颗粒内部微观颗粒的连接关系; Sammis 等<sup>[26]</sup> 通过地质断层的自相似性现象, 通过重整化群讨论了颗粒破碎概率与粒径的关系。张季如等<sup>[18]</sup> 通过石英砂颗粒破碎试验, 分析了随围压增加各粒组颗粒破碎变化趋势; 王益栋<sup>[27]</sup> 研究了颗粒强度符合 Weibull 分布的粗粒土颗粒破碎概率; 童晨曦等<sup>[28]</sup> 基于马尔科夫链和裂离参量的定义研究了单粒组颗粒破碎趋于分形级配过程中的破碎概率。以上研究结果表明单颗粒或单粒径分组颗粒在破碎后, 级配分布趋于自相似结构, 呈现出分形结构的形式。但是以上研究对已经存在分形结构的堆石料破碎并没有涉及; 颗粒破碎的研究以粒组为研究对象, 对于具体的颗粒破碎概率并没有涉及。文章以经典颗粒集合体为研究对象, 利用统计分形的相关理论, 对分形结构颗粒破碎规律进行研究。

Turcotte<sup>[25]</sup> 提出的经典颗粒集合体模型如图 7 所

示。图 7 中颗粒为长度为 1 的立方体, 立方体颗粒按照  $l=1/2$  的方式破碎, 即上一级颗粒由  $(1/l)^3$  个下一级颗粒组成, 第  $i$  级层次颗粒的尺寸为  $l^i, i$  取值  $0 \sim \infty$ , 随着  $i$  值增加, 该立方体第  $i$  级范围内颗粒数量为

$$N_i = k_i (1/l^i)^{D_0} \quad (12)$$

该立方体内部第  $i+1$  级范围内颗粒数量为

$$N_{i+1} = k_{i+1} (1/l^{i+1})^{D_0} \quad (13)$$

式中,  $k_i$  取值为概率系数, 且  $k_i < 1.0, D_0$  为比例系数。通过图 7 中颗粒集合体, 可以将现实中堆石料粒径分布情况与颗粒集合体相对应: 当  $k_i \neq k_{i+1}$  时, 该集合体可以表示成任意级配下的堆石料粒径分布; 当  $k_i = k_{i+1}$  时, 颗粒集合体符合分形分布的颗粒级配, 此时  $D_0$  为初始分形维数。假定该颗粒集合体在某种应力条件下发生颗粒破碎, 取颗粒集合体中长度尺寸  $l^i$  的第  $i$  级次中颗粒发生破碎的概率为  $p_i$ , 则每一级颗粒破碎前颗粒数量  $N_i$ , 相对应的破碎概率  $p_i$ , 破碎后留存的颗粒数量  $N_{si}$ 。

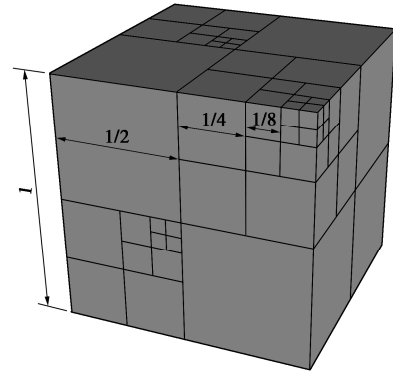


图 7 分形颗粒集合体示意图

Fig. 7 Classical cubic aggregate

在一定的应力条件下, 该颗粒集合体每一级次的颗粒均有可能发生破碎, 破碎概率为  $p_i$ , 则破碎后级颗粒数量除留存数量  $N_{si} = N_i \cdot (1 - p_i)$  外, 还包含第  $i$  级之前  $0 \sim i-1$  级颗粒破碎后, 新生成的尺寸为  $l^i$  的颗粒数量, 由于每一级颗粒向下一级颗粒破碎时, 颗粒数量变为  $1/l^3$  倍, 此时考察第  $m$  级颗粒依次破碎至尺寸为  $l^i$  的颗粒数量 ( $m \leq i$ ):

$$N_{mi} = k_m \left( \frac{1}{l^m} \right)^{D_0} \cdot p_m \cdot p_{m+1} \cdots p_{i-1} \cdot (1 - p_i) \left( \frac{1}{l^{i-m}} \right)^3 \quad (14)$$

