

DOI: 10.11779/CJGE201605022

一种边坡稳定分析的新方法

秦忠国，张向阳

(河海大学力学与材料学院工程力学系，江苏 南京 210098)

摘要：结合有限单元法和极限平衡法，提出了一种边坡稳定计算的新方法，介绍了该方法的基本理论和公式推导。与边坡稳定经典计算方法的不同在于，不需要对条间力等条件进行人为简化和假定，且严格满足所有的平衡条件。数值算例分析表明了该方法的正确性和有效性，适用范围广，且计算公式相对简单，易于编程，收敛速度快。

关键词：边坡稳定；有限元法；极限平衡；条间力假定

中图分类号：TU43 文献标识码：A 文章编号：1000-4548(2016)05-0946-06

作者简介：秦忠国(1961-)，男，教授，主要从事计算力学及工程仿真，有限元软件开发等方面的教学和科研。E-mail: zgqin@hhu.edu.cn。

New method for slope stability analysis

QIN Zhong-guo, ZHANG Xiang-yang

(Department of Engineering Mechanics, College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: A new method is proposed for the calculation of slope stability, and the basic theories and formula derivations of the method are introduced. The method is based on the idea of both the finite element method and the limit equilibrium method. In contrast with that of the classical limit equilibrium methods for the calculation of slope stability, the advantage of the new method is that it can strictly satisfy all the equilibrium conditions without factitious simplification and assumptions to the inter-slice forces, and only needs to specify a slip surface with any shape. The analyses of numerical examples indicate the validity and effectiveness of the proposed method, that is, it is practical to use for many applications and has advantages of relatively simple calculation formulas, easy programming and fast convergence in iterations.

Key words: slope stability; finite element method; limit equilibrium; inter-slice force assumption

0 引言

边坡稳定分析是土力学的经典问题，在水利、市政、交通、矿山等工程中有大量的应用，基于极限平衡原理的各种边坡稳定分析方法是目前工程设计中的最主要方法，根据计算假定不同，极限平衡法包括最经典的瑞典法到最严格的摩根斯坦法等多种方法^[1-2]。在现有各类极限平衡法中，为了使问题可解，需要引入若干计算假定。1996年时邓肯研究了20篇相关的文献资料，概括了这些方法的优点和缺点^[3]。

陈祖煜^[2]早期的研究工作改进了边坡稳定分析中的摩根斯坦-普莱斯法的理论分析和计算方法。陈祖煜对摩根斯坦-普莱斯法的理论表达式和实质涵义进行了重要的完善，列出了主要的力学平衡方程的理论公式，在此基础上基于剪应力成对原理给出了方程求解时的边界条件。根据严谨的理论分析得到了土条的力学平衡方程，而且得到了封闭解；并得到了依据牛顿法解答力学平衡方程的理论公式，改善了其他稳定分析的极限平衡方法一直以来没有克服的计算不收敛的

情况；提出对土条侧向力的假定务必符合的边界条件，来满足剪应力成对原理的要求，以此全面改进了在边坡稳定分析领域中具有重要学术地位的摩根斯坦-普莱斯法^[2]。在1983年，Che等得到了国际专家的认可，并在2003年列入“碾压式土石坝设计规范”^[4]。

在有限单元方法提出的早期，学者和专家们就开始研究有限单元法和边坡稳定分析中极限平衡法之间的关联问题。最早的研究内容是在边坡中指定一个任意的滑动面，进行有限元计算得到边坡的应力分布，找出滑动面上各节点的应力值，最后按照加权平均的思想得到安全系数。

在此研究基础上，有学者研究在许多滑动面中确定一个最危险的滑动面。这些研究所用的方法和步骤跟传统的极限平衡法相同，而且，也可以得到和传统极限平衡法较相近的最危险滑动面和相应的安全系数。后来，研究者们采用降低材料强度指标的方法，

且边坡失稳以非线性有限元的计算是不是收敛来作为依据。在此基础上安全系数就是材料强度降低的倍数。国内外的研究者们如格里菲斯, 郑颖人等^[6]、赵尚毅等^[7]、张鲁渝等^[8]在这个研究领域进行了重要的探索。根据该方法, 首先要拥有一个稳定有效的有限元计算程序。不然不能判断计算不收敛是因为程序本身的问题还是边坡失稳导致的。