式中,  $N_{mi}$  为原颗粒集合体中第  $m$  级颗粒破碎至第  $i$  级颗粒时颗粒数量。

则破碎完成后第  $i$  级颗粒总的数目  $N_{fi}$  为该级颗粒留存数目  $N_{si}$  和小于  $i$  级颗粒破碎至第  $i$  级颗粒数目之和,  $N_{fi}$  经过化简为



$$N_{\bar{i}} = (1 - p_i) \left(\frac{1}{l^i}\right)^3 \prod_0^{i-1} p_i \cdot \left[ k_0 \left(\frac{1}{l^0}\right)^{D_0-3} + k_1 \left(\frac{1}{l^1}\right)^{D_0-3} \frac{1}{p_0} + \dots + k_{i-1} \left(\frac{1}{l^{i-1}}\right)^{D_0-3} \frac{1}{\prod_0^{i-2} p_i} + k_i \left(\frac{1}{l^i}\right)^{D_0-3} \frac{1}{\prod_0^{i-1} p_i} \right] \quad (15)$$

按照上述分析方式，计算破碎完成后第  $i+1$  级颗粒总的数目  $N_{\bar{i}+1}$ ，把  $N_{\bar{i}+1}$ ， $N_{\bar{i}}$  相除，当  $i \gg 1$  时，经过化简得到

$$\frac{N_{\bar{i}+1}}{N_{\bar{i}}} = \left(\frac{1}{l}\right)^3 \frac{p_i(1 - p_{i+1})}{(1 - p_i)} \quad (16)$$

根据分形理论，符合分形结构的颗粒集合体为

$$\frac{N_{\bar{i}+1}}{N_{\bar{i}}} = \left(\frac{1}{l}\right)^D \quad (17)$$

式中， $D$  为破碎后颗粒分形维数。

联立式 (16)，(17) 并移项后取对数，得

$$D = 3 + \log_l \frac{p_i(1 - p_{i+1})}{(1 - p_i)} \quad (18)$$

根据式 (16) ~ (18) 可知，颗粒集合体破碎后， $l^i$  与  $l^{i+1}$  粒组之间的比例关系与各自粒组破碎概率  $p_i$  相关，与原有级配结构无关。当破碎概率满足式 (16)，(18) 时，非分形级配的颗粒集合体 ( $k_i \neq k_{i+1}$ ) 在颗粒破碎后趋于分形级配，式 (18) 解释了张季如等<sup>[18]</sup>、张科芬等<sup>[15]</sup>、王益栋<sup>[27]</sup> 的试验及数值模拟的结果，即非初始分形结构堆石料颗粒破碎后，颗粒级配趋于分形结构；同时当破碎前颗粒集合体为分形级配时，即  $k_i = k_{i+1}$ ，式 (18) 表明破碎后分形维数与颗粒破碎概率相关。

依据 Perfect<sup>[29]</sup> 的研究可知，单颗粒的颗粒破碎过程中，当颗粒破碎几率与尺寸相关，即  $p_{i+1} \neq p_i$  时，式 (18) 表示的分形维数与尺寸相关，称为多重分形；但根据本文试验可知，具有初始分形级配的堆石料破碎后依然保持为单重分形，即分形级配与尺寸无关，这是因为当颗粒处于自相似性分布时，颗粒之间接触形式符合自相似性，粗颗粒由中等颗粒包裹，中等颗粒被细颗粒包裹，如图 8 所示，集合体局部颗粒分布与整体颗粒分布一致，不同粒径颗粒受力接触点符合自相似性，不同粒径颗粒破碎概率相同。

依据 Perfect<sup>[29]</sup> 的研究可知，单颗粒的颗粒破碎过程中，当颗粒破碎几率与尺寸相关，即  $p_{i+1} \neq p_i$  时，式 (18) 表示的分形维数与尺寸相关，称为多重分形；但根据本文试验可知，具有初始分形级配的堆石料破碎后依然保持为单重分形，即分形级配与尺寸无关，这是因为当颗粒处于自相似性分布时，颗粒之间接触形式符合自相似性，粗颗粒由中等颗粒包裹，中等颗粒被细颗粒包裹，如图 8 所示，集合体局部颗粒分布与整体颗粒分布一致，不同粒径颗粒受力接触点符合自相似性，不同粒径颗粒破碎概率相同。