本文通过联立有限单元法和极限平衡法的思想, 提出了一种边坡稳定分析的新方法, 克服了传统方法条间力假设等问题, 推导了相应的理论公式, 并用数值算例测试了该程序的有效性。

1 边坡稳定分析的新方法

1.1 基本原则

本文提出一种稳定计算的新方法, 该法符合边坡稳定分析的3个基本假设^[4-5], 包含静力平衡条件、安全系数和莫尔库仑强度这3个基本原则。

(1) 关于安全系数的定义

土坡中任意滑动面滑动的安全系数 F 表达方式为, 将土体的抗剪强度指标降低为 c'/F 和 $\tan\varphi'/F$, 使滑动体在滑动面处达到极限平衡状态, 即

$$\tau = c'/F + \sigma'_n \cdot \tan\varphi'/F \quad . \quad (1)$$

这种将强度指标降低的倍数定义为安全系数的方法已经得到国内外工程界的认可。根据这一定义, 可能会增加计算方面的迭代和收敛问题。

(2) 莫尔-库仑强度准则

假设滑块体沿着某一滑动面滑动, 在此滑动面上的滑块体中每一点都达到了极限平衡, 也就是正应力 σ'_n 和剪应力 τ 满足莫尔-库仑强度准则。假定土条底部的法向力和切向力分别为 N 和 T , 则有

$$\Delta T = c' \Delta x \sec \alpha / F + (\Delta N - \mu \Delta x \sec \alpha) \tan \varphi / F \quad . \quad (2)$$

式中 Δx 为土条宽度; μ 为孔隙水压力; α 为土条底倾角, $\tan \alpha = dy/dx$ 。

(3) 静力平衡条件

将假设的滑动土体划分成若干个土条, 根据土体的受力情况建立力和力矩的平衡方程。在联立的方程组中, 未知数个数超过了方程个数时, 求解该静不定问题的办法是假定多余的未知数, 则剩余的未知数个数等于方程个数, 进一步的解出安全系数的值。

1.2 计算模型和算法

在整个土体中, 针对某个指定滑动面(不限定为圆弧, 可以是任意形状的滑动面)以上的滑动块, 进行垂直条分或者斜向条分, 也可以任意划分网格。将滑块视为一个变形体, 将各分条视为一个二维变形体单元, 在单元底部施加法向位移约束, 在滑面出口端

施加一个切向位移约束, 如图1所示。根据毕肖普安全系数定义^[9], 设初始安全系数为 K_0 , 对土条单元 i 进行分析, 第一次计算时可以假设法向力为 $N = W \cos \theta$, 其中 θ 是土条底部与水平方向的夹角, 此项假设不影响该算法的正确性和严格性, 因为根据有限元法计算时, 可知这些节点的法向位移已知, 引入边界条件后, 法向力自然就可以准确求解。

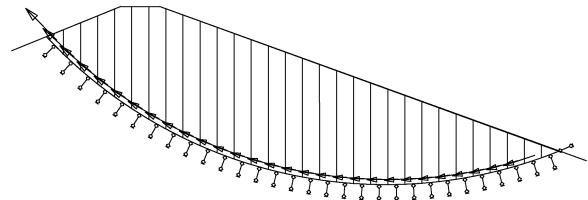


图1 边坡计算模型

Fig. 1 Slope model

为简明起见, 本文略去有限元单元法基本原理部分, 仅给出涉及本文方法的主要推导和列式。

单元节点平衡方程为

$$[K]^e \{ \delta \}^e = \{ F \}^e \quad , \quad (3)$$

式中, $[K]^e$ 为单元劲度矩阵, $\{ \delta \}^e$ 为单元节点位移列阵, $\{ F \}^e$ 为单元荷载列阵。

组装为总体平衡方程:

$$[K] \{ \delta \} = \{ R \} \quad , \quad (4)$$

式中, $[K]$ 为整体劲度矩阵, $\{ \delta \}$ 为整体节点位移列阵, $\{ R \}$ 为整体荷载列阵。

引入边界条件后的总体平衡方程为

$$[K'] \{ \delta \} = \{ R' \} \quad . \quad (5)$$

解方程得

$$\{ \delta \} = [K']^{-1} \{ R' \} \quad , \quad (6)$$

$$\{ R' \} = \{ R_i \} + \{ R_t \} \quad , \quad (7)$$

式中, $[K']$ 为引入边界条件后的整体劲度矩阵; $\{ R_i \}$ 为外荷载的总和, 包括自重、地震惯性力、渗流力、上部堆载等; $\{ R_t \}$ 为土体中由 c , φ 提供的抗滑力。

将式(6)、(7)代入式(4)可得整体平衡方程:

$$[K][K']^{-1} (\{ R_i \} + \{ R_t \}) = \{ R_i \} + \{ R_t \} + \{ R_n \} + \{ R_0 \} \quad . \quad (8)$$

式中 $\{ R_n \}$ 为支座提供的法向力, 仅与滑面(即底边)节点对应的元素不为0; $\{ R_0 \}$ 为出口推力, 仅与边界出口节点对应的元素不为0, 当达到极限平衡时出口推力为0, 得到极限平衡方程:

$$[K][K']^{-1} (\{ R_i \} + \{ R_t \}) = \{ R_i \} + \{ R_t \} + \{ R_n \} \quad . \quad (9)$$

把式(9)中各分量写成矩阵形式:

$$\{ R_n \} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{x1} \\ N_{y1} \\ N_{x2} \\ N_{y2} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad , \quad (10)$$

$$\{R_i\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_{y1} \\ T_{x2} \\ T_{y2} \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{xi} \\ T_{yi} \\ c_i l_i \cos \alpha_i + N_{yi} \tan \varphi_i \\ c_i l_i \sin \alpha_i - N_{xi} \tan \varphi_i \end{Bmatrix} \quad . \quad (11)$$

假设安全系数为 F_s , 由图2受力分析可知, 建立 T_i 与 N_i 的关系式:

$$\begin{aligned} T_{xi} &= -\frac{1}{F_s}(c_i l_i + \tan \varphi_i \sqrt{N_{xi}^2 + N_{yi}^2}) \cos \alpha_i \\ &= -\frac{1}{F_s}(c_i l_i \cos \alpha_i + N_{yi} \tan \varphi_i) \quad , \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} T_{yi} &= -\frac{1}{F_s}(c_i l_i + \tan \varphi_i \sqrt{N_{xi}^2 + N_{yi}^2}) \sin \alpha_i \\ &= -\frac{1}{F_s}(c_i l_i \sin \alpha_i - N_{xi} \tan \varphi_i) \quad , \end{aligned} \quad (13)$$

即

$$\begin{aligned} \{T_i\} &= \begin{Bmatrix} T_{xi} \\ T_{yi} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{F_s} \begin{Bmatrix} c_i l_i \cos \alpha_i + N_{yi} \tan \varphi_i \\ c_i l_i \sin \alpha_i - N_{xi} \tan \varphi_i \end{Bmatrix} \\ &= -\frac{c_i l_i}{F_s} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{Bmatrix} - \frac{\tan \varphi_i}{F_s} \begin{Bmatrix} N_{yi} \\ -N_{xi} \end{Bmatrix} \quad . \end{aligned} \quad (14)$$

也可以表示为

$$\begin{aligned} \{T_i\} &= \begin{Bmatrix} T_{xi} \\ T_{yi} \end{Bmatrix} = -\frac{c_i l_i}{F_s} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{Bmatrix} - \frac{\tan \varphi_i}{F_s} \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{xi} \\ N_{yi} \end{Bmatrix} \\ &= -\frac{c_i l_i}{F_s} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{Bmatrix} - \frac{1}{F_s} \begin{Bmatrix} 0 & \tan \varphi_i \\ -\tan \varphi_i & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{xi} \\ N_{yi} \end{Bmatrix} \quad . \end{aligned} \quad (15)$$