则式 (18) 右端破碎概率  $p_i$  与下标  $i$  阶次无关，此时取  $p_{i+1} = p_i$ ，式 (18) 变换为

$$D = 3 + \log_{1/l} p_i \quad (19)$$

式 (18)，(19) 中隐含了分形颗粒集合体颗粒破碎概率下限值：

$$p_i > (1/l)^{D_0-3} \quad (20)$$

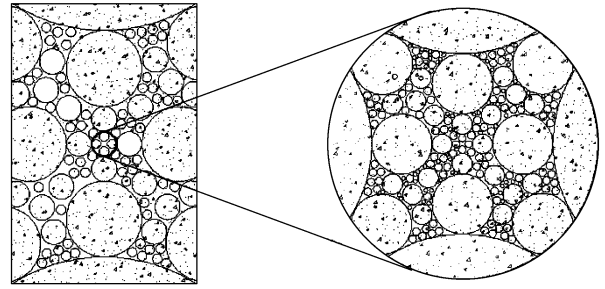


图 8 颗粒接触示意图

Fig. 8 Particle contacts at different scales

初始分形集合体，每一级颗粒破碎的概率均大于  $(1/l)^{D_0-3}$  时，破碎后形成的颗粒分形集合体才能为分形结构，当  $p_i = (1/l)^{D_0-3}$  时，新生成的颗粒分形集合体与初始分形颗粒集合体分形维数相同。将式 (7) 代入式 (20)，得到分形结构堆石料颗粒破碎概率为

$$p_i = (1/l)^{\frac{\sigma_3/p_a}{a+b\sigma_3/p_a} + D_0 - 3} \quad (21)$$

由式 (21) 可知，具有分形级配的堆石料颗粒的破碎概率，受到围压和初始分形维数的影响，围压越大，破碎概率越高，同时结合式 (8) 可知，分形集合体中单颗粒的破碎概率存在极限值：

$$p_i < (1/l)^{0.6D_0 - 1.8} \quad (22)$$

由于对于不同的颗粒分形集合体， $1/l$  可以取值 2, 3, 4, ... 等整数，颗粒分形集合体与现实中堆石料并不是一一对应的关系，还需要通过进一步的颗粒破碎试验，确定分形集合体中颗粒的具体破碎概率，从而确定出对应的  $l$  数值，同时结合式 (20) ~ (22) 确定出分形颗粒集合体颗粒破碎的下限值、中间值、上限值，为进一步的研究奠定基础。

## 5 结 论

本文针对具有分形级配的堆石料颗粒进行了三轴压缩试验，研究了不同分形维数下堆石料应力应变特征及分形维数的变化规律，并对破碎度指标进行了修正，得到以下 3 点结论。

(1) 级配分形维数  $D$  影响堆石料的应力应变特征，随着分形维数的增加，堆石料的应力应变特征由应变软化向应变硬化状态转化，颗粒破碎后分形维数的变化受到初始分形维数和围压共同的影响。

(2) 通过数据拟合的方式建立了堆石料颗粒破碎后分形维数与围压的双曲线关系，破碎后分形维数存在极限值，极限值与初始分形维数相关，初始分形维数越大，极限值增加随之降低；依据颗粒分形维数极限值修正了 Hardin<sup>[11]</sup> 和 Einav<sup>[13]</sup> 提出的破碎度指标  $B_f$  的上限值。

(3) 采用颗粒集合体模型, 对符合分形理论的堆石料的颗粒破碎进行了数学计算, 建立了堆石料破碎后的分形维数与破碎概率及外部围压之间的关系式, 利用初始分形维数和极限分形维数, 给出了颗粒破碎概率的上下限值。