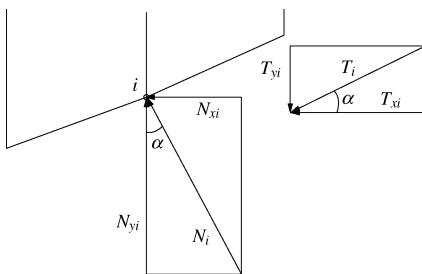


图 2 滑动面上单元的底部节点受力分析

Fig. 2 Force analysis of bottom node for sliding surface element

将式(15)代入式(11)可得

$$\{R_i\} = -\frac{1}{F_s}\{C\} - \frac{1}{F_s}[\phi]\{R_n\} \quad , \quad (16)$$

$$\text{式中, } \{C\} = \begin{Bmatrix} c_1 l_1 \cos \alpha_1 \\ c_1 l_1 \sin \alpha_1 \\ c_2 l_2 \cos \alpha_2 \\ c_2 l_2 \sin \alpha_2 \\ \dots \end{Bmatrix} \quad ,$$

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 0 & \tan \varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\tan \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tan \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\tan \varphi_2 & 0 & 0 \\ \dots & & & & \end{bmatrix}.$$

由式(8)得

$$\begin{aligned} \{R_0\} &= [K][K']^{-1} \left[\{R_i\} - \frac{1}{F_s}\{C\} - \frac{1}{F_s}[\phi]\{R_n\} \right] - \\ &\quad \{R_i\} + \frac{1}{F_s}\{C\} + \frac{1}{F_s}[\phi]\{R_n\} - \{R_n\} \quad . \end{aligned} \quad (17)$$

将式(16)代入式(17)可得

$$\begin{aligned} \{R_0\} &= [K][K']^{-1} \left[\{R_i\} - \frac{1}{F_s}\{C\} - \frac{1}{F_s}[\phi]\{R_n\} \right] - \\ &\quad \{R_i\} + \frac{1}{F_s}\{C\} + \frac{1}{F_s}[\phi]\{R_n\} - \{R_n\} \quad , \end{aligned} \quad (18)$$

整理后得

$$\begin{aligned} \{R_0\} &= \frac{1}{F_s} \left[[E] - [K][K']^{-1} \right] \cdot \{C\} + \frac{1}{F_s} \left[[E] - [K][K']^{-1} \right] \cdot [\phi]\{R_n\} - \left[[E] - [K][K']^{-1} \right] \cdot \{R_i\} - \{R_n\} \quad , \end{aligned} \quad (19)$$

令 $[Q] = [E] - [K][K']^{-1}$, 有

$$\{R_0\} = \frac{1}{F_s}[Q]\{C\} + \frac{1}{F_s}[Q][\phi]\{R_n\} - [Q]\{R_i\} - \{R_n\}, \quad (20)$$

或者更加简洁的形式:

$$\{R_0\} = [Q] \left(\frac{1}{F_s}\{C\} + \frac{1}{F_s}[\phi]\{R_n\} - \{R_i\} \right) - \{R_n\}, \quad (21)$$

移项得

$$\begin{aligned} \{R_n\} &= [Q] \left(\frac{1}{F_s}\{C\} + \frac{1}{F_s}[\phi]\{R_n\} - \{R_i\} \right) - \{R_0\} \\ &= [Q]\{w\} - \{R_0\} \quad . \end{aligned} \quad (22)$$

因为当滑块达到极限平衡状态时, 滑面出口端的切向力(出口端支座反力)为0, 所以 $\{R_0\} = 0$, 那么

$$F_s\{R_n\} = [Q](\{C\} + [\phi]\{R_n\} - F_s\{R_i\}) \quad , \quad (23)$$

$$F_s(\{R_n\} + [Q]\{R_i\}) = [Q](\{C\} + [\phi]\{R_n\}) \quad , \quad (24)$$

$$F_s = \frac{\|[Q](\{C\} + [\phi]\{R_n\})\|}{\|\{R_n\} + [Q]\{R_i\}\|} \quad . \quad (25)$$

由上述分析可知, 边坡安全系数是两个向量长度的比值, 使安全系数的概念更容易理解, 同时计算公式简单、明了, 初值的选择不影响计算结果, 且容易收敛。

1.3 计算步骤和程序流程图

根据以上算法可知, 具体的计算步骤及迭代过程如下: ①通过前处理, 获得指定滑动面上的滑动块的单元划分信息, 如土体材料参数, 各个单元信息, 节

点坐标等; ②由有限元单元法计算得到土体单元节点的等效荷载列阵, 给 R_n 赋初值为 R_n^0 ; ③将 R_n^0 代入式

$$(25), F_s^{n+1} = \frac{\|[\mathcal{Q}](\{C\} + [\phi]\{R_n\}^{n+1})\|}{\|\{R_n\}^{n+1} + [\mathcal{Q}]\{R_1\}\|}, \text{ 可得安全系数}$$