#### 参考文献:

- [1] XU Y F, FENG X B, ZHU H G, et al. Fractal model for rockfill shear strength based on particle fragmentation[J]. *Granular Matter*, 2015, **17**(6): 753 - 761.
- [2] 孔宪京, 刘京茂, 邹德高, 等. 紫坪铺面板坝堆石料颗粒破碎试验研究[J]. *岩土力学*, 2014, **35**(1): 35 - 40. (KONG Xian-jing, LIU Jing-mao, ZOU De-gao, et al. Experimental study of particle breakage of Zipingpu rockfill material[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2014, **35**(1): 35 - 40. (in Chinese))
- [3] 郭万里, 朱俊高, 钱 彬, 等. 粗粒土的颗粒破碎演化模型及其试验验证[J]. *岩土力学*, 2019, **40**(3): 1023 - 1029. (GUO Wan-li, ZHU Jun-gao, QIAN Bin, et al. Particle breakage evolution model of coarse-grained soil and its experimental verification[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2019, **40**(3): 1023 - 1029. (in Chinese))
- [4] BI J F, LUO X Q, SHEN H, et al. Fractal dimensions of granular materials based on grading curves[J]. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 2018, **30**(6): 04018083.
- [5] 傅 华, 凌 华, 蔡正银. 粗颗粒土颗粒破碎影响因素试验研究[J]. *河海大学学报(自然科学版)*, 2009, **37**(1): 75 - 79. (FU Hua, LING Hua, CAI Zheng-yin. Influencing factors for particle breakage of coarse grained soil[J]. *Journal of Hohai University (Natural Sciences)*, 2009, **37**(1): 75 - 79. (in Chinese))
- [6] MANDELROT B B, AIZENMAN M. Fractals: form, chance, and dimension[J]. *Physics Today*, 1979, **32**(5): 65 - 66.
- [7] 朱 晟, 邓石德, 宁志远, 等. 基于分形理论的堆石料级配设计方法[J]. *岩土工程学报*, 2017, **39**(6): 1151 - 1155. (ZHU Sheng, DENG Shi-de, NING Zhi-yuan, et al. Gradation design method for rockfill materials based on fractal theory[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2017, **39**(6): 1151 - 1155. (in Chinese))
- [8] 吴 莹, 马 刚, 周 伟, 等. 基于分形理论的堆石料级配优化研究[J]. *岩土力学*, 2016, **37**(7): 1977 - 1985. (WU Ying, MA Gang, ZHOU Wei, et al. Optimization of gradation of rockfill materials based on the fractal theory[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2016, **37**(7): 1977 - 1985. (in Chinese))
- [9] 蔡正银, 李小梅, 关云飞, 等. 堆石料的颗粒破碎规律研究[J]. *岩土工程学报*, 2016, **38**(5): 923 - 929. (CAI Zheng-yin, LI Xiao-mei, GUAN Yun-fei, et al. Particle breakage rules of rockfill materials[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, **38**(5): 923 - 929. (in Chinese))
- [10] 刘汉龙, 秦红玉, 高玉峰, 等. 堆石粗粒料颗粒破碎试验研究[J]. *岩土力学*, 2005, **26**(4): 562 - 566. (LIU Han-long, QIN Hong-yu, GAO Yu-Feng, et al. Experimental study on particle breakage of rockfill and coarse aggregates[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2005, **26**(4): 562 - 566. (in Chinese))
- [11] HARDIN B O. Crushing of soil particles[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1985, **111**(10): 1177 - 1192.
- [12] 刘萌成, 高玉峰, 刘汉龙. 模拟堆石料颗粒破碎对强度变形的影响[J]. *岩土工程学报*, 2011, **33**(11): 1691 - 1699. (LIU Meng-cheng, GAO Yu-feng, LIU Han-long. Effect of particle breakage on strength and deformation of modeled rockfills[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2011, **33**(11): 1691 - 1699. (in Chinese))
- [13] EINAV I. Breakage mechanics—part I: theory[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2007, **55**(6): 1274 - 1297.
- [14] 高玉峰, 张 兵, 刘 伟, 等. 堆石料颗粒破碎特征的大型三轴试验研究[J]. *岩土力学*, 2009, **30**(5): 1237 - 1240, 1246. (GAO Yu-feng, ZHANG Bing, LIU Wei, et al. Experimental study on particle breakage behavior of rockfills in large-scale triaxial tests[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, **30**(5): 1237 - 1240, 1246. (in Chinese))
- [15] 张科芬, 张 升, 滕继东, 等. 离散元中破碎自组织对颗粒破碎影响研究[J]. *岩土工程学报*, 2018, **40**(4): 743 - 751. (ZHANG Ke-fen, ZHANG Sheng, TENG Ji-dong, et al. Influences of self-organization of granular materials on particle crushing based on discrete element method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2018, **40**(4): 743 - 751. (in Chinese))
- [16] 孙逸飞, 沈 扬, 刘汉龙. 粗粒土的分数阶应变率及其与分形维度的关系[J]. *岩土力学*, 2018, **39**(增刊 1): 297 - 302, 317. (SUN Yi-fei, SHEN Yang, LIU Han-long. Fractional strain rate and its relation with fractal dimension of granular soils[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2018, **39**(S1): 297 - 302, 317. (in Chinese))
- [17] 丁建源, 陈晓斌, 张家生, 等. 基于对数几率回归模型的粗颗粒土颗粒破碎过程演化研究[J]. *岩土力学*, 2019, **40**(4): 1465 - 1473. (DING Jian-yuan, CHEN Xiao-bin, ZHANG Jia-sheng, et al. Predicting model for coarse-grained soil particle breakage process using logarithmic probability