F_s^1 ; ④再将 F_s^1 代入式 (22), $\{R_n\}^{n+1} = [\mathcal{Q}] \left(\frac{1}{F_s^n} \{C\} + \frac{1}{F_s^n} [\phi] \{R_n\}^n - \{R_1\} \right)$, 计算得到新的 R_n^1 ; ⑤依次循环

步骤③和④, 直至前后两次所求的安全系数 F_s 的差值在允许的误差范围内, 即 $|F_s^{n+1} - F_s^n| < 0.000001$, 则所求得的解就是边坡稳定的安全系数。

使用C++语言编制相关的程序, 其程序流程如图3所示。

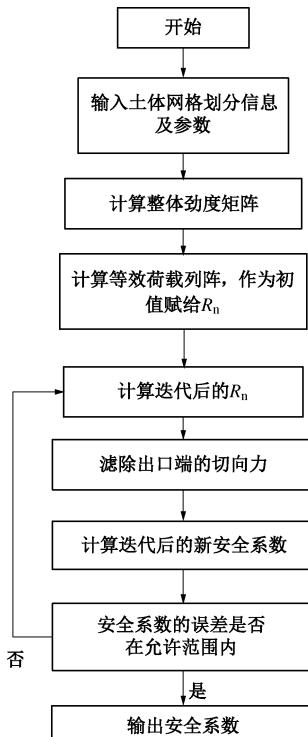


图3 程序流程图

Fig. 3 Flow chart of program

2 数值算例及分析

2.1 算例一

采用ACADS边坡稳定分析程序考核题1作为算例^[10], 一个二维均质的土坡, 边坡的形状如图4所示, 土体的材料特性如表1所示, 推荐答案安全系数为1.00, 最危险滑动面位置及形状见图4。由于该算例被很多学者用很多方法进行了验证性分析, 得到的结果比较可靠。因此本文的新算法分析该均质边坡的稳定性, 与推荐答案进行比较, 以验证其有效性和可行性。

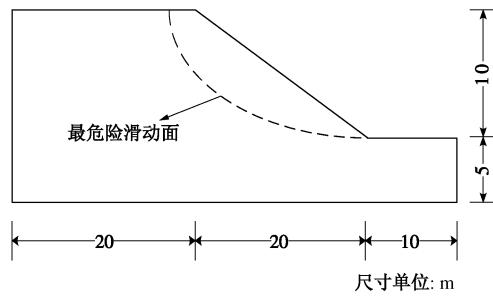


图4 边坡形状及最危险滑动面位置

Fig. 4 Shape and location of the most critical slip surface in a homogeneous slope

(1) 计算模型及结果分析

土体材料参数为 $c=3.0$ kPa, $\varphi=19.6^\circ$, $\gamma=20.0$ kN/m³, $E=100.0$ MPa, $\mu=0.35$ 。土坡的计算网格模型如图5所示, 滑动面(可以是任意形状)上的节点施加法向位移约束, 滑面出口端施加一个切向位移约束, 采用平面等参元进行计算, 当滑坡达到极限平衡状态时, 滑面出口端的切向力(出口端支座反力)为0, 此时迭代计算求得安全系数即为边坡稳定的安全系数。

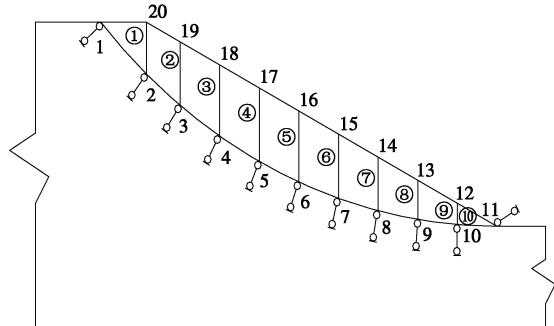


图5 土坡网格模型图

Fig. 5 Slope meshes

通过6种不同的方法对该边坡进行稳定性分析, 计算结果见表1。从计算结果中可知, 本文的新方法具有较高的计算精度, 其计算结果与各种极限平衡法的计算结果误差均在2%以内; 且使用的单元数和迭代次数少, 计算简便, 收敛性好。

表1 不同方法计算的安全系数

Table 1 Factors of safety calculated by different methods

方法	安全系数
Bishop	0.987
Spencer	0.986
GLE	0.986
Janbu corrected	0.990
Morgenstern-Price	0.991
新方法(10个单元, 5次迭代)	0.988
ACADS 推荐答案	1.000

(2) 单元数量对安全系数的影响

对该算例划分不同的网格, 采用不同的单元数进

行计算, 其计算结果见表2和图6。可知, 单元数对于分析结果是有影响的, 在单元数较少时影响相对较大。随着单元数量的增加, 分析结果趋于稳定, 且稳定后的安全系数值比土条单元数少时较小。从具体数值来看, 该改进的方法计算精度较高, 较少单元数获得的安全系数和较多单元数获得的安全系数误差较小。

表 2 不同土条单元数计算的安全系数

Table 2 Safety factors obtained from different calculations with different total numbers of soil elements

土条单元数	安全系数
3	0.996294
4	0.991555
7	0.988677
10	0.988339
13	0.988133
16	0.988004
19	0.987975

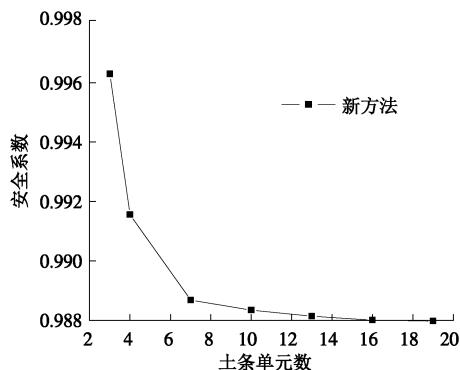


图 6 单元数对计算精度的影响

Fig. 6 Influence of total number of elements on precision of results

(3) 有效容差对收敛过程的影响

分别对 10 个单元和 20 个单元设置不同的迭代收敛容许误差进行计算, 其收敛迭代次数见表 3。可知, 设置不同的有效容差对计算收敛的迭代次数是有影响的, 随着有效容差的减小, 收敛迭代次数逐渐增多。但总的迭代次数还是较少, 精度达到 10^{-8} 需要 9 次迭代, 可见该算法容易收敛。

表 3 不同容差对应的迭代次数

Table 3 Number of iterations corresponding to different tolerance error values

容许误差	迭代次数(10个 土条单元)	迭代次数(20个 土条单元)
10^{-1}	3	3
10^{-2}	3	3
10^{-3}	4	4
10^{-4}	5	5
10^{-5}	5	5
10^{-6}	5	7
10^{-7}	7	7
10^{-8}	9	9

2.2 算例二

采用ACADS边坡稳定分析程序考核题3作为算例^[10], 一个二维非均质的三层不同材料的土坡, 边坡基本形状如图7所示, 土体材料特性见表4, 推荐答案安全系数为1.39, 由于该算例被很多学者用很多方法进行了验证性分析, 得到的结果比较可靠。因此本文的新算法分析该均质边坡的稳定性, 与推荐答案进行比较, 以验证其有效性和可行性。

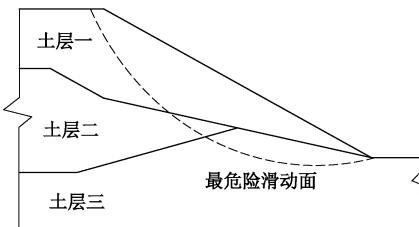


图 7 边坡形状及最危险滑动面位置(单位: m)

Fig. 7 Shape and location of the most critical slip surface in a homogeneous slope (unit: m)

表 4 土体材料参数

Table 4 Parameters of soils

土层	c /kPa	$\varphi /(^{\circ})$	$\gamma /(kN \cdot m^{-3})$	E /MPa	μ
土层一	0.0	38.0	19.5	100.0	0.35
土层二	5.3	23.0	19.5	100.0	0.35
土层三	7.2	20.0	19.5	100.0	0.35