- regression mathematic method[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2019, **40**(4): 1465 - 1473. (in Chinese))
- [18] 张季如, 胡泳, 张弼文, 等. 石英砂砾破碎过程中粒径分布的分形行为研究[J]. *岩土工程学报*, 2015, **37**(5): 784 - 791. (ZHANG Ji-ru, HU Yong, ZHANG Bi-wen, et al. Fractal behavior of particle-size distribution during particle crushing of quartz sand and gravel[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2015, **37**(5): 784 - 791. (in Chinese))
- [19] YUAN C Y, WANG Y H, WEI H. The energetics of cataclasis based on breakage mechanics[J]. *Journal of Ocean University of China*, 2014, **13**(1): 1 - 12.
- [20] 郁邦永, 陈占清, 吴疆宇. 级配饱和破碎岩石压缩变形与分形特性试验研究[J]. *采矿与安全工程学报*, 2016, **33**(2): 342 - 347. (YU Bang-yong, CHEN Zhan-qing, WU Jiang-yu. Experimental study on compaction and fractal characteristics of saturated broken rocks with different initial gradations[J]. *Journal of Mining & Safety Engineering*, 2016, **33**(2): 342 - 347. (in Chinese))
- [21] 陈镠芬, 高庄平, 朱俊高, 等. 粗粒土级配及颗粒破碎分形特性[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2015, **46**(9): 3446 - 3453. (CHEN Liu-fen, GAO Zhuang-ping, ZHU Jun-gao, et al. Gradation of coarse grained soil and fractal geometry character of particle breakage[J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2015, **46**(9): 3446 - 3453. (in Chinese))
- [22] TSOUNGUI O, VALLET D, CHARMET J C. Numerical model of crushing of grains inside two-dimensional granular materials[J]. *Powder Technology*, 1999, **105**(1): 190 - 198.
- [23] 凌华, 傅华, 韩华强. 粗粒土强度和变形的级配影响试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2017, **39**(增刊 1): 12 - 16. (LING Hua, FU Hua, HAN Hua-qiang. Experimental study on effects of gradation on strength and deformation of coarse-grained soil[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2017, **39**(S1): 12 - 16. (in Chinese))
- [24] COOP M R, SORENSEN K K, BODAS F T, et al. Particle breakage during shearing of a carbonate sand[J]. *Géotechnique*, 2004, **54**(3): 157 - 163.
- [25] TURCOTTE D L. Fractals and fragmentation[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1986, **91**(B2): 1921 - 1926.
- [26] SAMMIS C, KING G, BIEGEL R. The kinematics of gouge deformation[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 1987, **125**(5): 777 - 812.
- [27] 王益栋. 粗粒土单颗粒压缩破碎强度和压缩变形的分形理论[D]. 上海: 上海交通大学, 2017. (WANG Yi-dong. Fractal Theory of Single Particle Crushing Strength and Compression Deformation of Coarse Granular Materials[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2017. (in Chinese))
- [28] 童晨曦, 张升, 李希, 等. 基于Markov链的岩土材料颗粒破碎演化规律研究[J]. *岩土工程学报*, 2015, **37**(5): 870 - 877. (TONG Chen-xi, ZHANG Sheng, LI Xi, et al. Evolution of geotechnical materials based on Markov chain considering particle crushing[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2015, **37**(5): 870 - 877. (in Chinese))
- [29] PERFECT E. Fractal models for the fragmentation of rocks and soils: a review[J]. *Engineering Geology*, 1997, **48**(3): 185 - 198.