土坡的计算网格模型如图 8 所示, 通过几种不同的方法对该边坡进行稳定性分析, 计算结果见表 5。从计算结果中可知, 本文的新方法具有较高的计算精度, 其计算结果与各种极限平衡法的计算结果误差均在 3% 以内; 且使用的单元数和迭代次数少, 计算简便, 收敛性好。

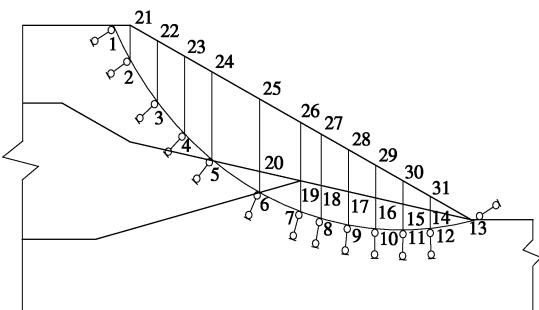


图 8 土坡网格模型图

Fig. 8 Slope meshes

表 5 不同方法计算的安全系数

Table 5 Factors of safety calculated by different methods

方法	安全系数
Bishop	1.405
Spencer	1.375
GLE	1.374
Janbu corrected	1.357
新方法(21个单元, 4次迭代)	1.355
ACADS 推荐答案	1.390

4 结语

基于有限元法和极限平衡法的思想提出了一种边坡稳定计算的新方法, 该法仍然满足边坡稳定分析的基本原则, 只需指定滑面(可以是任意形状的), 利用有限元法的思想则不需要对条间力等条件进行人为简化和假定, 严格满足所有的平衡条件; 与已有的有限元计算方法相比更简单, 容易得到安全系数且收敛性好。数值算例的计算结果表明, 该方法行之有效, 计算精度高, 收敛速度快, 易于编程, 具有较高的实用价值, 该方法可方便地计入渗流力, 地震惯性力, 超孔隙压力和地面超载等外部荷载, 目前已经应用于AutoBank软件。

参考文献:

- [1] 郑颖人, 陈祖煜, 王恭先, 等. 边坡与滑坡工程治理[M]. 人民交通出版社, 2007. (ZHENG Ying-ren, CHEN Zu-yu, WANG Gong-xian, et al. Engineering treatment of slope and landside[M]. China Communications Press, 2007. (in Chinese))
- [2] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析-程序. 原理. 方法[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2005. (CHEN Zu-yu. Soil slope stability analysis: theory, methods and programs[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2005. (in Chinese))
- [3] DUNCAN J M. State of the art limit equilibrium and finite element analysis of slopes[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1996, **122**(7): 577 - 596.
- [4] 陈祖煜. 土坡稳定分析通用条分法及其改进[J]. 岩土工程学报, 1983, **5**(4): 11 - 273 (CHEN Zu-yu. The generalized method of slice for slope stability analysis and its modifications[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1983, **5**(4): 11 - 27. (in Chinese)))
- [5] 张鲁渝. 一个用于边坡稳定分析的通用条分法[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, **23**(3): 496 - 501. (ZHANG Lu-yu. Generalized limit equilibrium method for slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, **23**(3): 496 - 501. (in Chinese)))
- [6] 郑颖人, 赵尚毅. 有限元强度折减法在土坡与岩坡中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, **23**(19): 3381 - 3388. (ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang yi. Application of strength reduction fem in soil and rock slope[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, **23**(19): 3381 - 3388. (in Chinese))
- [7] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, **24**(3): 343 - 346. (ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, SHI Wei-min, et al. Analysis on safety factor of slope by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, **24**(3): 343 - 346. (in Chinese)))
- [8] 张鲁渝, 郑颖人, 赵尚毅, 等. 有限元强度折减法计算土坡稳定安全系数的精度研究[J]. 水利学报, 2003, **47**(1): 21 - 27. (ZHANG Lu-yu, ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi, et al. The feasibility study of strength-reduction method with fem for calculating safety factors of soil slope stability[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2002, **24**(3): 343 - 346. (in Chinese))
- [9] BISHOP A W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes[J]. Géotechnique, 1955, **5**(1): 7 - 17.
- [10] DONALD I B, GIAM P. The ACADS slope stability programs review[C]// 6th International Symposium on Landslides. New Zealand, 1992: 1665 - 1670.